Paper-ID: VGI_197607

Eine Bedingungsgleichung für eine Diagonale über mehrere Dreiecke eines Streckennetzes

K. R. Neumayr [1]

[1] *Institut für Landesvermessung und Photogrammetrie der Technischen Universität Graz, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **64** (2), S. 68–75

1976

BibTEX:

```
@ARTICLE{Neumayr_VGI_197607,
Title = {Eine Bedingungsgleichung f{\"u}r eine Diagonale {\"u}ber mehrere
   Dreiecke eines Streckennetzes},
Author = {Neumayr, K. R.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {68--75},
Number = {2},
Year = {1976},
Volume = {64}
}
```

[10] *Ramsayer, K.:* Jordan/Eggert/Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band IIa: Geodätische Astronomie, Stuttgart 1970.

[11] *Schwebel, R.:* Untersuchung instrumenteller Fehler von Universal- und Passageinstrument mit Hilfe von Autokollimation. DGK Reihe C, Heft 117, München 1968.

[12] *Veigl, H.:* Untersuchung eines neuen Sekundentheodolits der Fa. Kern auf seine Eignung zur astronomischen Ortsbestimmung (Arbeitstitel). Diplomarbeit, Institut für Höhere Geodäsie, TU Wien 1976.

Eine Bedingungsgleichung für eine Diagonale über mehrere Dreiecke eines Streckennetzes

Von *K. R. Neumayr*, Graz

1. Einleitung

In Streckennetzen treten neben den bekannten Bedingungsgleichungen (Diagonalenviereck, Zentralbedingung) auch Bedingungsgleichungen für Diagonalen auf, welche über mehrere Dreiecke des Streckennetzes gehen. Für die Aufstellung dieser Bedingungsgleichung wird in [1] S. 636 bis 640 ein allgemeiner Weg aufgezeigt (— die Feststellung in [2] S. 63, das Aufstellen einer nichtlinearen Bedingungsgleichung sei unmöglich, trifft nicht zu —). Die praktische Aufstellung bereitete jedoch Schwierigkeiten, weil bisher ein Schema hierfür fehlte. Auf Anregung von *K. Rinner* wurde die Aufgabe einer schematischen Aufstellung dieser Bedingungsgleichung untersucht und ein Lösungsweg gefunden. Über diesen wird nachstehend berichtet.

2. Ableitung der Bedingungsgleichung

2.1. Ansatz:

Vom Anfangspunkt A der Diagonale $S_{A,B}$ wird über die Netzseiten S_i ($i = 1, n$) ein Polygonzug zum Endpunkt der Diagonale B gelegt. Als Brechungswinkel β_i ($i = 1,\ n - 1$) werden einfache Dreieckswinkel oder ihre Ergänzung auf 400^g verwendet, ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe der gegenüberliegenden Seiten p_i ($i = 1,\ n - 1$). Diese Seiten erhalten ein Vorzeichen je nachdem, ob sie links (sign. $(p_i) = +$) oder rechts (sign. $(p_i) = -$) vom Polygonzug (in der Richtung der Bezeichnung) liegen (siehe Fig. 1 a, 1 b, 1 c).

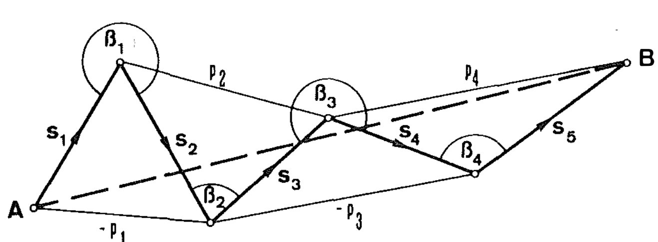
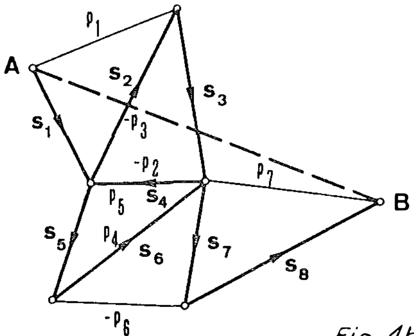


Fig. 1a



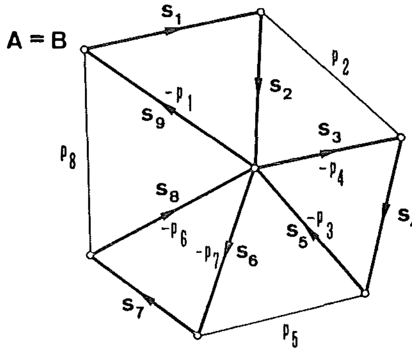


Fig. 1b,c

2.2 *Allgemeine Form*

Mit den Koordinatenunterschieden $\Delta x_{A,B}$ und $\Delta y_{A,B}$ zwischen Anfangs- und Endpunkt der Diagonale lautet die allgemeine Bedingungsgleichung:

$$s^2_{A,B} = \Delta x^2_{A,B} + \Delta y^2_{A,B} \qquad \ldots (1)$$

Nach Einführung der Richtungswinkel der Polygonseiten t_i $(i = 1,n)$ kann man daraus folgende Beziehungen ableiten:

$$\Delta x_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} s_i \cos t_i; \quad \Delta y_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} s_i \sin t_i \qquad \ldots (2a,b)$$

$$\Delta x^2_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} (s_i^2 \cos^2 t_i + 2\, s_i \cos t_i \sum_{k=i+1}^{n} s_k \cos t_k) \qquad \ldots (3a)$$

$$\Delta y^2_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} (s_i^2 \sin^2 t_i + 2\, s_i \sin t_i \sum_{k=i+1}^{n} s_k \sin t_k) \qquad \ldots (3b)$$

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} [s_i^2 + 2\, s_i \sum_{k=i+1}^{n} s_k \cos (t_i - t_k)] \qquad \ldots (4)$$

Diese Gleichung ist von der Orientierung des Netzes unabhängig, es kommen nur Richtungswinkeldifferenzen vor, die durch die Brechungswinkel ausgedrückt werden können.

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} [s_i^2 + 2\, s_i \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \cos (\sum_{j=1}^{k-1} \beta_j)] \qquad \ldots (5)$$

Die Berechnung der Brechungswinkel aus den Seiten kann nach dem Cosinussatz erfolgen.

$$\beta_j = \operatorname{sign}(p_j) \arccos \frac{s_j^2 + s^2_{j+1} - p_j^2}{2\, s_j\, s_{j+1}} \qquad \ldots (6)$$

Daraus folgt für die Diagonale in Abhängigkeit der Strecken die Bedingung:

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} \left[s_i^2 + 2\, s_i \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k-1}\, s_k \right.$$

$$\left. \cos\left(\sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{sign} p_j \arccos \frac{s_j^2 + s^2_{j+1} - p_j^2}{2\, s_j s_{j+1}} \right) \right] \qquad \ldots (7)$$

Um die Linearisierung zu erleichtern, wird Formel (5) in Matrizenform dargestellt. Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{a}^T = (s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots\ldots s_n) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\beta_1 & \cos(\beta_1+\beta_2) & \ldots & (-1)^{n-1}\cos\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\right) \\ -\cos\beta_1 & 1 & -\cos\beta_2 & \ldots & (-1)^{n-2}\cos\left(\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i\right) \\ \cos(\beta_1+\beta_2) & -\cos\beta_2 & 1 & \ldots & (-1)^{n-3}\cos\left(\sum\limits_{i=3}^{n-1}\beta_i\right) \\ -\cos(\beta_1+\beta_2+\beta_3) & \cos(\beta_2+\beta_3) & -\cos\beta_3 & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ (-1)^{n-1}\cos\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\right) & (-1)^{n-2}\cos\left(\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i\right) & (-1)^{n-3}\cos\left(\sum\limits_{i=3}^{n-1}\beta_i\right) & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

folgt hiefür die Beziehung

$$s^2 = \mathbf{a}^T\, \mathbf{B}\, \mathbf{a} \qquad \ldots (8\text{a})$$

Die Matrix der Brechungswinkel **B** ist symmetrisch und kann aus der nachstehend eingeführten Dreiecksmatrix **A** gebildet werden.

$$s^2 = \mathbf{a}^T\, \mathbf{B}\, \mathbf{a} = \mathbf{a}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\, \mathbf{a} = 2\, \mathbf{a}^T\, \mathbf{A}\, \mathbf{a} \qquad \ldots (8\text{b})$$

Die geometrische Bedeutung des darin vorkommenden Vektors

$$\mathbf{B}\, \mathbf{a} = (s \cos\alpha_1,\ s\cos\alpha_2,\ s\cos\alpha_3 \ldots\ldots s\cos\alpha_n)^T \qquad \ldots (9)$$

ist aus Fig. 2 ersichtlich

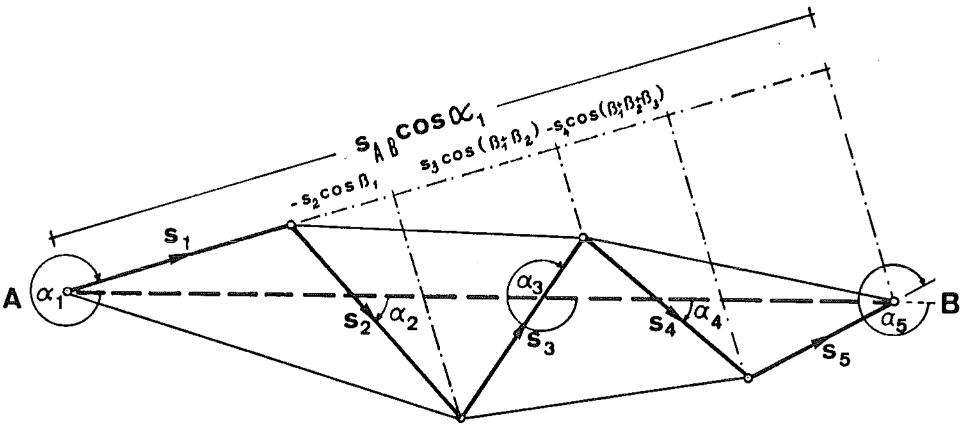


Fig. 2

2.3. Linearisierung

Durch Differentiation von Gleichung (8) folgt:

$$
\begin{aligned}
2\,s\,ds &= 2\,d\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}^T\mathbf{A}\,d\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}^T d\mathbf{A}\,\mathbf{a} \\
s\,ds &= (\mathbf{A}\mathbf{a})^T d\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}\,d\mathbf{a} + \mathbf{a}^T d\mathbf{A}\,\mathbf{a} \qquad \ldots (10)\\
s\,ds &= \mathbf{a}^T\mathbf{B}\,d\mathbf{a} + \mathbf{a}^T d\mathbf{A}\,\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

Die Differentiation von **A** nach β_i und die Zusammenfassung und Umformung der Koeffizienten von $d\beta_i$ ergibt die Beziehungen

$$\mathbf{a}^T d\mathbf{A}\,\mathbf{a} = s \sum_{i=1}^{n-1} d\beta_i \sum_{k=1}^{i} s_k \sin\alpha_k$$

$$ds = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i\, ds_i + \sum_{i=1}^{n-1} d\beta_i \sum_{k=1}^{i} s_k \sin\alpha_k \qquad \ldots (11)$$

Für ein Streckennetz müssen die Brechungswinkel durch Seiten ersetzt werden. Hiefür erhält man durch Linearisieren von Formel (6) die Gleichung

$$d\beta_i = \frac{1}{s_i s_{i+1} \sin\beta_i} \left[(s_{i+1}\cos\beta_i - s_i)\, ds_i + (s_i \cos\beta_i - s_{i+1})\, ds_{i+1} + p_i\, dp_i)\right]$$

Werden Hilfsgrößen

$$2\,F_i = s_i s_{i+1} \sin\beta_i,\quad l_i = \frac{s_{i+1}\cos\beta_i - s_i}{2\,F_i},\quad m_i = \frac{s_{i-1}\cos\beta_{i-1} - s_i}{2\,F_i},\quad r_i = \frac{p_i}{2\,F_i} \qquad \ldots (12)$$

eingeführt, so folgt daraus die für die Netzseiten linearisierte Bedingungsgleichung:

$$ds = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i\, ds_i - \sum_{i=1}^{n-1} ds_i\,(l_i + m_i) \sum_{k=1}^{i} s_k \sin\alpha_k - \sum_{i=1}^{n-1} dp_i\, r_i \sum_{k=1}^{i} s_k \sin\alpha_k \qquad \ldots (13\text{a})$$

Nach Zusammenfassung der Koeffizienten von ds_i folgt als Ergebnis:

$$ds = \sum_{i=1}^{n} ds_i \left[\cos \alpha_i - \sum_{k=1}^{i} (l_i + m_i)\, s_k \sin \alpha_k\right] - \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \left(\sum_{k=1}^{i} r_i s_k \sin \alpha_k\right) \qquad \ldots (13\text{b})$$

In dieser gilt $m_1 = 0$ und $l_n = m_n = 0$.

Geometrische Deutung der Hilfsgrößen:

Die in Gl. (12) eingeführten Hilfsgrößen l_i, m_i und r_i können geometrisch entsprechend Fig. 3 erklärt werden:

$$r_i = \operatorname{sign}(p_i) \frac{p_i}{2 F_i} = \operatorname{sign}(p_i) \frac{1}{h_i}$$

$$l_i = \frac{s_{i+1} \cos \beta_i - s_i}{p_i h_i} = \operatorname{sign}(p_i) \sqrt{\frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{s_i^2}}$$

$$m_{i+1} = \operatorname{sign}(p_i) \sqrt{\frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{s^2_{i+1}}} \qquad \ldots (14)$$

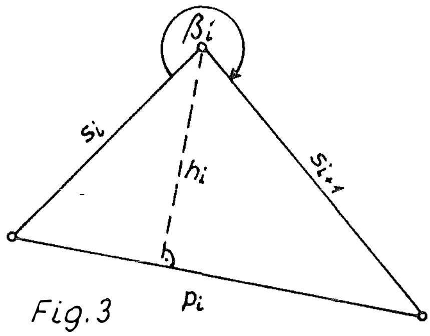


Fig. 3

2.4. Programmerstellung

Zur praktischen Anwendung der abgeleiteten Bedingungsgleichungen wurde das Unterprogramm BEDIAG in FORTRAN IV für die Rechenanlage des Rechenzentrums Graz (UNIVAC 494) erstellt.

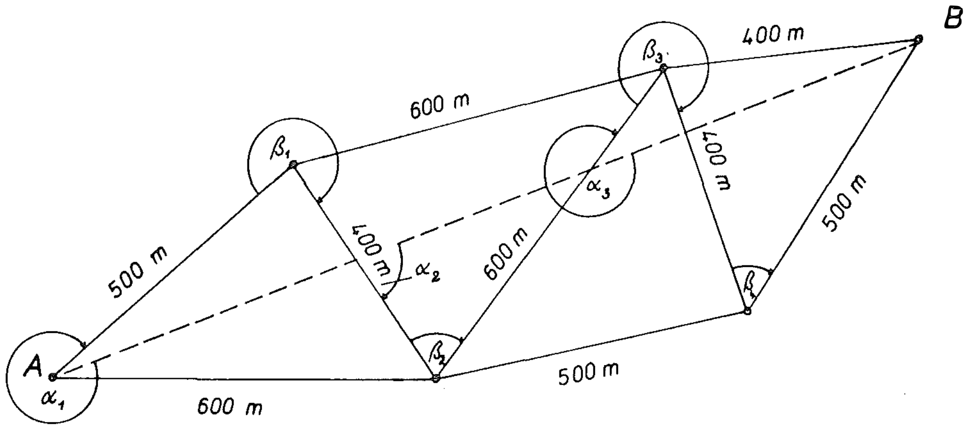
Eingabeparameter:	S (N)	— Vektor der Polygonseiten
	P (N)	— Vektor der gegenüberliegenden Seiten (mit Vorzeichen)
	N	— Anzahl der Polygonseiten
Ausgabeparameter:	SKOEF (N)	— Vektor der Koeffizienten der Polygonseiten für die linearisierte Bedingungsgleichung
	PKOEF (N)	— Vektor der Koeffizienten der gegenüberliegenden Seiten für die linearisierte Bedingungsgleichung
	BETA (N)	— Brechungswinkel des Polygonzuges
	ALFA (N)	— Winkel zwischen Diagonale und Polygonseiten

Die benötigte CP-Zeit für die Aufstellung einer Bedingungsgleichung über vier bis sechs Dreiecke ist 0,1 sec.

3. *Praktische Beispiele*

Die Bedingungsgleichung kann wegen ihrer allgemeinen Form für alle netzeigenen Bedingungen in Streckennetzen verwendet werden. Sie ermöglicht somit eine weitgehende Automatisation bei der bedingten Ausgleichung. Die Anwendung im Fehlerfortpflanzungsgesetz läßt eine einfache Fehlerrechnung für mittels Dreiecksketten (Traversen) verbundene Punkte zu.

1. Beispiel: Diagonale über vier Dreiecke



Koeffizienten der Bedingungsgleichung

	Polyg. S.	Gegen. S.	Beta	Alfa	Koeffizienten	
1	500,000			377,8152	0,55271	
		– 600,000	307,9786			0,51625
2	400,000			85,7939	–0,26297	
		600,000	78,3653			0,58164
3	600,000			364,1592	0,20264	
		– 500,000	338,0321			0,25419
4	400,000			102,1912	–0,23370	
		400,000	57,0198			0,76575
5	500,000			359,2110	0,32307	

Anzahl der Polygonseiten: 5
Länge der Diagonale: 1452,936

Der Programmausdruck enthält in den beiden ersten Spalten die Eingabedaten (Polygonseiten und Gegenseiten), außerdem die Brechungswinkel und die Winkel der Polygonseiten gegen die Diagonale und in den beiden letzten Spalten die Koeffizienten der Seiten. Die linearisierte Bedingungsgleichung lautet:

$$ds = 0{,}55271\, ds_1 - 0{,}26297\, ds_2 + 0{,}20264\, ds_3 - 0{,}23370\, ds_4 + 0{,}32307\, ds_5 + \\ + 0{,}51625\, dp_1 + 0{,}58164\, dp_2 + 0{,}25419\, dp_3 + 0{,}76575\, dp_4$$

A. Bedingter Ausgleich für gleichgewichtige Streckenmessungen

eingeführter Meßwert $s = 1452{,}78$ m

mit den gemessenen Strecken gerechnet $(s) = 1452{,}937$ m

$$s + v_s = (s) + ds$$

$$w_s = (s) - s = +\ 0{,}157 \text{ m}$$

$$ds - v_s + w_s = 0$$

Ergebnis: verbesserte Seiten s_i, p_i und s

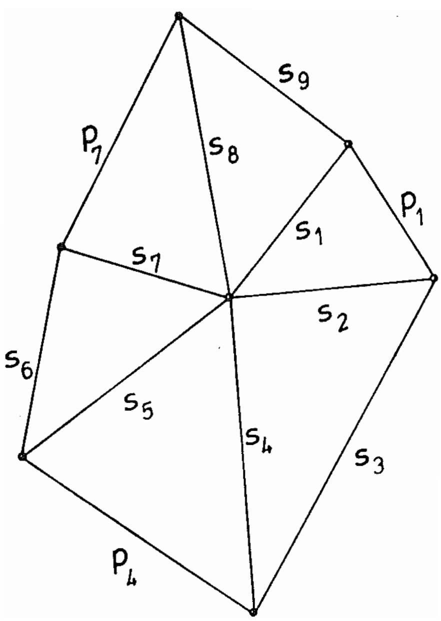
$s_1 = 499{,}97$ m		
	$p_1 = 599{,}97$ m	
$s_2 = 400{,}01$ m		
	$p_2 = 599{,}97$ m	
$s_3 = 599{,}99$ m		$s = 1452{,}84$ m
	$p_3 = 499{,}99$ *m*	
$s_4 = 400{,}01$ m		
	$p_4 = 399{,}96$ m	
$s_5 = 499{,}98$ m		

B. Fehlerfortpflanzung für die Diagonale s

mittlerer Fehler der Meßstrecken	mittlerer Fehler der Diagonale aus dem Netz	bei Direktmessung
$ms_i = \pm\ 10 \text{ mm} \pm 10^{-5}s_i$	$ms = \pm\ 15{,}2$ mm	$ms = \pm\ 17{,}6$ mm
$ms_i = \qquad \pm\ 10^{-5}s_i$	$ms = \pm\ \ 6{,}8$ mm	$ms = \pm\ 14{,}5$ mm
$ms_i = \pm\ 10$ mm	$ms = \pm\ 11{,}2$ mm	$ms = \pm\ 10{,}0$ mm

2. Beispiel: Bedingter Ausgleich einer Zentralfigur

$$\text{Gewichtannahme: } P_{s_i} = \frac{c}{s_i^2}$$



Koeffizienten der Bedingungsgleichung

	Polyg. S.	Gegen. S.	Beta	Alfa	Koeffizienten	
1	30686,337			103,8080	−0,43462	
		24298,197	50,8548			1,06627
2	31746,092			354,6628	0,29694	
		−49293,770	337,3219			−0,31148
3	59162,895			91,9847	1,15830	
		−31746,092	363,9507			−1,39155
4	49293,779			255,9354	−1,15673	
		43535,371	63,1698			0,79179
5	40807,558			119,1052	0,68315	
		−26731,406	354,7327			−2,10355
6	33217,045			273,8379	1,15016	
		−40807,558	305,4802			−1,80656
7	26731,406			379,3181	1,65774	
		43590,729	79,2514			1,19726
8	44038,904			258,5696	−1,69657	
		−30686,337	351,1908			0,15339
9	28852,316			9,7604	1,00259	

Anzahl der Polygonseiten: 9
Länge der Diagonale: 0,107782

Seite	*Koeffizienten*	*Gewichte*	*Verb (mm)*
s_1 = 30 686,377	−0,28123	0,95579	+ 1,1
s_2 = 31 746,092	−1,09461	0,89303	+ 4,6
p_1 = 24 298,197	+1,06627	1,52441	− 2,6
s_3 = 59 162,895	+1,15830	0,25713	−16,9
s_4 = 49 293,779	−1,46821	0,37040	+14,8
p_4 = 43 535,371	+0,79179	0,47486	− 6,2
s_5 = 40 807,558	−1,12341	0,54047	+ 7,8
s_6 = 33 217,045	+1,15016	0,81568	+ 1,3
s_7 = 26 731,406	−0,44581	1,25954	− 5,3
p_7 = 43 590,729	+1,19726	0,47366	− 9,5
s_8 = 44 038,904	−1,69657	0,46407	+13,7
s_9 = 28 852,316	+1,00259	1,08116	− 3,5

Literaturverzeichnis

[1] *Jordan - Eggert - Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde, Bd. VI.

[2] *Linkwitz, K.:* Über die Substitution von Variablen bei der Ausgleichung nichtlinearer bedingter Beobachtungen“, ZfV 1972, S. 57.