Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Erhart Ecker [1]

[1] *Lehrstuhl für Höhere Geodäsie und Astronomie der Technischen Universität Berlin, 1. Berlin 20, Am Pichelsee 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **64** (2), S. 41–53

1976

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN UND PHOTOGRAMMETRIE

Herausgegeben vom

Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Offizielles Organ

der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

SCHRIFTLEITUNG:

a. o. Univ.-Prof. W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid

o. Univ.-Prof. Dr. phil. Wolfgang Pillewizer

o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz

Nr. 2 Baden bei Wien, März 1977 64. Jg.

Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von *Erhart Ecker*, Berlin

Summary

In this paper several methods of least-squares adjustment in Hilbert spaces, well-known from Krarup's "foundation", are derived from the condition that $\varphi(x, v, k) = \langle Kx, x \rangle_1 + \langle Pv, v \rangle_2 - \langle Ax - v - \mathfrak{l}, -k \rangle_2$ has a minimum, where $(H_i, \langle\ \rangle_i), i = 1, 2$ are Hilbert spaces over $\mathbf{R}$, $A \in L(H_1, H_2)$ is the linear model, $\mathfrak{l}$ is the measurement, and where K, P are nonnegative selfadjoint operators on H_1, H_2, expressing the metric properties of the unknowns $x \in H_1$, and of the residuals $v \in H_2$, respectively. As an illustration an example is given: interpolating potentials in gravity anomalies.

1. Einleitung

Die verschiedenen Aufgaben der Geodäsie verlangen nach einer möglichst universell verwendbaren Ausgleichungsmethode. Um das im folgenden behandelte Ausgleichungsproblem formulieren zu können, rekapitulieren wir zuvor einige Begriffe.

Sind $(H_i, \langle\ \rangle_i), i = 1, 2$ Hilberträume über $\mathbf{R}$, so bezeichnen wir mit $L(H_1, H_2)$ den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von H_1 nach H_2, der, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum ist. Insbesondere ist $L(H_1, H_1) =: L(H_1)$ mit der Komposition als multiplikative Verknüpfung eine Banachalgebra. Für $A \in L(H_1, H_2)$ bezeichnen wir mit $N(A) := \{x \in H_1 : Ax = 0\}$ den Nullraum von A, mit $R(A) := A(H_1) \subset H_2$ den Bildraum von A. Zu $A \in L(H_1, H_2)$ existiert genau eine Abbildung $B \in L(H_2, H_1)$, sodaß für alle $x \in H_1$ und alle $y \in H_2$ $\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, By \rangle_1$ gilt; dieses zu A eindeutig bestimmte B heißt „die zu A adjungierte Abbildung", sie wird mit A^T bezeichnet. Ist $K \in L(H_1)$ und $K = K^T$, so heißt K selbstadjungiert.

Die Menge der selbstadjungierten Operatoren aus $L(H_1)$ bezeichnen wir mit $S(H_1)$. $S(H_1)$ ist ein Unterraum von $L(H_1)$; für $K \in S(H_1)$ schreiben wir $K \geqq 0$, wenn für alle $x \in H_1$ $\langle Kx, x \rangle_1 \geqq 0$ gilt. Für $0 \leqq K \in S(H_1)$ ist durch $\langle\ \rangle_{1,K}$:

$H_1 x H_1 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to \langle x, y\rangle_{1,K} := \langle Kx, y\rangle_1$ eine symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform gegeben. Daher gilt die Cauchy/Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y\rangle_{1,K}| \leqq \leqq ||x||_{1,K}\,||y||_{1,K}$, wobei $||\;||_{1,K}$ die durch $\langle\;\rangle_{1,K}$ induzierte Halbnorm ist, also $||x||_{1,K} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{1,K}}$. Daraus folgt insbesondere für $0 \leqq K \in S(H_1)$ aus $\langle Kx, x\rangle_1 = = 0$, daß $Kx = 0$, also $x \in N(K)$ ist. $\langle\;\rangle_{1,K}$ wird also ein Skalarprodukt für H_1 genau dann, wenn K injektiv ist. Ist H_1 endlichdimensional, so bedeutet $0 \leqq K \in S(H_1)$, daß die bezüglich einer Orthonormalbasis zugeordnete Matrix wegen $K \in S(H_1)$ symmetrisch und wegen $0 \leqq K$ positiv semidefinit ist; und die Injektivität besagt dann schon die Bijektivität, d. h. für die zugeordnete Matrix sowohl die positive Definitheit, wie auch die Regularität.

Wir können nun das Problem formulieren: gegeben seien $\mathbf{R}$-Hilberträume $(H_i, \langle\;\rangle_i)$, $i = 1, 2$, $A \in L(H_1, H_2)$, $0 \leqq K \in S(H_1)$, $0 \leqq P \in S(H_2)$ und $\mathfrak{l} \in H_2$; gesucht sind Lösungen $(x, v) \in H_1 x H_2$ der Gleichung $Ax = \mathfrak{l} + v$ unter der Forderung $||x||_{1,K}^2 + ||v||_{2,P}^2 = \text{Minimum}$.

Dem liegt folgende Vorstellung zugrunde: H_1 stellt den Raum der Unbekannten, H_2 den der Messungen und A das lineare (oder linearisierte) Modell dar. Für eine bestimmte Realisierung der Modellparameter $x \in H_1$ läge für $Ax = : y$ eine Messung $\mathfrak{l}$ vor; ist dabei $\mathfrak{l}$ fehlerhaft, so verbessern wir $\mathfrak{l}$ um v zu $y = \mathfrak{l} + v$, andernfalls identifizieren wir $\mathfrak{l}$ mit y, wobei dann natürlich $y = \mathfrak{l} \in R(A)$ sein muß. $0 \leqq K \in S(H_1)$ und $0 \leqq P \in S(H_2)$ sei so gewählt, daß die (Halb-)Normen $||\;||_{1,K}$ bzw. $||\;||_{2,P}$ die metrischen Verhältnisse der Unbekannten bzw. Messungen widerspiegeln.

In 2.1 behandeln wir den Fall der fehlerfreien Messung, setzen also $\mathfrak{l} = y$, $v = 0$, $P = 0$, wodurch sich die Minimumsforderung auf $||x||_{1,K} = \text{Minimum}$ reduziert. Diesen Fall bezeichnen wir als Interpolation.

In 2.2 behandeln wir den Fall $K = 0$, $P \neq 0$, wodurch sich die Forderung auf $||v||_{2,P} = \text{Minimum}$ reduziert; diesen Fall bezeichnen wir als vermittelnden Ausgleich. Ist z. B. $\mathfrak{l} \in R(A)$, so $Ax = \mathfrak{l} + v$ mit $v = 0$ lösbar; ist also A nicht injektiv, so wird x durch die Forderung $||v||_{2,P} = \text{Minimum}$ nicht bestimmt. In 2.3 modifizieren wir deshalb 2.2, so daß auch x eindeutig bestimmt wird. In 2.4 behandlen wir den Fall $K \neq 0$, $P \neq 0$, den wir als Interpolation in fehlerhafte Messungen bezeichnen.

Wir werden sehen, daß sich alle vier Fälle aus denselben notwendigen Bedingungen für ein Minimum der Lagrangefunktion herausspezialisieren, wobei wir kaum über den vom vermittelnden Ausgleich her bekannten Formelapparat hinauskommen. Unser Zugang ist also merktechnisch sehr ökonomisch. In 3.1 bis 3.4 werden zur Theorie von 2.1 bis 2.4 entsprechende Beispiele gegeben, um die trockene Theorie etwas mit Leben zu erfüllen. Wir behandeln hier ein Beispiel aus der Erdmessung, obwohl man ebensogut die Ausgleichung eines Streckennetzes oder die Kalibrierung einer photogrammetrischen Meßkammer hätte zugrundelegen können.

2.0 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Problem: Gegeben seien $\mathbf{R}$-Hilberträume $(H_i, \langle\;\rangle_i)$, $i = 1, 2$, $0 \leqq K \in S(H_1)$, $0 \leqq P \in S(H_2)$, $A \in L(H_1, H_2)$ und $\mathfrak{l} \in H_2$.
Gesucht sind Lösungen $(x, v) \in H_1 x H_2$ der Gleichung $Ax = \mathfrak{l} + v$ unter der Forderung $||x||_{1,K}^2 + ||v||_{2,P}^2 = \text{Minimum}$. ... (1)

Wir gehen so vor, daß wir erst notwendige Bedingungen suchen, dann auf die verschiedenen Fälle spezialisieren und dann Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung durch Einführung zusätzlicher Voraussetzungen anstreben.

Notwendige Bedingungen: Sei $\varphi : H_1 x H_2 x H_2 \to \mathbf{R}$ die durch

$$(x, v, k) \to \varphi(x, v, k) = \frac{1}{2} ||x||_{1,K}{}^2 + \frac{1}{2} ||v||_{2,P}{}^2 - \langle Ax - v - \mathfrak{l}, k\rangle_2 \qquad \dots (2)$$

$$= \frac{1}{2} \langle Kx, x\rangle_1 + \frac{1}{2} \langle Pv, v\rangle_2 - \langle Ax - v - \mathfrak{l}, k\rangle_2$$

definierte Funktion. Da P, A, K und die Skalarprodukte stetig sind, ist φ stetig. φ ist stetig differenzierbar (Dieudonné, S. 174), wenn φ bezüglich jeder Variablen partiell stetig differenzierbar ist. Nun ist, wenn D_i die partielle Ableitung nach der i-ten Variablen kennzeichnet, unmittelbar zu sehen, daß

$$(D_1\varphi)(x, v, k) = \langle\ , Kx - A^T k\rangle_1 \in H_1' \qquad \dots (3.1)$$

$$(D_2\varphi)(x, v, k) = \langle\ , Pv + k\ \rangle_2 \in H_2' \qquad \dots (3.2)$$

$$(D_3\varphi)(x, v, k) = -\langle\ , Ax - v - \mathfrak{l}\rangle_2 \in H_2' \qquad \dots (3.3)$$

die partiellen Ableitungen von φ an der Stelle $(x, v, k) \in H_1 x H_2 x H_2$ sind. Denn es ist für den Zuschlag $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$

$$\varphi(x + h_1, v, k) - \varphi(x, v, k) - (D_1\varphi)(x, v, k)(h_1) = \dots = \frac{1}{3} \langle Kh_1, h_1\rangle_1,$$

$$\varphi(x, v + h_2, k) - \varphi(x, v, k) - (D_2\varphi)(x, v, k)(h_2) = \dots = \frac{1}{2} \langle Ph_2, h_2\rangle_2,$$

$$\varphi(x, v, k + h_2) - \varphi(x, v, k) - (D_3\varphi)(x, v, k)(h_2) = \dots = 0,$$

woraus wegen

$$|\varphi(x + h_1, v, k) - \varphi(x, v, k) - (D_1\varphi)(x, v, k)(h_1)| \leqq \frac{1}{2} ||K||\ ||h_1||_1{}^2,$$

$$|\varphi(x, v + h_2, k) - \varphi(x, v, k) - (D_2\varphi)(x, v, k)(h_2)| \leqq \frac{1}{2} ||P||\ ||h_2||_2{}^2,$$

$$|\varphi(x, v, k + h_2) - \varphi(x, v, k) - (D_3\varphi)(x, v, k)(h_2)| = 0$$

die partielle Differenzierbarkeit an der Stelle (x, v, k) und die Richtigkeit der oben vorgegebenen Ableitungen ersichtlich ist. Gleichzeitig sieht man aus (3), daß $D_1\varphi$, $D_2\varphi$, $D_3\varphi$ auf $H_1 x H_2 x H_2$ stetig ist, φ also stetig differenzierbar ist.

Hat die stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : H_1 x H_2 x H_2 \to \mathbf{R}$ an der Stelle (x, v, k) ein Minimum, so muß $\varphi'(x, v, k) = 0$ sein, oder gleichbedeutend, $(D_j\varphi)(x, v, k) = 0$ für $j = 1, 2, 3$, und dies liefert uns die notwendigen Bedingungen

$$Kx = A^T k, \qquad \dots (4.1)$$

$$Pv = -k, \qquad \dots (4.2)$$

$$Ax = \mathfrak{l} + v. \qquad \dots (4.3)$$

2.1 Interpolation in fehlerfreie Messungen

Wir gehen jetzt davon aus, daß für $Ax = y = \mathfrak{l} + v$ die Messung $\mathfrak{l}$ fehlerfrei ist. Wir setzen daher $v = 0$, $y = \mathfrak{l}$, und verlangen $y \in R(A)$. Die Minimumsforderung reduziert sich auf $\|x\|_{1,K} =$ Minimum, und die notwendigen Bedingungen (4) auf $Kx = A^T k$, $Ax = y$. Ist K bijektiv, so liefert die erste Gleichung $x = K^{-1}A^T k$, und eingesetzt in die zweite Gleichung entsteht

$$AK^{-1}A^T k = y, \qquad \ldots (5.1)$$

$$x = K^{-1}A^T k. \qquad \ldots (5.2)$$

(5.1) ist lösbar, wenn $y \in R(AK^{-1}A^T)$ ist, oder wegen der Voraussetzung $y \in R(A)$, wenn $R(A) \subset R(AK^{-1}A^T)$ gilt. Man zeigt aus $0 \leqq K \in S(H_1)$ bijektiv leicht, daß $N(A^T) = N(AK^{-1}A^T)$ ist, also $\overline{R(A)} = \overline{R(AK^{-1}A^T)}$, so daß (5.1) lösbar wird, wenn $AK^{-1}A^T$ abgeschlossenen Wertebereich hat. Wir fassen zusammen:

$(H_i, \langle\ \rangle_i$, $i = 1, 2$, seien Hilberträume über $\mathbf{R}$, *$0 \leqq K \in S(H_1)$ bijektiv, $A \in L(H_1, H_2)$, $AK^{-1}A^T$ mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung*

$$Ax = y \quad \textit{unter der Forderung} \quad \|x\|_{1,K} = \textit{Minimum}$$

für jedes $y \in R(A)$ genau eine Lösung $x \in H_1$, und diese ist durch das Gleichungssystem (5) *bestimmt.*

Zum Beweis hat man nach dem zuvor Gesagten nur noch zu zeigen, daß x durch (5) eindeutig bestimmt ist, und für jedes $x' \in H_1$ mit $Ax' = y$ $\|x'\|_{1,K} \geqq$ $\geqq \|x\|_{1,K}$ folgt, was dem Leser überlassen sei. Man beachte dabei, daß k aus (5.1) nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht, aber jede Lösung k von (5.1) gemäß (5.2) auf dasselbe x führt.

2.2 Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen

Für die Gleichung $Ax = \mathfrak{l} + v$ läuft die Forderung (1) auf den vermittelnden Ausgleich hinaus, wenn wir $K = 0$ setzen, also $\|v\|_{2,P} =$ Minimum fordern. Die notwendigen Bedingungen (4) reduzieren sich mit $K = 0$ auf

$$A^T k = 0, \quad Pv = -k, \quad Ax = \mathfrak{l} + v,$$

deren zweite, eingesetzt in die erste

$$A^T P v = 0 \qquad \ldots (6.1)$$

ergibt; setzt man v aus der dritten Gleichung in (6.1) ein, so erhalten wir

$$A^T P A x = A^T P \mathfrak{l}, \qquad \ldots (6.2)$$

$$v = Ax - \mathfrak{l}. \qquad \ldots (6.3)$$

(6.2) ist lösbar, wenn $A^T P \mathfrak{l} \in R(A^T P A)$, oder $R(A^T P) \subset R(A^T P A)$ ist. Wiederum hat man wegen $N(A^T P A) = N(PA)$ die Beziehung $\overline{R(A^T P A)} = \overline{R(A^T P)}$, sodaß (6.2) lösbar ist, wenn $A^T P A$ abgeschlossenen Wertebereich hat. Damit können wir zusammenfassen:

Seien $(H_i, \langle\ \rangle_i)$, $i = 1, 2$ *Hilberträume über* $\mathbf{R}$, $0 \leqq P \in S(H_2)$, $A \in L(H_1, H_2)$, $A^T PA$ *mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung* $Ax = \mathfrak{l} + v$ *für jedes* $\mathfrak{l} \in H_2$ *unter der Forderung* $||v||_{2,P} =$ *Minimum stets Lösungen* $(x, v) \in H_1 x H_2$ *und die Lösungsmenge ist durch*

$$T = \{(x, v) \in H_1 x H_2 : A^T PAx = A^T P \mathfrak{l},\ v = Ax - \mathfrak{l}\} \qquad \ldots (6.4)$$

gegeben, wobei für jedes $(x, v) \in T$ $||v||_{2,P}$ stationär ist.
Zusatz: Ist P überdies injektiv, so ist v eindeutig bestimmt.

Da wir bereits die Lösbarkeit von (6.2) gesehen haben, ist zum Beweis nur noch zu zeigen, daß für jedes $(x, v) \in T$ $||v||_{2,P}$ denselben Wert c hat und für jedes $(x', v') \in H_1 x H_2$ mit $Ax' = \mathfrak{l} + v'$ $||v'||_{2,P} \geqq c$ folgt. Beides ist evident.

Für den Zusatz haben wir folgendes zu zeigen: ist $x_1, x_2 \in H_1$ mit $A^T PAx_i = A^T P \mathfrak{l}$, $i = 1, 2$, und $v_i = Ax_i - \mathfrak{l}$, so folgt $v_1 = v_2$. Da dann $x_1 - x_2 \in N(A^T PA)$ und mit injektivem P $N(A^T PA) \subset N(A)$, also $A(x_1 - x_2) = 0$ ist, haben wir $v_1 - v_2 = A(x_1 - x_2) = 0$.

Der vermittelnde Ausgleich ist besonders der endlichdimensionalen Konzeption angepaßt. Ist z. B. $H_1 = \mathbf{R}^u$ und $H_2 = \mathbf{R}^n$, so ist bei regulärem P die Bedingung $n \geqq u$ für die Injektivität von $A^T PA$ notwendig, aber selbst $n > u$ nicht hinreichend. Hinreichend für die Regularität der „Normalgleichungsmatrix" $A^T PA$ und damit die eindeutige Bestimmtheit der Lösung (x, v) ist z. B. P positiv definit *und* dim $R(A) = u$.

Da beim vermittelnden Ausgleich das linearisierte Modell häufig den Charakter einer Beseitigung systematischer Fehler hat, ist es in diesen Fällen sinnvoll, für die Messung $\mathfrak{l}$ ein Genauigkeitsmaß zu definieren, das diesem Charakter Rechnung trägt. Ein solches kann man z. B. durch $(||v||_{2,P}{}^2 / \operatorname{codim} R(A))^{1/2}$ bzw. 0, falls A surjektiv ist, definieren.

Häufig werden für die Inversion der Normalgleichungsmatrix $N := A^T PA$ Programme verwendet, die die Matrizengleichung $NX = E$ durch sukzessive Multiplikation mit Reduktionsmatrizen in $EX = Q$ überführen. Ist N singulär, so müßte beim Aufbau der Reduktionsmatrizen eine Division durch Null auftreten. Da aber in rationaler Approximation eine errechnete Null nicht Null zu sein braucht, z. B. $1\text{-}0.\dot{9}$ bei 14 Stellen 1.E-14 ergibt, kommt es dann oft nicht zur Fehlermeldung. So kann es bei singulären Normalgleichungsmatrizen und bei Verwendung derartiger Inversionsprogramme, die nicht auf Regularität prüfen, zu plausiblen Ergebnissen und vernünftigen mittleren Fehlern kommen, obwohl QN erheblich von E abweicht. Derartige Fehler kann man vermeiden, wenn man z. B. die nun folgende Modifikation des vermittelnden Ausgleichs anwendet.

2.3 Modifikation des vermittelnden Ausgleichs

Wendet man 2.1 mit $K = I_1$ auf die Lösungsmenge T von 2.2 an, so hat man:

Seien $(H_i, \langle\ \rangle_i)$, $i = 1, 2$ *Hilberträume über* $\mathbf{R}$, $0 \leqq P \in S(H_2)$ *injektiv*, $A \in L(H_1, H_2)$ und $N := A^T PA$ *mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung* $Ax = \mathfrak{l} + v$ *mit der Forderung* $||v||_{2,P} =$ *Minimum und* $y := A^T P \mathfrak{l}$ die *Lösungsmenge*

$$T = \{(x, v) \in H_1 x H_2 : Nx = y \text{ und } v = Ax - \mathfrak{l}\}, \qquad \ldots (7.1)$$

wobei v eindeutig bestimmt ist. In T gibt es genau eine Lösung (x, v), die überdies der Forderung $\|x\|_1 =$ Minimum genügt, und diese ist aus dem Gleichungssystem

$$N^2 k = y, \qquad \dots (7.2)$$

$$x = Nk, \qquad \dots (7.3)$$

$$v = Ax - \mathfrak{l} \qquad \dots (7.4)$$

gegeben.

Wenn N nicht injektiv war, ist natürlich N^2 erst recht nicht injektiv, d. h. (7.2) ist dann nicht eindeutig lösbar. Jedoch genügt es, eine Lösung k von (7.2) zu finden, denn jede Lösung k von (7.2) führt nach Abschnitt 2.1. auf dasselbe x.

Ist H_1 endlichdimensional, so gestattet der Gaußsche Algorithmus (in sinnvoller Formulierung) die Berechnung einer Lösung k von (7.2), wobei entsprechend dem Defekt von N^2 einige Nullzeilen entstehen und dafür entsprechende Komponenten von k nullgesetzt werden. Gleichzeitig kann damit ein fastsinguläres Verhalten von N oder N^2 abgefangen werden, indem man eine „Nullzeilentoleranz" vorgibt. Es empfiehlt sich daher immer, beim vermittelnden Ausgleich 2.3 oder eine andere derartige Lösung anzuwenden, die ein schwach singuläres Verhalten von N abfängt.

2.4 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Wir behandeln nun den Fall weiter, bei dem mit $K \neq 0 \neq P$ $\|x\|_{1,K}{}^2 + \|v\|_{2,P}{}^2 =$ Minimum gefordert wird. Eliminiert man aus den Gleichungen (4) k, so entsteht

$$(K + A^T P A)\, x = A^T P\, \mathfrak{l}. \qquad \dots (8)$$

Wegen $K + A^T P A \in S(H_1)$ ist die Weiterbehandlung von (8) aber nur für $\dim H_1 < \infty$ sinnvoll. Wir denken bei 2.4 aber auch daran, daß H_1 nicht endlichdimensional ist, z. B. wenn wir das Restpotential x aus fehlerhaften Schwereanomalien $\mathfrak{l}$ ermitteln wollen. Andererseits wird aber der Meßraum H_2 in fast allen Anwendungen ein geeigneter $\mathbf{R}^n$ sein, so daß es verlockend ist, die Ausgleichung soweit wie möglich in H_2 zu verlegen.

Daß dies aufgrund der notwendigen Bedingungen (4) möglich ist, ergibt sich aus (4), wenn wir P, K bijektiv voraussetzen, denn dann folgt aus $x = K^{-1} A^T k$, $v = -P^{-1} k$, $Ax = \mathfrak{l} + v$ durch Einsetzen von x, v in die dritte Gleichung

$$(P^{-1} + A K^{-1} A^T)\, k = \mathfrak{l}, \qquad \dots (9)$$

wobei sich jetzt (9) in H_2 abspielt.

Wir hätten jetzt (9) im Hinblick auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung zu untersuchen. Nach einer Idee von T. Krarup (Krarup, S. 41) läßt sich das in 2.4 aufgeworfene Problem aber auf 2.1 zurückführen. Dazu statten wir $H_\pi := H_1 x H_2$ mit dem durch $\langle (x, v), (x', v')\rangle_\pi := \langle x, x'\rangle_1 + \langle v, v'\rangle_2$ definierten Skalarprodukt aus, das die durch $\|(x, v)\|_\pi{}^2 = \|x\|_1{}^2 + \|v\|_2{}^2$ gegebene Norm $\| \ \|_\pi$ induziert; diese erzeugt aber auf H_π gerade die Produkttopologie, so daß $(H_\pi, \langle\ \rangle_\pi)$ Hilbertraum ist (Floret/Wloka, S. 35, 1.3). Mit $A_\pi: H_\pi \to H_2$, $(x, v) \to A_\pi(x, v) := Ax - v$ stellt sich die Ausgangsgleichung $Ax = \mathfrak{l} + v$ in der Form $A_\pi(x, v) = \mathfrak{l}$ dar; überdies sieht man sofort, daß A_π linear, stetig, surjektiv ist, sodaß trivialerweise die für den Interpolationsfall 2.1 notwendige Voraussetzung $\mathfrak{l} \in R(A_\pi)$ erfüllt ist.

Die Forderung $||x||_{1,K}{}^2 + ||v||_{2,P}{}^2 =$ Minimum bekommt man folgendermaßen in das Schema von 2.1: es sei $K_\pi: H_\pi \to H_\pi$ erklärt durch $K_\pi(x, v) := (Kx, Pv)$; offenbar ist K_π linear, stetig, selbstadjungiert, und wegen $\langle K_\pi(x, v), (x, v)\rangle_\pi =$ $= \langle (Kx, Pv), (x, v)\rangle_\pi = \langle Kx, x\rangle_1 + \langle Pv, v\rangle_2 \geqq 0$ für $P \geqq 0$, $K \geqq 0$ ist K_π auch positiv, also $0 \leqq K_\pi \in S(H_\pi)$. Ferner ist $||(x, v)||_{K_\pi}{}^2 = ||x||_{1,K}{}^2 + ||v||_{2,P}{}^2$, sodaß wir das Problem von 2.4 in

$$A_\pi(x, v) = \mathfrak{l},\ ||(x, v)||_{K_\pi} = \text{Minimum},$$

also in die Ausgangssituation von 2.1 umgeschrieben haben.

Von 2.1 übernehmen wir die Lösung. Sofern K_π bijektiv ist und $A_\pi K_\pi{}^{-1} A_\pi{}^T$ abgeschlossenen Wertebereich hat, ist sie eindeutig bestimmt, und durch $A_\pi K_\pi{}^{-1} A_\pi{}^T k = \mathfrak{l}$, $(x, v) = K_\pi{}^{-1} A_\pi{}^T k$ gegeben. Nun ist K_π bijektiv genau dann, wenn P und K bijektiv sind, und wenn dies zutrifft, ist $K_\pi{}^{-1}$ durch $K_\pi{}^{-1}(x, v) = (K^{-1}x, P^{-1}v)$ gegeben. Ferner rechnet man leicht

$$A_\pi K_\pi{}^{-1} A_\pi{}^T = P^{-1} + AK^{-1}A^T$$

aus, sodaß wir zusammenfassen können:

Seien $(H_i, \langle\ \rangle_i)$, $i = 1, 2$ *Hilberträume über* $\mathbf{R}$, $0 \leqq K \in S(H_1)$ *bijektiv*, $0 \leqq P \in S(H_2)$ *bijektiv*, $A \in L(H_1, H_2)$ *und* $P^{-1} + AK^{-1}A^T$ *mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung* $Ax = \mathfrak{l} + v$ *unter der Forderung* $||x||_{1,K}{}^2 + ||v||_{2,P}{}^2 =$ *Minimum für jedes* $\mathfrak{l} \in H_2$ *genau eine Lösung* $(x, v) \in H_1 x H_2$, *und diese ist aus dem Gleichungssystem*

$$(P^{-1} + AK^{-1}A^T)\,k = \mathfrak{l}, \qquad \dots (10.1)$$

$$v = -P^{-1}k, \qquad \dots (10.2)$$

$$x = K^{-1}A^T k \quad \text{gegeben} \qquad \dots (10.3)$$

Nach 2.1 ist nun nichts mehr zu zeigen. (10.1) läßt sich, falls H_2 endlichdimensional ist, als Matrizengleichung lösen, ebenso (10.2). Erst bei (10.3) folgt der Interpolationsschritt nach H_1. Bei den oben getroffenen Voraussetzungen über P, K gilt für $N := P^{-1} + AK^{-1}A^T$ $0 < N \in S(H_2)$, sodaß N injektiv und wegen des abgeschlossenen Wertebereichs bijektiv ist. Mit $B := PAK^{-1}A^T$ schreibt sich $N =$ $= P^{-1}(I + B)$, sodaß also auch $I + B$ bijektiv ist; sofern also $||B|| < 1$ ist, hat man $N^{-1} = (I + B)^{-1}P = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B^n P$; für $K = I_1$ kann man also dann die Interpolationsaufgabe ohne Inversion lösen.

3.0 Beispiel

Wir entwickeln erst das Beispiel zu einer gewissen Reife, bevor wir in 3.i die zu 2.i, $i = 1, \dots, 4$ passenden Ausgleichungsfälle darlegen.

Es sei $R > 0$ der „Erdradius", $|\ |$ die Quadratsummennorm in $\mathbf{R}^3$, $S_R :=$ $= \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = R\}$ die R-Sphäre um 0, $K_R := \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < R\}$ die offene R-Kugel um 0 und $\complement K_R$ das Komplement von K_R in $\mathbf{R}^3$. Mit $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ bezeichnen wir den **R**-Vektorraum der in $\complement \overline{K}_R$ harmonischen und in $\complement K_R$ stetigen und in ∞ regulären Funktionen. Die Abbildung $x : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,

$$(r, \vartheta, \lambda) \to x(r, \vartheta, \lambda) := (r \sin \vartheta \cos \lambda, r \sin \vartheta \sin \lambda, r \cos \vartheta) \qquad \ldots (11)$$

vermittelt uns Kugelkoordinaten r, ϑ, λ. Insbesondere ist dann $x(R, \ , \ ):$ $: [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to S_R$ eine Parametrisierung von S_R. Mit h_1, $h_2 \in \varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ ist dann durch

$$\langle h_1, h_2 \rangle_1 := \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} h_1(x(R, \vartheta, \lambda))\, h_2(x(R, \vartheta, \lambda)) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda \qquad \ldots (12)$$

ein Skalarprodukt für $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ gegeben, denn $\|h\|_1 > 0$ impliziert $h \mid S_R \neq 0$ und dies wegen der eindeutigen Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe $h \neq 0$.

Bekanntlich sind die durch (Heiskanen und Moritz, S. 31)

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_n{}^m \\ \psi_n{}^m \end{matrix} \right\} (x(r, \vartheta, \lambda)) := z_n{}^m \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n{}^m(\cos \vartheta) \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda \ , \ m = 0, \ldots, n, \\ \sin m\lambda \ , \ m = 1, \ldots, n, \end{matrix} \right\} n \in \mathbf{N}_o \qquad \ldots (13)$$

definierten Funktionen $\varphi_n{}^m$, $\psi_n{}^m$ aus $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ und mit

$$z_n{}^m := \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2 - \delta_{mo}) \right]^{1/2} \qquad \ldots (13')$$

sind sie in $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ bzgl. $\langle \ \rangle_1$ orthonormal. Für $n \in \mathbf{N}_o$ sei $B_n := \{\varphi_n{}^m : m = 0, \ldots, n\}$ $\{\psi_n{}^m : m = 1, \ldots, n\}$, $\varkappa_n := LH(B_n)$. Dann ist $\varkappa_n$ ein Unterraum von $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ der Dimension $2n + 1$, und es gilt $\varkappa_n \perp \varkappa^m$ für $n \neq m$. Für $N \in \mathbf{N}_o$ setzen wir $H_{1N} := \bigoplus_{n=0}^{N} \varkappa_n$; dann ist $\dim H_1{}^N = \sum_{n=0}^{N} (2n + 1) = (N + 1)^2 =: u$, also $H_1{}^N \cong \mathbf{R}^u$. Trivialerweise sind die Räume $\varkappa_n$, $H_1{}^N$ mit $\langle \ \rangle_1$ Hilberträume über **R**, und B_n, $B_N := \bigcup_{n=0}^{N} B_n$ sind Orthonormalbasen.

$H_1{}^N$ wird für ein geeignetes N in unserem Beispiel der Raum H_1 der Unbekannten, wir sehen ihn deshalb etwas genauer an. Die Isomorphie zwischen $H_1{}^N$ und $\mathbf{R}^u$ kann z. B. durch $\varphi : H_1{}^N \to \mathbf{R}^u$, $h \to \varphi(h) := (\langle h, b \rangle_1)_{b \in B_N}$ dargestellt werden. Für Interpolationszwecke ist aber ein anderer Isomorphismus wichtiger, dem wir uns jetzt in zwei Schritten nähern. Zunächst definieren wir die Abbildung $k_N : \complement K_R \times \complement K_R \to \mathbf{R}$,

$$(x, x') \to k_N(x, x') := \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{n} [\varphi_n{}^m(x)\, \varphi_n{}^m(x') + \psi_n{}^m(x)\, \psi_n{}^m(x')]. \qquad \ldots (14)$$

Mit dem „Additionstheorem“ (vgl. Heiskanen und Moritz, S. 33) läßt sie sich in der Form

$$k_N(x, x') = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R^2}{|x|\,|x'|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x.x'}{|x|\,|x'|} \right) \qquad \ldots (14')$$

schreiben und man sieht für $x, x' \in \complement K_R$

$$k_N(x, x') = k_N(x', x), \qquad \ldots (14.1)$$

$$k_N(\ , x') \in H_1^N, \qquad \ldots (14.2)$$

$$h \in H_1^N \Rightarrow \langle h(x'), k_N(\ , x')\rangle_1 = h, \qquad \ldots (14.3)$$

wenn wir vereinbaren, daß in derartigen Situationen über die zweimal vorkommende Variable zu integrieren ist.

Für $n \in \mathbf{N}$ und $M_n := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \complement K_R$ ist die durch

$$(k_N[x_i, x_j])_{i,j=1,\ldots,n}$$

definierte Matrix symmetrisch und positiv semidefinit, denn sie kann mit der Definition von k_N formal als dyadisches Produkt geschrieben werden. Dabei stand bis jetzt n nicht in Beziehung zu u. Jetzt behaupten wir für $n = u$: Es gibt $M_u = \{\xi_1, \ldots, \xi_u\} \subset \complement K_R$, sodaß die Matrix

$$(k_N[\xi_i, \xi_j])_{i,j=1,\ldots,u} \qquad (u = [N+1]^2)$$

positiv definit und damit regulär ist. Der Beweis ist trivial, beruht auf der linearen Unabhängigkeit von B_N, und sei dem Leser überlassen. Ist $M_u = \{\xi_1, \ldots, \xi_u\}$ gefunden, sodaß $K := (k_N[\xi_i, \xi_j])_{i,j}$ regulär ist, so stellt $\{k_N(\ , \xi_i) : i = 1, \ldots, u\}$ eine Basis von H_1^N dar, die natürlich nicht orthonormal ist. Damit ist der oben erwähnte Isomorphismus durch die Restriktionsabbildung $R: H_1^N \to \mathbf{R}^u$, $k \to Rh := h \mid M_u = (h[\xi_i])_{i=1,\ldots,u}$ gegeben. Offenbar ist R linear und damit stetig. R ist injektiv, wenn es zu $y \in \mathbf{R}^u$ höchstens ein $h \in H_1^N$ gibt mit $Rh = y$; dies zeigen wir: jedes $h \in H_1^N$ läßt mit der oben erwähnten Basis in der Form $h = \sum_{j=1}^{u} a_j k_N(\ , \xi_j)$ darstellen. Dann besagt die Gleichung $Rh = y$, nichts anderes als $\alpha K = y$, und da K regulär ist, ist sie durch $\alpha = yK^{-1}$ gelöst, oder ausführlich durch

$$h = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{u} k_N^{(-1)}(\xi_i, \xi_j)\, y_i k_n(\ , \xi_j),$$

womit auch

$$R^{-1}: \mathbf{R}^u \to H_1^N,\ y \to R^{-1}y = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{u} k_N^{(-1)}(\xi_i, \xi_j)\, y_i\, k_N(\ , \xi_j)$$

bekannt ist, wobei wir für K^{-1} $(k_N^{(-1)}[\xi_i, \xi_j])_{i,j=1,\ldots,u}$ geschrieben haben.

In der Praxis ist die Menge der Meßstellen $M_N = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \complement K_R$ sicher nicht so angeordnet, daß $n = u$ gilt und $(k_N(x_i, x_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ regulär wird; diese Matrix wird dann in der Regel nur echt semidefinit sein: durch $h \mid M_n = (h[x_i])_{i=1,\ldots,n}$ kann man dann unter Umständen viele oder gar kein $h \in H_1^N$ durchlegen und das Bedürfnis nach einer Methode, die eine eindeutige Lösung gestattet, entsteht. Hinzu kommt aber noch etwas:

Obwohl man durch Nivellement in Verbindung mit Schweremessungen das Restpotential — abgesehen von einer globalen Konstanten — in den Punkten von M_n ermitteln kann, möchte man das Restpotential auch aus Schwereanomalien in den Punkten von M_n interpolieren können. Dazu betrachten wir den Operator $L := -|x|\frac{\partial}{\partial|x|} - 2 = -r\frac{\partial}{\partial r} - 2$, der das Restpotential in sphärischer Approximation auf die harmonisierten Schwereanomalienfunktion, gegeben durch $|x|\,\Delta g\,(x)$, abbildet. Auf $\varkappa_{\text{reg}}(\complement K_R)$ ist L offenbar nur ein Endomorphismus, aber auf unserem schönen Beispielraum $H_1{}^N$ (versehen mit $\langle\ \rangle_1$) ist L natürlich auch stetig. Wir haben also $L \in L\,(H_1{}^N)$; L ist nicht injektiv (und damit auch nicht surjektiv), denn es ist für $h \in \varkappa_n$ mit der Darstellung $h\,(x) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} h\left(\frac{x}{|x|}\right)$

$$(Lh)\,(x) = \left(-r\frac{\partial}{\partial r} - 2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} h\left(\frac{x}{|x|}\right) = [(n+1) - 2]\,h\,(x) = (n-1)\,h\,(x),$$

also

$$h \in \varkappa_n \Rightarrow Lh = (n-1)\,h,$$

was zeigt, daß

$$N(L) = \varkappa_1$$

ist.

Wir kommen nun dazu, die Aufgabe zu formulieren. Gegeben sei $n \in \mathbf{N}$, $M_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \complement K_R$. Auf M_n seien die Schwereanomalien $\Delta\,g\,(x_i)$ ermittelt, fehlerhaft oder fehlerfrei. Wir setzen $(|x_i|\,\Delta g\,[x_i])_{i=1,\ldots,n} =: \mathfrak{l} \in \mathbf{R}^n =: H_2 . H_2 = \mathbf{R}^n$ ist also unser Meßraum. Gesucht sind Lösungen $h \in H_1{}^N$ der Gleichung $((Lh)\,(x_i))_{i=1\,\ldots\,n} = \mathfrak{l}$, oder wenn wir die Restriktionsabbildung von $H_1{}^N$ auf M_n mit R_n bezeichnen, also $R_n h := h\,|\,M_n = (h\,(x_i))_{i=1,\ldots,n}$ erklären, mit

$$A := R_n L \in L\,(H_1{}^N, H_2) \qquad \ldots (15)$$

Lösungen von $Ax = \mathfrak{l} + v$. Dabei sollen vorderhand n und $u = (N+1)^2$ in keiner besonderen Beziehung zueinander stehen. Wenn wir jetzt noch eine symmetrische, positiv definite (n, n)-Matrix P wählen, wenn die Schwereanomalien fehlerhaft sind, und $||v||_{2,P}{}^2 = vPv^T$ setzen, und auf der $H_1{}^N$-Seite für $K = I$, haben wir die Ausgangssituation des theoretischen Teils dieses Artikels hergestellt.

3.1 Interpolation in fehlerfreie Messungen

Wir nehmen nun an, $\mathfrak{l}$ sei fehlerfrei, setzen also in $y = \mathfrak{l} + v$ $v = 0$ und haben die Gleichung

$$Ah = y \qquad \text{unter der Forderung } ||x||_1 = \text{Minimum}$$

zu lösen. Aus 2.1 folgt, daß für $y \in R(A)$ die Lösung eindeutig bestimmt ist und aus dem Gleichungssystem $AA^Tk = y$, $h = A^Tk$ gegeben ist. Dies brauchen wir nur noch etwas auszuführen: Wenden wir den Operator L auf die erste (zweite) Variable von k_N an, so machen wir das durch L_1 (L_2) kenntlich. Damit haben wir, wie man sofort nachrechnet, A^T aus

$$A^T : H_2 \to H_1{}^N, \quad k \to A^Tk = \sum_{i=1}^{n} L_1 k_N\,(x_i,\ )\,k_i.$$

Daraus folgt weiter

$$AA^Tk = \left(\sum_{i=1}^{n} L_2 L_1 k_N\,[x_i, x_j]\,k_i\right)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbf{R}^n = H_2.$$

Wenn wir in $\mathbf{R}^n$ die übliche Orthonormalbasis $\{(\delta_{ij})_{j=1..n} \mid i = 1,..,n\}$ und das übliche Skalarprodukt verwenden, können wir die Gleichung

$$AA^Tk = y \text{ mit } k = (k_1,..,k_n),\ M(AA^T) = (L_1L_2k_N(x_i,x_j))_{i,j=1,..,n} =: C$$

in die Matrizengleichung $kC = y$ umsetzen, und wenn k sie löst, ist h aus

$$h = \sum_{i=1}^{n} L_1k_N(x_i,\ )\,k_i$$

gegeben.

Die Matrix C, deren Elemente durch

$$L_1L_2k_N(x_i,x_j) = \sum_{n=0}^{N} (n-1)^2 \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R^2}{|x_i|\,|x_j|}\right)^{n=1} P_n\left(\frac{x_i . x_j}{|x_i|\,|x_j|}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} (n-1)^2 \sum_{m=0}^{n} [\varphi_n{}^m(x')\,\varphi_n{}^m(x') + \psi_n{}^m(x)\,\psi_n{}^m(x')]$$

gegeben sind, ist natürlich symmetrisch und positiv semidefinit, was aus der letzten Formel direkt oder aus $0 \leqq AA^T \in S(H_2)$ ersichtlich ist. Sie muß jedoch nicht positiv definit sein. Denn für $N \geqq 1$ ist $N(A) \subset \varkappa_1$, also A nicht injektiv. Selbst für $N = 0$, $u = (N+1)^2 = 1$ muß C nicht regulär sein: es ist dann nämlich mit

$$w := \left(\frac{R}{|x_1|},\ldots,\frac{R}{|x_n|}\right) \qquad C = \frac{1}{4\pi} w^Tw;$$

wählt man nun z. B. ausgerechnet drei Meßpunkte, also $n = 3$, so findet man zu $w \in \mathbf{R}^3$ ein $k \in \mathbf{R}^3$ mit $k \neq 0$ und $k \perp w$. Dann ist $kCk^T = \ldots = 0$, was zeigt, daß C nicht positiv definit ist.

Die allgemeine Theorie in 3.1 besagt aber, daß AA^T bzw. $M(AA^T) = C$ durchaus nicht injektiv bzw. regulär zu sein braucht, aber trotzdem gemäß $h = A^Tk$ die Lösung h eindeutig bestimmt ist.

3.2 Vermittelnder Ausgleich

Wir nehmen an, daß die Messung $\mathfrak{l}$ für y fehlerhaft sei, setzen also $y = \mathfrak{l} + v$ an, und suchen mit positiv definitem, symmetrischem $P \in M_{nn}{}^{\mathbf{R}}$ Lösungen von $Ah = \mathfrak{l} + v$ unter der Forderung $vPv^T =$ Minimum, wobei $\mathfrak{l}, v \in H_2 = \mathbf{R}^n$ und $h \in H_1{}^N$ ist. Nach 2.2 ist die Lösungsmenge durch

$$T = \{(h, v) \in H_1{}^N x H_2 : A^TPAh = A^TP\mathfrak{l},\ v = Ah - \mathfrak{l}\}$$

gegeben, v eindeutig bestimmt, h hingegen nicht unbedingt.

Sinnvoll ist diese Aufgabe beim vorliegenden Beispiel sicherlich nur dann, wenn wir $(N+1)^2 = u$ sehr viel kleiner als n wählen, z. B. um die groben Züge des Restpotentials zu ermitteln. Da wir mit A^TPA jedoch in $L(H_1{}^N)$ sind, macht das Ausschreiben der Lösungsmenge hier Schwierigkeiten, weil wir noch einmal vom Funktionen-$H_1{}^N$ in einen entsprechenden Basiskoeffizientenraum übersetzen müssen.

Wir beschränken uns daher auf den einfachsten Fall, also

$$N = 0,\ u = 1,\ H_1{}^0 = LH(\varphi_0{}^0),\ \varphi_0{}^0 = \frac{1}{4\pi}\frac{R}{|\ |};$$

dann entspricht die Aufgabenstellung etwa dem Fall, daß anhand des vorhandenen Schwereanomalienmaterials entschieden werden soll, ob die Größe „kM" richtig im Normalpotential (Heiskanen und Moritz, S. 67) angesetzt ist.

Es ist dann mit $h = c\frac{R}{|\ |}$ und $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ $Ah = \left(-c\frac{R}{|x_i|}\right)_{i=1..n}$

$$A^T PA\,h = \frac{c}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{R^2}{|x_i|\,|x_j|}p_{ij}\frac{R}{|\ |} \in H_1{}^0,$$

andererseits

$$A^T P\mathfrak{l} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{R}{|\ |}\frac{R}{|x_i|}p_{ij}\,\mathfrak{l}_j,$$

sodaß sich die Gleichung $A^T PA\,h = A^T P\,\mathfrak{l}$ bezüglich des Basiselementes $\frac{1}{4\pi}\frac{R}{|\ |}$ in die Gleichung

$$c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{R^2}{|x_i|\,|x_j|}p_{ij} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{R}{|x_i|}p_{ij}\,\mathfrak{l}_j$$

übersetzt, die genau dann lösbar ist, wenn der Faktor bei c ungleich Null ist, was bei der positiven Definitheit von P der Fall ist.

3.3 Modifikation des vermittelnden Ausgleichs

Würde man in 3.2 $N = 1$, $u = (N+1)^2 = 4$ wählen, so wäre selbst für positiv definites P $A^T PA$ nicht injektiv, wegen $N(A^T PA) = N(A) \supset \varkappa_1$, und die $A^T PA$ zugeordnete Normalgleichungsmatrix würde singulär; das sogar für beliebiges $n \geqq u = 4$. Bei dem vorliegenden Beispiel weiß man natürlich $N(L) = \varkappa_1$, und wird daher sinnvollerweise $H_1{}^N$ von vornherein ohne $\varkappa_1$ ansetzen, sodaß dieses Problem gar nicht erst erwächst. Allzuoft hat man aber bei einer Ausgleichungsaufgabe von vornherein diesen Einblick nicht, und dann stellt 2.3 doch einen brauchbaren Algorithmus bereit, Fehler zu vermeiden und eine eindeutig bestimmte Lösung zu bekommen.

3.4 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Wir gehen wieder aus von $y = \mathfrak{l} + v$, $0 \leqq P \in S(H_2)$ bijektiv (also praktisch eine symmetrische, positiv definite (n,n)-Matrix), $K = I_1$; dann ist $Ah = \mathfrak{l} + v$ mit der Forderung $||h||_1{}^2 + ||v||_{2,P}{}^2$ eindeutig lösbar und die Lösung $(h,v) \in H_1{}^N x H_2$ durch das Gleichungssystem

$$(P^{-1} + AA^T)\,k = \mathfrak{l},\quad v = -P^{-1}k,\quad x = A^T k$$

bestimmt. Wenn wir die P^{-1} zugeordnete Matrix mit R bezeichnen, setzt sich das um in die Matrizengleichungen

$$k(R + C) = \mathfrak{l},\quad v = -kR$$

und für h haben wir dann wie in 3.1 die Darstellung

$$h = \sum_{i=1}^{n} L_1 k_N(x_i,\ )\, k_i.$$

Dabei bleiben natürlich in Zusammenhang mit der Wahl von P einige Fragen offen. Zunächst folgt aus $0 \leqq P \in S(H_2)$ bijektiv, daß R symmetrisch und positiv definit ist; von 3.1 wissen wir, daß C mindestens positiv semidefinit ist. Also ist $R + C$ symmetrisch, positiv definit, regulär. Das muß auch nach der Theorie von 2.4 so sein.

Andererseits sollte für R die Kovarianzmatrix der harmonisierten Schwereanomalien eingesetzt werden — theoretischen Überlegungen zufolge, die in (Krarup, S. 19, vgl. auch S. 41) ausgeführt sind, also wiederum C. Dann reduziert sich das obige Gleichungssystem aber auf $2kC = \mathfrak{l}$, $v = -kC$; da aber C nicht positiv definit zu sein braucht, vgl. 3.1, ist dadurch wohl h eindeutig bestimmt, nicht aber v, und gegenüber dem aus 3.1 mit der Annahme fehlerfreier Messungen bestimmten h erhalten wir jetzt bei Annahme fehlerhafter Messungen $h_{3.4} = \frac{1}{2} h_{3.1}$. Wenn man also für P^{-1} die „theoretisch richtige" Kovarianzfunktion der harmonisierten Schwereanomalien einsetzt, zeigt diese Überlegung, daß durch die Forderung $||x||_1{}^2 + ||v||_{2,P}{}^2 =$ Minimum zuviel Gewicht auf das Verbessern und zuwenig Gewicht auf das Interpolieren gelegt wird.

Literatur

Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg, Braunschweig 1971.

Floret, K. und *Wloka, J.*: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. LNM Nr. 56, Springer, Berlin 1968.

Heiskanen, W. A. und *Moritz, H.*: Physical Geodesy. Freeman, San Francisco 1967.

Krarup, T.: A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Geod. Inst., Kopenhagen 1969.

Zur Azimutmessung mit Sekundentheodoliten

Von *Gottfried Gerstbach*, Wien

Zusammenfassung

Es wird vorgeschlagen, die Neigungskorrektion von Azimutmessungen mit dem Höhenkreiskompensator anstatt einer Reiterlibelle zu ermitteln. Die Stehachsen der gebräuchlichen Sekundentheodolite (T2, Th2, DKM2-A) sind hiefür von ausreichender Qualität. Probemessungen zeigen, daß schon mit vier Sätzen äußere Genauigkeiten von $\pm 1''$ erreichbar sind.