Paper-ID: VGI_197604

Ein nichtiteratives Verfahren zur Transformation geodätischer Koordinaten

Hans Sünkel [1]

[1] *Institut für Erdmessung und physikalische Geodäsie der Technischen Universität in Graz, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **64** (1), S. 29–33

1976

BibTEX:

```
@ARTICLE{Suenkel_VGI_197604,
Title = {Ein nichtiteratives Verfahren zur Transformation geod{\"a}tischer
   Koordinaten},
Author = {S{\"u}nkel, Hans},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {29--33},
Number = {1},
Year = {1976},
Volume = {64}
}
```

Dies geschieht zum Beispiel durch internationale Einrichtungen, wie das Bureau International de l'Heure, das internationale gravimetrische Büro und verschiedene Institutionen der globalen Satellitengeodäsie, um nur einige Einrichtungen zu nennen.

Damit bekommen die Mitgliedstaaten der IAG Grundlagen für ihre eigene geodätische Arbeit. Sie haben dafür aber auch die Verpflichtung, das ihrige zum gemeinsamen Werk beizutragen.

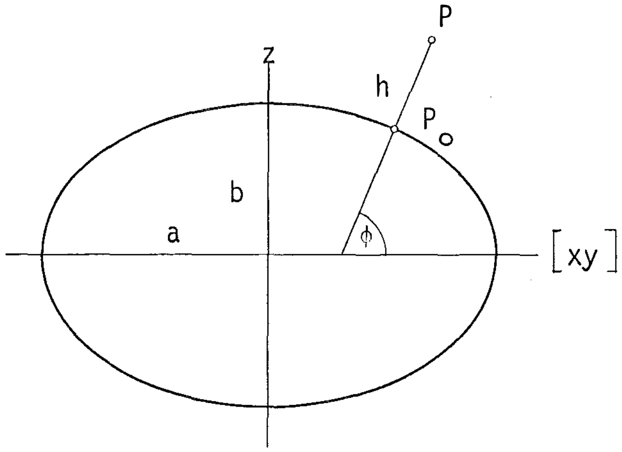
Aufgabe dieses Aufsatzes war es, in die Arbeit der Internationalen Assoziation für Geodäsie einzuführen. Vielleicht können wir jetzt die eingangs gestellte Frage, was Österreich mit der Erdmessung zu tun hat, beantworten und erkennen, daß Österreich in der IAG sinnvoll mitwirken *kann* und sinnvoll mitwirken *muß*.

Ein nichtiteratives Verfahren zur Transformation geodätischer Koordinaten

Von *Hans Sünkel*, Graz

1. Einleitung

Um die rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) eines Punktes P in geodätische Koordinaten (Φ, λ, h) zu transformieren, muß vom Punkt P auf das Bezugsellipsoid eine Normale gefällt werden (Helmertprojektion). Die Richtung dieser Normalen wird dann durch (Φ, λ), der Normalabstand des Punktes P vom Ellipsoid durch h bestimmt.



Φ ... geodätische Breite

λ ... geodätische Länge

h ... geodätische Höhe

Fig. 1

Zur Bestimmung der Höhe h wurden von verschiedenen Autoren sowohl Iterationsverfahren als auch geschlossene Lösungen vorgeschlagen. Von den iterativen Verfahren erscheint mir neben dem von *Hirvonen-Moritz*, 1963, *Heiskanen-Moritz*, 1967, das kürzlich von *Bartelme-Meissl*, 1975, empfohlene vor allem wegen seiner Einfachheit und numerischen Stabilität besonders erwähnenswert. Die geschlossenen Lösungsmethoden *(Ecker*, 1967; *Benning*, 1974; *Paul*, 1973*)* sind entweder durch numerische Instabilitäten oder durch recht komplizierte Ausdrücke gekennzeichnet.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Lösung gezeigt, welche — aufbauend auf einer Lagrangeschen Minimumsaufgabe mit Nebenbedingung — die z-Koordinate des Fußpunktes P_0 durch eine Reihenentwicklung nach e^2 darstellt (e ... 1. Exzentrizität).

2. Lösung der Minimumsaufgabe

Die Bestimmung des Normalabstandes (des kürzesten Abstandes) eines Punktes von einem Rotationsellipsoid kann aus Symmetriegründen in der Meridianebene des Punktes P und damit zweidimensional erfolgen.

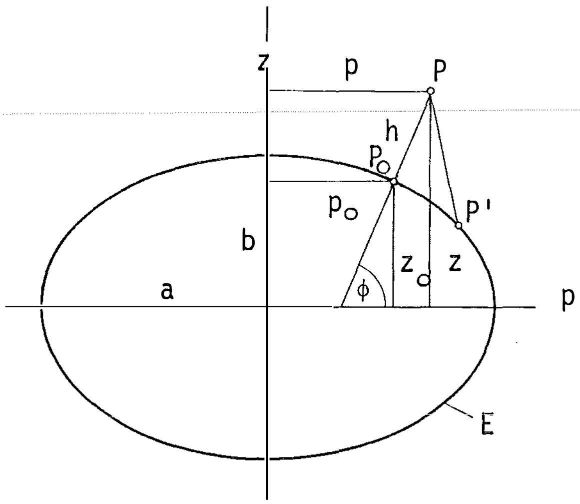


Fig. 2

Im Koordinatensystem (p, z) lautet die Ellipsengleichung

$$b^2 p'^2 + a^2 z'^2 = a^2 b^2 \qquad \ldots (2.1)$$

und der Abstand h

$$h = [(p - p')^2 + (z - z')^2]^{1/2}. \qquad \ldots (2.2)$$

Zur Konkurrenz an der Minimumsbedingung $h = \text{Min.}$ (oder $h^2 = \text{Min.}$) sind alle jene Punkte $P'(p', z')$ zugelassen, welche auf der Meridianellipse E liegen und daher (2.1) erfüllen.

Minimumsbedingung: $F(p', z') := (p - p')^2 + (z - z')^2 = \text{Min.}$ ... (2.3)

Nebenbedingung: $G(p', z') := b^2 p'^2 + a^2 z'^2 - a^2 b'^2 = 0$ ... (2.1)'

Mit $H(p', z', l) := F(p', z') - l\,G(p', z')$ (l ... Lagrange-Multiplikator) ... (2.4)

lauten daher die an P' gestellten Forderungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = 0, \frac{\partial H}{\partial z'} = 0, \frac{\partial H}{\partial l} = 0 \qquad \ldots (2.5)$$

Diese drei Bedingungen führen auf die drei Gleichungen

$$(p - p') + \lambda b^2 p' = 0 \qquad \ldots (2.6\,a)$$

$$(z - z') + \lambda a^2 z' = 0 \qquad \ldots (2.6\,b)$$

$$b^2 p'^2 + a^2 z'^2 - a^2 b^2 = 0. \qquad \ldots (2.1)'$$

Nach Eliminierung von l erhalten wir über einige Umformungen schließlich eine Gleichung 4. Grades in z'; jener Punkt P', der diese Gleichung erfüllt, ist der Fußpunkt $P_0\,(p_0, z_0)$:

$$(1 - e^2)\,\bar{z}^2 + 2e^2\,(1 - e^2)\,\bar{z}_0\bar{z} + \bar{z}_0{}^2\,[e^4 - \bar{z}^2\,(1 - e^2) - \bar{p}^2] - 2e^2\,\bar{z}_0{}^3\,\bar{z} + \\ + \bar{z}_0{}^4\,(e^2 - e'^2) = 0$$

$$(\bar{z} := \frac{z}{a}, \bar{z}_0 := \frac{z_0}{a}) \qquad \ldots (2.7)$$

Damit ist die Minimumsaufgabe formal gelöst und unsere weiteren Untersuchungen gelten der Behandlung der Gleichung (2.7).

3. *Lösung durch Reihenentwicklung*

Die Lösung obiger Gleichung (2.7) in sphärischer Approximation ($e = 0$) ist sehr einfach und liefert

$$\bar{z}_0{}^s = \frac{\bar{z}}{\bar{r}}. \qquad \ldots (3.1)$$

Da sich aber das Bezugsellipsoid von einer Kugel nur geringfügig unterscheidet ($e^2 \approx 7 \,.\, 10^{-3}$), ist es doch naheliegend, die ellipsoidische Größe $\bar{z}_0$ durch eine Reihenentwicklung nach e^2 darzustellen, in der das erste Reihenglied die sphärische Größe $\bar{z}_0{}^s$ darstellt:

Ansatz: $$\bar{z}_0 = \frac{\bar{z}}{\bar{r}}(1 - a_2 e^2 - a_4 e^4 - a_6 e^6 - a_8 e^8 - \ldots) \qquad \ldots (3.2)$$

Um die Koeffizienten der Linearkombination $a_{2i}\,(i \in \mathbb{N})$, welche Funktionen von $\bar{z}$ und $\bar{r}$ sind, bestimmen zu können, setzen wir (3.2) in (2.7) ein und erhalten unter Beachtung von

$$e^2 - e'^2 = -(e^4 + e^6 + e^8 + \ldots)$$

die nach Potenzen von e^2 geordnete Gleichung

$$c_2 e^2 + c_4 e^4 + c_6 e^6 + c_8 e^8 + \ldots = 0 \qquad \ldots (2.7)'$$

Die Koeffizienten c_{2i} sind so beschaffen, daß sie den jeweiligen Koeffizienten a_{2i} in linearer Form enthalten, während $a_{2i-2k}\,(k \in \mathbb{N})$ auch nichtlinear auftreten. Es ist daher sehr einfach, aus (2.7)' durch Koeffizientenvergleich von e^{2i} sukzessive alle a_{2i} zu bestimmen:

$$2a_2 = 2 - \frac{2}{\bar{r}} - \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} + \frac{2\,\bar{z}^2}{\bar{r}^3} \qquad \ldots (3.3\,a)$$

$$2a_4 = (-1 + \frac{2}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^4}) + 2a_2\,(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} - \frac{3\,\bar{z}^2}{\bar{r}^3}) + a_2{}^2 \qquad \ldots (3.3\,b)$$

$$2a_6 = \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^4} - 2a_2\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{2\bar{z}^2}{\bar{r}^4}\right) + 2a_4\left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} - \frac{3\bar{z}^2}{\bar{r}^3}\right) -$$
$$- a_2{}^2\frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{6}{\bar{r}}\right) + 2a_2a_4 \qquad \ldots (3.3c)$$

$$2a_8 = \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^4} - 2a_2 \cdot \frac{2\bar{z}^2}{\bar{r}^4} - \frac{a_2{}^2}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{6\bar{z}^2}{\bar{r}^2}\right) - 2a_4\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{2\bar{z}^2}{\bar{r}^4}\right) +$$
$$+ 2a_6\left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} - \frac{3\bar{z}^2}{\bar{r}^3}\right) - 2a_2a_4\frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{6}{\bar{r}}\right) - a_2{}^3 \cdot \frac{2\bar{z}^2}{\bar{r}^3} +$$
$$+ a_4{}^2 + 2a_2a_6 \qquad \ldots (3.3d)$$

Damit erhalten wir mit (3.2) die z-Koordinate des Fußpunktes P_0:

$$z_0 = a\frac{z}{r}\left(1 - \sum_{i=1}^{4} a_{2i}\, e^{2i}\right) \qquad \ldots (3.2)'$$

Wegen der sehr guten Konvergenz wurde die Reihe bereits nach dem 4. Glied abgebrochen.

Mit

$$p_0 = a\left[1 - \left(\frac{z_0}{b}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \ldots (3.4)$$

können somit die Koordinaten (Φ, λ, h) unmittelbar aus den Transformationsformeln [(1.13) bzw. (1.4), *Hirvonen-Moritz*, 1963] bestimmt werden:

$$\Phi = \tan^{-1}\left[\frac{z_0}{p_0\,(1 - e^2)}\right] \qquad \ldots (3.5)$$

$$\lambda = \sin^{-1}\left(\frac{y}{p}\right) \qquad \ldots (3.6)$$

$$h = (z - z_0)\left[1 + \left(\frac{p - p_0}{z - z_0}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \ldots (3.7)$$

4. *Diskussion der Ergebnisse*

Untersucht man die Koeffizienten a_{2i} näher, so findet man eine grobe Abschätzung ihrer Wertbereiche für den gesamten Außenraum:

$$0 \leqslant \frac{z}{r}a_2 \leqslant 0{,}54 \qquad 0 \leqslant \frac{z}{r}a_6 \leqslant 0{,}12$$

$$0 \leqslant \frac{z}{r}a_4 \leqslant 0{,}23 \qquad 0 \leqslant \frac{z}{r}a_8 \leqslant 0{,}07$$

Gibt man sich mit der Lagegenauigkeit von 1 mm (!) zufrieden, so ist der Koeffizient a_8 bereits überflüssig; eine Genauigkeit von 20 cm erreicht man schon mit a_2 und a_4!

Das vorgeschlagene Verfahren ist auf Grund der geringen Schwankungen von a_{2i} (sowohl hinsichtlich Breitenlage als auch Entfernung des Punktes P vom Ellipsoid) und wegen der vorteilhaften Größenordnung ($0 \leqslant a_{2i} \leqslant 1$) numerisch äußerst stabil.

Die angegebenen Formeln sind leicht überschaubar, einfach im Aufbau und leicht zu programmieren.

Literaturverzeichnis

Bartelme, N. und *P. Meissl* (1975): Ein einfaches, rasches und numerisch stabiles Verfahren zur Bestimmung des kürzesten Abstandes eines Punktes von einem sphäroidischen Rotationsellipsoid. AVN 12/1975, Wichmann, Karlsruhe.

Benning, W. (1974): Der kürzeste Abstand eines in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Außenpunktes vom Ellipsoid. AVN 11/1974, Wichmann, Karlsruhe.

Ecker, E. (1967): Die Normalenfällung auf das Ellipsoid. ÖZfV 55 (1967) Nr. 3.

Heiskanen, W. A. and *H. Moritz* (1967): Physical Geodesy. W. H. Freeman & Co., San Francisco.

Hirvonen, R. A. and *H. Moritz* (1963): Practical Computation of Gravity at High Altitudes. Report No. 27, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Paul, M. K. (1973): A Note on Computation of Geodetic Coordinates from Geocentric (Cartesian) Coordinates. Bulletin Géodésique No. 108/1973, Paris.

Druckfehlerberichtigung

Im Artikel „Grenzlinien auf dem Bodensee", von F. Meckel, wurde im Heft 4 des 63. Jahrganges der ÖZfVuPh auf Seite 164 als Folge eines Druckfehlers die Länge der Staatsgrenze Österreichs versehentlich mit 2367 km statt richtig 2637 km angegeben. Wir bitten um Entschuldigung.

Die Schriftleitung

Mitteilungen

Bericht über eine Sitzung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

Am 7. November 1975 trat an der Technischen Universität Wien die ÖKIE zu ihrer ersten Sitzung nach der Generalversammlung der UGGI in Grenoble zusammen. Sechzehn der neunzehn Mitglieder waren anwesend, die übrigen entschuldigt. Unter den zahlreichen wichtigen Themen der Tagesordnung waren zweifellos die bedeutendsten die Wahl des Präsidenten für die nächste Funktionsperiode, die Diskussion der Statuten der ÖKIE und der Stand der Geoidforschung in Österreich.

In seinem Bericht gab der amtierende Präsident Prof. *Hauer* einen Überblick über die Aktivitäten der Kommission. Demnach haben sich die Mitglieder *Embacher* und *Rinner* mit ihren Instituten aktiv an der Messung der Meridiantraverse Italien—Österreich—BRD beteiligt. Von der italienischen Meßgruppe wurden an fünf Stationen Lotabweichungsbestimmungen mit einer transportablen Zenitkammer durchgeführt.

Zu der Generalversammlung der UGGI in Grenoble vom 18. August bis 6. September 1975 hatte die Kommission unter dem Chefdelegierten *Moritz* die Mitglieder *Bretterbauer*, *Meissl*, *Mitter*, *Rinner* und *Scheidegger* für je eine Woche entsandt. Die österreichische Delegation konnte mit großen Ehrungen heimkehren: *Moritz* wurde zum 1. Vizepräsidenten der Internationalen Assoziation für Geodäsie (Präsident *Kukkamäki*, Finnland) gewählt und in seiner bisherigen Funktion als Vor-