



## Zur Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes mit Hilfe elektronischer Rechner

Günter Wagensommerer <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Allgemeine Geodäsie an der Technischen Hochschule Wien, A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **63** (1), S. 23–30

1975

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Wagensommerer_VGI_197504,
  Title = {Zur Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes mit Hilfe
    elektronischer Rechner},
  Author = {Wagensommerer, Günter},
  Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und
    Photogrammetrie},
  Pages = {23--30},
  Number = {1},
  Year = {1975},
  Volume = {63}
}
```



### 3.1 Österreichische Karte (ÖK)

Für diese Aufstellung ist die Blockausgleichung der im BAfEuV praktizierten Streifentriangulation gegenüberzustellen. Unter Berücksichtigung der instrumentellen Ausstattung des BAfEuV wird angenommen, daß die Einzelmodellmessung für den Block in Analogauswertegeräten erfolgt.

### 3.2 Einschaltpunkte (EP)

Für die Verdichtung eines bestehenden Triangulierungsnetzes V. Ordnung durch Einschaltpunkte kann man zur Zeit zwischen zwei terrestrischen und zwei photogrammetrischen Verfahren wählen:

- a) trigonometrische Methode,
- b) Polygonalmethode mit Entfernungsmeßgerät,
- c) numerische, photogrammetrische Einzelmodellauswertung,
- d) photogrammetrische Blocktriangulation.

Während die ersten drei Möglichkeiten im BAfEuV eingesetzt werden, wurde die photogrammetrische Blockausgleichung von dieser Stelle bis jetzt nicht verwendet. Da die Ausführungen des Abschnittes 2.2 zeigten, daß dieses Verfahren hinsichtlich der nötigen Genauigkeit auf jeden Fall konkurrenzfähig ist, muß im folgenden noch die Wirtschaftlichkeit dieser neuen Methode belegt werden.

Bei der EP-Bestimmung mittels Blocktriangulation ist zu unterscheiden, ob die photogrammetrischen Messungen in Analoggeräten oder Komparatoren durchgeführt werden. Untersuchungen über den Vorteil zwischen diesen beiden Meßmöglichkeiten ergaben, daß bei Modellen mit weniger als 40 bis 50 Punkten die Stereokomparatormessungen wirtschaftlicher sind (*Ackermann* 1972). Da bei EP-Operaten sicher weniger als 40 Punkte pro Modell zu messen sind, wird in den nachfolgenden Ausführungen zwischen der Datenerfassung durch Analoggeräte und Komparatoren für die Blockausgleichung unterschieden. Die Einzelmodellauswertung, wie sie im BAfEuV praktiziert wird, ist die Grundlage für den Aufwandsvergleich. Dazu wird diese Methode einmal mit den terrestrischen Verfahren und einmal mit den verschiedenen Möglichkeiten der Blocktriangulierung verglichen. Wegen weiterer Details zu diesem Fragenkomplex wird auf die Originalarbeit verwiesen (*Otepka* 1974).  
(Schluß folgt)

## Zur Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes mit Hilfe elektronischer Rechner

Von *Günter Wagensommerer*, Wien

Beim Studium der Fachliteratur über Abhandlungen zur Auflösung des Rückwärtsschnittes könnte man den Eindruck gewinnen, eine kaum erfaßbare Anzahl von Lösungen vor sich zu haben. Die Frage nach der tatsächlichen Anzahl der Lösungswege ist nach [1] darin zu finden, daß diese jeweils aus bestimmten Hilfs-

figuren geometrisch anschaulich abgeleitet werden können. Sie lassen sich in vier Gruppen teilen, und zwar:

1. Collins-Hilfsdreiecke,
2. Cassini-Hilfsdreiecke,
3. Reziproke Hilfsdreiecke,
4. Reziproke Grunddreiecke.

Alle Lösungen, welche im gleichen Hilfsdreieckstyp geometrisch deutbar sind, gehören der gleichen Gruppe an.

Der Grund für die Vielzahl der Lösungsvorschläge liegt sicher auch darin, daß dem Vermessungsingenieur bis heute die verschiedensten Rechenhilfsmittel zur Verfügung standen und für diese die günstigsten Berechnungsmethoden gesucht und gefunden wurden [2].

Lange Zeit stand bei der Durchführung eines Rückwärtsschnittes der geringen Feldarbeit ein beträchtlicher Rechenaufwand gegenüber, der durch den Einsatz elektronischer Rechner auf ein Minimum reduziert werden konnte. Im folgenden soll ein Lösungsweg vorgeschlagen werden, der sich bestens zur Programmierung vor allem solcher Rechner eignet, welche fest verdrahtete Funktionen zur Umrechnung rechtwinkliger in polare Koordinaten bzw. umgekehrt besitzen. Sollte ein Rechner über diese Funktionen nicht verfügen, so ist eine Erstellung von Subroutinen (Unterprogrammen) für diese Umrechnungen sinnvoll. Da ein großer Prozentsatz geodätischer Berechnungen in Koordinaten erfolgt und damit diese Unterprogramme häufig gebraucht werden, läßt sich bei der Erstellung einer geodätischen Programmbibliothek viel Speicherplatz sparen [3].

Um diese Koordinatentransformationen voll auszunützen, war es notwendig, eine Lösung für den Rückwärtsschnitt zu finden, welche eine fortgesetzte Anwendung der ersten bzw. zweiten geodätischen Hauptaufgabe gestattet.

Im wesentlichen bedient sich der folgende Algorithmus der Cassinischen Hilfsdreiecke in etwas anderer Anordnung.

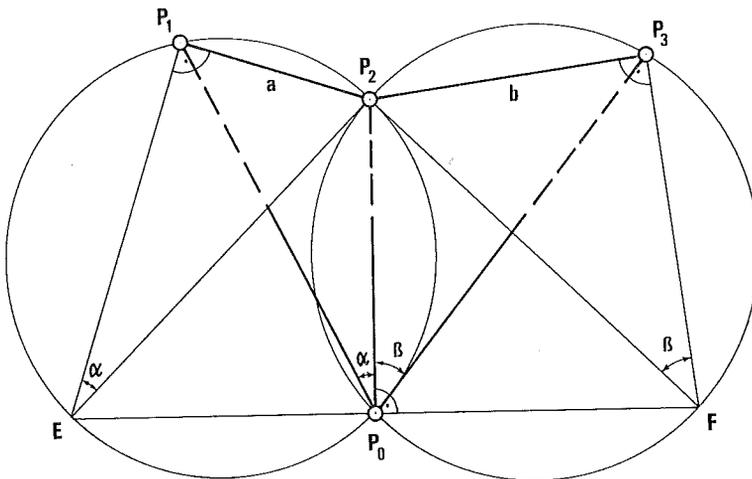


Abb. 1

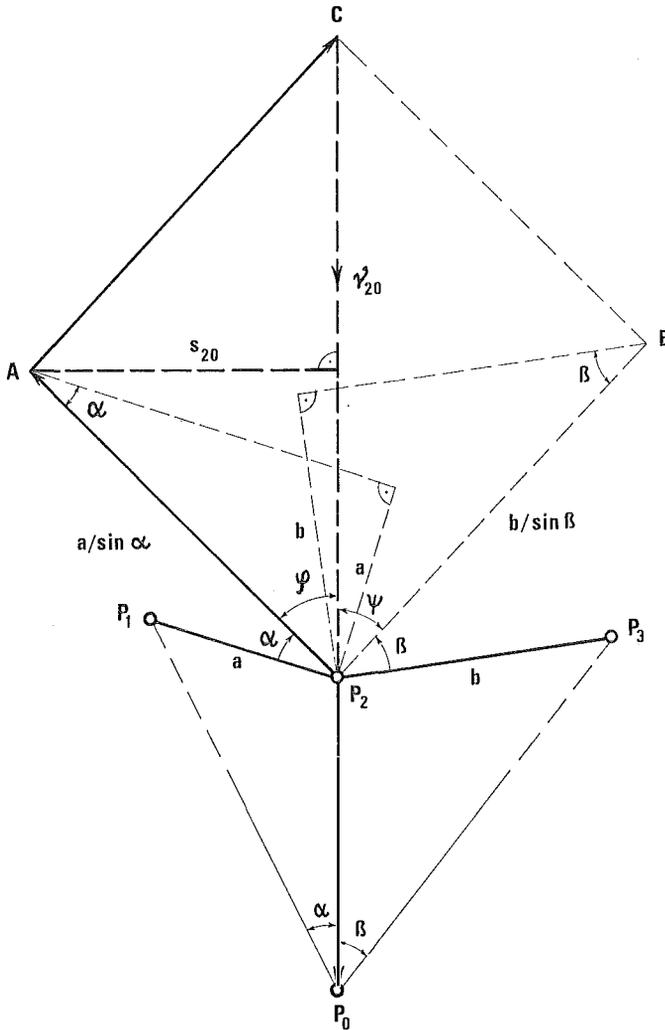


Abb. 2

Das Dreieck  $EP_2F$  (Abb. 1) und das Dreieck  $P_2AC$  (Abb. 2) sind kongruent. Es soll zunächst der konstruktive Lösungsweg beschrieben werden, welcher anhand von Abb. 2 verfolgt werden kann:

1. Zur Richtung  $P_2P_1$  wird der gemessene Winkel  $\alpha$  addiert und auf dem so gefundenen Richtungsstrahl die Entfernung  $a/\sin \alpha$  mittels eines rechtwinkligen Hilfsdreieckes abgeschlagen. Dadurch erhält man den Hilfspunkt  $A$ .

2. Subtrahiert man graphisch von der Richtung  $P_2P_3$  den gegebenen Winkel  $\beta$ , erhält man analog zu 1. durch Abschlagen der Entfernung  $b/\sin \beta$  den Hilfspunkt  $B$ .

3. Durch vektorielle Addition der derart gefundenen Größen  $\overrightarrow{P_2A}$  und  $\overrightarrow{P_2B}$  kann der Hilfspunkt  $C$  ermittelt werden.

Die Verbindung dieses Punktes  $C$  mit dem Punkt  $P_2$  ergibt die Richtung zum Neupunkt und die noch fehlende Entfernung  $s_{20}$  erhält man, indem von  $A$  oder  $B$  aus das Lot auf die Verbindung  $CP_2$  gefällt wird.

Wonach die Lösung des Rückwärtsschnittes auf fortgesetztes Berechnen von Polarpunkten zurückgeführt wäre und damit vorzüglich zur Programmierung mit den Funktionen zur Umrechnung rechtwinkliger in polare Koordinaten bzw. umgekehrt geeignet ist.

Zur weiteren Veranschaulichung der in Abb. 2 dargestellten Konstruktion soll nun auch der ihr entsprechende Berechnungsgang im einzelnen erläutert werden. Dieser Lösungsweg wurde auch schon bei der Erstellung von Ablaufbeschreibungen für den Taschenrechner Hewlett-Packard HP 45 besungen [4].

1) Berechnung der Richtungswinkel und Seiten zwischen den Punkten  $P_2$ ,  $P_1$  und  $P_2$ ,  $P_3$ :

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= \arctan \frac{\Delta y_{21}}{\Delta x_{21}} & s_{21} &= a = \sqrt{\Delta y_{21}^2 + \Delta x_{21}^2} \\ \nu_{23} &= \arctan \frac{\Delta y_{23}}{\Delta x_{23}} & s_{23} &= b = \sqrt{\Delta y_{23}^2 + \Delta x_{23}^2} \end{aligned}$$

2) Berechnung der Hilfspunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\begin{aligned} \nu_{2A} &= \nu_{21} + \alpha & s_{2A} &= a/\sin \alpha \\ \Delta y_{2A} &= a/\sin \alpha \cdot \sin \nu_{2A} \\ \Delta x_{2A} &= a/\sin \alpha \cdot \cos \nu_{2A} \\ \nu_{2B} &= \nu_{23} - \beta & s_{2B} &= b/\sin \beta \\ \Delta y_{2B} &= b/\sin \beta \cdot \sin \nu_{2B} \\ \Delta x_{2B} &= b/\sin \beta \cdot \cos \nu_{2B} \\ \Delta y_{2C} &= \Delta y_{2A} + \Delta y_{2B} \\ \Delta x_{2C} &= \Delta x_{2A} + \Delta x_{2B} \end{aligned}$$

3) Berechnung der Richtung  $P_2C$  und der Seite  $s_{20}$  sowie der Koordinaten des Neupunktes  $P_0$  polar von  $P_2$  aus.

$$\begin{aligned} \nu_{2C} &= \arctan \frac{\Delta y_{2C}}{\Delta x_{2C}} & s_{2C} &= \sqrt{\Delta y_{2C}^2 + \Delta x_{2C}^2} \\ \varphi &= \nu_{2C} - \nu_{2A} & s_{20} &= a/\sin \alpha \cdot \sin \varphi \\ \Delta y_{20} &= -s_{20} \sin \nu_{2C} & y_0 &= y_2 + \Delta y_{20} \\ \Delta x_{20} &= -s_{20} \cos \nu_{2C} & x_0 &= x_2 + \Delta x_{20} \end{aligned}$$

Je nach Konfiguration zeigt die sich in 3) ergebende Richtung  $\nu_{2C}$  zum bzw. vom Neupunkt. In Abhängigkeit von der Größe des Hilfswinkels  $\varphi$  ist die Seite  $s_{20}$  mit einem Vorzeichen behaftet. Sie ist positiv, wenn  $\nu_{2C} = \nu_{02}$  und negativ, wenn  $\nu_{2C} = \nu_{20}$ , wobei sich nach generellem Vorzeichenwechsel von  $s_{20}$  die richtigen Koordinatenunterschiede  $\Delta y_{20}$  und  $\Delta x_{20}$  ergeben. Die Länge  $s_{2C}$  läßt außer-

dem eine Aussage zu, inwieweit der Neupunkt in der Nähe des gefährlichen Kreises liegt. Liegen alle vier Punkte ( $P_1, P_2, P_3, P_0$ ) auf einem Kreis, so wird

$$\nu_{21} + \alpha = \nu_{23} - \beta \pm 200^\circ$$

$$a/\sin \alpha = b/\sin \beta = 2R$$

$$s_{2C} = 0$$

woraus folgt, daß die Punkte  $A, B, C$  und  $P_2$  auf einer Geraden liegen, welche gleichzeitig Tangente an den gefährlichen Kreis ist (Abb. 3).

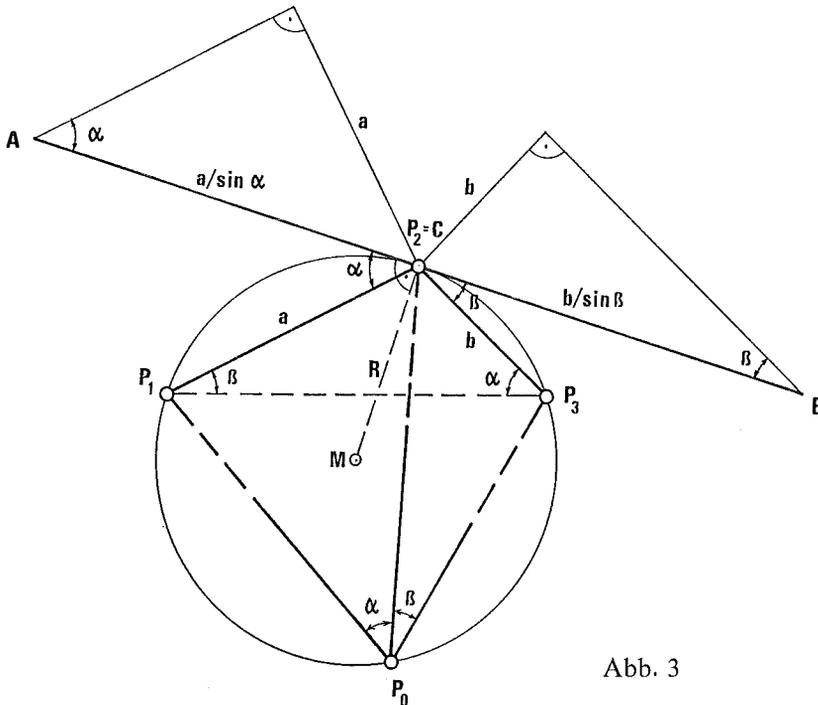


Abb. 3

Da also offensichtlich die Strecke  $s_{2C}$  ein Maß für die Lage des Neupunktes zum gefährlichen Kreis darstellt, kann mit Hilfe einer für diese Größe vorgegebenen Schranke dem Anwender eine eventuell ungünstige Punktwahl zur Kenntnis gebracht werden. Angesichts der im allgemeinen hohen Rechengenauigkeit von elektronischen Taschenrechnern insbesondere bei der Ermittlung von Funktionswerten kann jedoch gesagt werden, daß diese Schranke — fehlerfreie Ausgangsdaten vorausgesetzt — auf ein bestimmtes Mindestmaß reduzierbar ist. Der Zusammenhang zwischen dem Wert dieser Schranke einerseits, welcher in dem im Anhang angeführten Programm für den Taschencomputer HP 65 mit  $s_{2C} = 1$  festgelegt wurde, und dem Radius des gefährlichen Kreises sowie der Punktlagegenauigkeit andererseits, wird Gegenstand weiterer Untersuchungen sein. Rechenunschärfe bzw. Kapazitätsüberschreitungen, welche sich normalerweise dann ergeben, wenn einer der beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  nahe bei  $0^\circ$  oder  $200^\circ$  liegt, lassen sich durch zyklische Vertauschung der Punktfolge ohne weiteres vermeiden.

Die Verwendung der Richtung  $\nu_{2C}$  zur Bestimmung des Neupunktes zeigt auch

RÜCKWÄRTSSCHNITT

SWITCH TO W/PRGM. PRESS [f] [PRGM] TO CLEAR MEMORY.

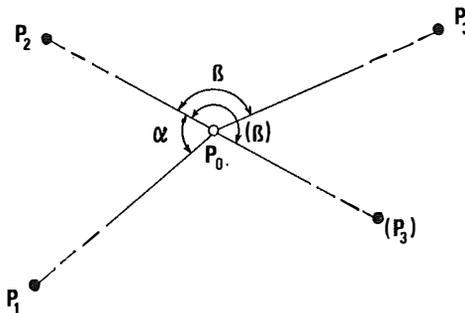
KEY ENTRY	CODE SHOWN	COMMENTS	KEY ENTRY	CODE SHOWN	COMMENTS	REGISTERS
LBL	23	Start	↑	41		R <sub>1</sub> Y <sub>2</sub>
A	11		RCL 4	34 04		
g	35		—	51		
GRD	43	Neugrad	f	31		R <sub>2</sub> X <sub>2</sub>
DSP	21		SIN	04		
•	83	Dec 3	RCL 3	34 03		
3	03		x	71		R <sub>3</sub> α/sinα
CL x	44		CHS	42	--S <sub>20</sub>	
R/S	84	Y <sub>2</sub> ←	f <sup>-1</sup>	32		
<sup>10</sup> STO 1	33 01		<sup>60</sup> R→P	01		R <sub>4</sub> $\frac{1}{2} + \alpha$
CL x	44		g ↔	35 07		
R/S	84	X <sub>2</sub> ←	RCL 1	34 01		
STO 2	33 02		+	61		R <sub>5</sub> ΔX <sub>2A</sub>
B	12	Y <sub>1</sub> ; X <sub>1</sub> ; α ↔	DSP	21		
STO 3	33 03		•	83	Dec 3	
g R ↑	35 08		3	03		R <sub>6</sub> ΔY <sub>2A</sub>
+	61		R/S	84	→ Y <sub>0</sub>	
STO 4	33 04		CL x	44		
g R ↑	35 09		RCL 2	34 02		R <sub>7</sub>
<sup>20</sup> f <sup>-1</sup>	32		<sup>70</sup> +	61		
R→P	01		R/S	84	→ X <sub>0</sub>	
STO 5	33 05		GTO	22		R <sub>8</sub>
g ↔	35 07		⊖	00	Schleife	
STO 6	33 06		LBL	23	Subroutine	
LBL	23	Schleife	B	12		R <sub>9</sub>
⊖	00		DSP	21		
B	12	Y <sub>3</sub> ; X <sub>3</sub> ; β ↔	•	83	Dec 3	
g ↔	35 07		3	03		LABELS
g R ↑	35 09		CL x	44		A Start
<sup>30</sup> —	51		<sup>80</sup> R/S	84	Y <sub>1</sub> , Y <sub>3</sub> ←	B Subr.
g ↔	35 07		RCL 1	34 01		C
f <sup>-1</sup>	32		—	51		D
R→P	01		⊖	00		E
g ↔	35 07		R/S	84	X <sub>1</sub> ; X <sub>3</sub> ←	0 Schleife
RCL 6	34 06		RCL 2	34 02		1
+	61		—	51		2
g ↔	35 07		f	31		3
RCL 5	34 05		R→P	01		4
+	61		DSP	21		5
<sup>40</sup> f	31		<sup>90</sup> •	83	Dec 4	6
R→P	01		4	04		7
f	31		⊖	00		8
INT	83		R/S	84	α; β ←	9
⊖	00		↑	41		
g x=y	35 23	if S <sub>2c</sub> <1	g R ↓	35 08		FLAGS
R/S	84		f	31		1
g NOP	35 01		SIN	04		2
g R ↓	35 08		÷	81		
g R ↓	35 08		RTN	24		
<sup>50</sup> ↑	41		<sup>100</sup>			

TO RECORD PROGRAM INSERT MAGNETIC CARD WITH SWITCH SET AT W/PRGM.



STEP	INSTRUCTIONS	INPUT DATA/UNITS	KEYS	OUTPUT DATA/UNITS
1	Programm einlesen		<input type="text"/> <input type="text"/>	
2	Programmstart		<input type="text"/> A <input type="text"/>	
3	Eing.: $Y_2$ }	1500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
4	Eing.: $X_2$ }	500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
5	Eing.: $Y_1$ }	500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
6	Eing.: $X_1$ }	1500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
7	Eing.: $\alpha^g$	$100^g00\ 00$	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
8	Neuer Start		<input type="text"/> RTN <input type="text"/> A	→ Step 3
	Eing.: $Y_3$ }	500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
9	Eing.: $X_3$ }	-500,00	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	
10	Eing.: $\beta^g$ Ausg.: $Y_0$ }	$100^g00\ 00$	<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	500,000
11	Ausg.: $X_0$ }		<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	500,000
12			<input type="text"/> R/S <input type="text"/>	→ Step 8

**Anm.:** Das Programm setzt in Step 12 nach Drücken der Taste R/S in Step 8 fort. Eingabe von neuem  $P_3$  und  $\beta$  möglich. Werden in Step 8 die Tasten  RTN  A gedrückt → neuer Programmstart. Wenn  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_0$  nahe dem gefährlichen Kreis, erscheint im Display nach Eingabe von  $\beta$  "0,0000". Durch Drücken von  R/S kann der Programmablauf fortgesetzt, durch Drücken der Tasten  RTN  A neu gestartet werden.1)



1) Wenn  $\alpha$  oder  $\beta$  nahe  $0^\circ$  oder  $200^\circ$  → Punkte zyklisch vertauschen.

eine Parallele zur Lösung des Rückwärtsschnittes nach *Collins*, wobei nach [5] folgende Zusammenhänge bestehen:

$$\overline{P_2C} = s_{20} |\cot \varphi + \cot \psi|$$

$$\overline{P_2HC} = \frac{\overline{P_2C}}{|\cot \alpha + \cot \beta|}$$

( $H_C$  Collins'scher Hilfspunkt).

Der Programmieraufwand für den angeführten Algorithmus ist um mehr als ein Drittel geringer als jener für herkömmliche Lösungsmethoden. So war es z. B. möglich, die Berechnung des Rückwärtsschnittes mit der HP 65 auf 99 Befehle zu reduzieren, wobei der in [4] durchwegs vorgesehene Bedienungskomfort beibehalten und die oben erwähnte Genauigkeitsabfrage zusätzlich eingebaut werden konnte (siehe Anhang).

Durch den Einsatz elektronischer Taschenrechner und die Entwicklung entsprechender Berechnungsverfahren können Teile der im Zuge der Feldarbeit erhaltenen Ergebnisse bereits an Ort und Stelle überprüft werden. Damit gewinnen neben dem Rückwärtsschnitt auch andere Problemstellungen der Ingenieurgeodäsie, welche bis vor kurzem einen hohen Rechen- bzw. Programmieraufwand erforderten, im Hinblick auf Wirtschaftlichkeit und Rationalisierung an Bedeutung.

#### *Literatur*

- [1] *Bock, W.*: Die Rechen- und Lösungswege der Einschnaideaufgaben. *ZfV*, 77 (1952), S. 170 bis 182.
- [2] *Brandstätter, G.*: Notiz zur analytischen Berechnung des ebenen Rückwärtsschnittes. *ÖZfVuPh*, 61 (1974), S. 134–136.
- [3] *Egger, H., Palfinger, G., Perdich, W., Plach, H., Wagensommerer, G.*: Tektronix-Taschenrechner TEK 31 — Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 4/1974. Buchbesprechung im vorliegenden Heft der *ÖZfVuPh*.
- [4] *Egger, H., Perdich, W., Plach, H., Wagensommerer, G.*: Taschenrechner HP 45 und HP 65. Programme und Anwendung im Vermessungswesen. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 2/1974.
- [5] *Tarczy-Hornoch, A.*: Beiträge zur Berechnung des Rückwärtsschnittes. *ÖZfV*, Sonderheft 14 (1952), S. 79–97.