Paper-ID: VGI_197409

Horizontalentfernung und Höhenunterschied aus Schrägstrecken

Karl Hubeny [1]

[1] *Institut für Allgemeine Geodäsie und Photogrammetrie an der Technischen Hochschule Graz, A-8010 Graz, Rechbauerstraße 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (3), S. 125–127

1974

BibTEX:

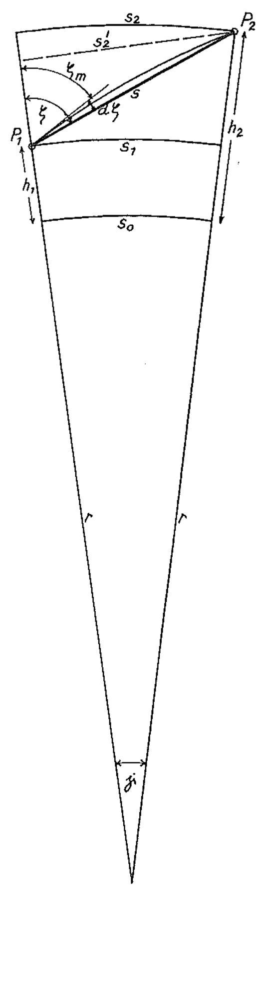
```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_197409,
Title = {Horizontalentfernung und H{\"o}henunterschied aus Schr{\"a}gstrecken
   },
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {125--127},
Number = {3},
Year = {1974},
Volume = {62}
}
```

Horizontalentfernung und Höhenunterschied aus Schrägstrecken

Von *Karl Hubeny*, Graz

Elektronische Entfernungsmesser mit Reichweiten bis zu einigen Kilometern, in einigen Fällen auch mit Rechnern zur Ermittlung von Horizontalentfernung und Höhenunterschied kombiniert, haben bekanntlich weitgehend Eingang in die Praxis gefunden. Dies mag der Anlaß sein, an zwei hiebei auftretende Probleme, nämlich die Reduktion der gemessenen schrägen Strecken in den Horizont und die Ermittlung der Höhenunterschiede aus den Schrägstrecken zu erinnern.

Denkt man zunächst an kurze Strecken mit einer Begrenzung der Streckenlänge bei etwa 100 m, wie sie die optischen Distanzmesser zu messen erlauben, so ist nach dem üblichen Vorgang die gemessene Schrägstrecke mit dem Sinus der Zenitdistanz (Cosinus des Höhenwinkels) zu multiplizieren, um die horizontale Strecke zu erhalten. Diese ist sodann auf die Höhe Null zu reduzieren, wobei es bei den gegebenen Streckenlängen und den damit verbundenen Höhenunterschieden von höchstens einigen Zehnermetern belanglos ist, ob man in diese Reduktion die Höhe des Standpunktes oder die des Zielpunktes oder auch das Mittel aus diesen beiden Höhen einführt. Der Betrag der Höhenreduktion einer 100-m-Strecke ist nämlich für je 10 Höhenmeter lediglich rd. 0,16 mm, also viel zu geringfügig, um sich im Ergebnis auszuwirken. Wird aus der Schrägstrecke der Höhenunterschied berechnet, so ist der dabei auftretende Einfluß der Erdkrümmung und der Refraktion bei der bestehenden Begrenzung der Streckenlängen ebenfalls sehr klein; für die 100-m-Strecke erreicht er erst den Betrag von rd. 0,7 mm.



Die erwähnten Zusammenhänge ändern sich natürlich, wenn man auf größere Streckenlängen und die dabei möglichen größeren Höhenunterschiede übergeht. Wir denken dabei an Strecken, wie sie z. B. mit den Infrarotdistanzmessern Di 10, Di 3, El Di 2 u. a. gemessen werden können, also an Strecken bis zu einigen Kilometern. In der nebenstehenden Abbildung haben wir diesen Fall skizziert; die Punkte P_1 und P_2 mit den Höhen h_1 und h_2 definieren eine Raumstrecke s, die in P_1 die Zenitdistanz $\zeta = \zeta_m + d\zeta$ aufweist (ζ_m = gemessene Zenitdistanz, $d\zeta$ = Refraktionswinkel). Die Flächen gleicher Höhen h_o, h_1 und h_2 werden im betrachteten kleinen Bereich durch konzentrische Kugelflächen mit dem Radius r für die Höhe h_o angenähert. Die aus der Messung hervorgehende Länge ist streng genommen nicht die der Geraden $P_1P_2 = s$, sondern die eines Bogens P_1P_2; es läßt sich aber leicht zeigen, daß bei den in Frage kommenden Streckenlängen von höchstens einigen wenigen Kilometern die Differenz Bogen—Sehne unter der Größenordnung von 10^{-2} mm liegt. Ähnliches gilt übrigens auch zwischen den Längen s_2 und s_2' in der Figur, da z. B. für $s_2 = 5$ km der Unterschied $s_2 - s_2'$ erst 0,5 mm beträgt, also immer $s_2 = s_2'$ gesetzt werden kann.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus der gemessenen Raumstrecke s und der in P_1 gemessenen Zenitdistanz ζ_m die horizontale Strecke s_1 oder s_2 zu ermitteln oder zu untersuchen, wie das Produkt $s . \sin \zeta_m$, also die einfache Reduktion in die Horizontale, zu deuten ist. Aus der Figur liest man ab, daß durch die Einführung der vom Refraktionseinfluß befreiten Zenitdistanz $\zeta = \zeta_m + d\zeta$ aus dem Produkt $s . \sin \zeta = s_2' = s_2$ die in den Horizont des Zielpunktes reduzierte Schrägstrecke erhalten wird. Da der Refraktionswinkel $d\zeta$ nur klein ist — er liegt bei $s = 5000$ m erst in der Größenordnung von rd. $0{,}3^c$ oder $10''$ und beeinflußt das Ergebnis daher nur wenig — ist damit das Wesentliche vorweggenommen: Das Produkt $s . \sin \zeta_m$ führt immer zu der *in die Höhe des Zielpunktes reduzierten Strecke;* es ist also *dessen* Höhe in die weitere Reduktion in die Höhe Null einzuführen. Ein Abgehen von dieser Forderung kann sich fühlbar auswirken, denn: Nimmt man z. B. s_2 mit 2000 Metern, $h_2 - h_1$ mit 400 Metern an — ein leicht denkbarer Fall — so unterscheiden sich die beiden Reduktionen aus h_1 und h_2 in die Höhe Null bereits um 0,13 m, d. h. die Strecke wird um diesen weit über der Meßgenauigkeit liegenden Betrag verfälscht, wenn man anstelle der Höhe des Zielpunktes die des Standpunktes einführt. Die mittlere Höhe $h_m = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ führt zu einer Verfälschung um den halben Betrag.

Die Einbeziehung der Refraktion führt nach Abb. 1 zu dem Ansatz

$$s . \sin(\zeta_m + d\zeta) = s_2' = (r + h_2) \sin \gamma = (r + h_2) \sin \frac{s_2}{r + h_2} . \qquad \ldots (1)$$

Da man wegen der Kleinheit des Winkels γ dessen Sinus mit dem Bogen $\frac{s_2}{r + h_2}$ vertauschen kann, ergibt sich aus (1)

$$s . \sin(\zeta_m + d\zeta) = s_2$$

oder nach der Taylorentwicklung

$$s . \sin \zeta_m + s . \cos \zeta_m \, d\zeta = s_2. \qquad \ldots (2)$$

Der Refraktionswinkel $d\zeta$ ist der halbe Zentriwinkel eines Bogens P_1P_2, dessen mittlerer Radius mit dem Refraktionskoeffizienten $k = 0{,}13$ aus $\frac{r}{k}$ gegeben ist. Es ist also

$$d\zeta = \frac{k . s}{2r} \qquad \ldots (3)$$

Da das Produkt $s . \cos \zeta_m$ in erster Näherung gleich dem Höhenunterschied $h_2 - h_1$ ist, ergibt sich aus (2) mit (3)

$$s_2 = s . \sin \zeta_m + (h_2 - h_1) \frac{k . s}{2r} . \qquad \ldots (4)$$

Der zweite Teil des obigen Ausdruckes ist der Einfluß der Refraktion auf die Reduktion in die Horizontale; der Faktor $\frac{k}{2r}$ ist fast genau 10^{-8} (Meter^{-1}), so daß man auch schreiben kann

$$s_2 = s \sin \zeta_m + (h_2 - h_1)\, s \,.\, 10^{-8}. \qquad \ldots (5)$$

Der Einfluß der Refraktion erreicht demnach den Betrag von 0,01 m, wenn das Produkt $(h_2 - h_1) \,.\, s$ den Betrag von 10^6 (Meter^2) erreicht. Im früher erwähnten Beispiel mit $s = 2000$ m, $h_2 - h_1 = 400\ m$ ist dies annähernd der Fall.

Für den Höhenunterschied $h_2 - h_1$ ergibt sich aus der Abbildung 1 der Ansatz

$$r + h_1 + s \cos (\zeta_m + d\zeta) = (r + h_2) \cos \gamma = (r + h_2) \cos \frac{s_2}{r + h_2} \cdot \qquad \ldots (6)$$

Mit

$$\cos \frac{s_2}{r + h_2} = 1 - \frac{s_2{}^2}{2\,(r + h_2)^2} + \ldots = 1 - \frac{s^2 \sin^2 \zeta_m}{2\,(r + h_2)^2} + \ldots$$

und

$$\cos (\zeta_m + d\zeta) = \cos \zeta_m - \sin \zeta_m\, d\zeta = \cos \zeta_m - \sin \zeta_m \frac{k \,.\, s}{2r}$$

sowie

$$r + h_2 \doteq r$$

erhält man aus (6)

$$h_2 - h_1 = s \cos \zeta_m + \frac{s^2 \sin^2 \zeta_m}{2r} - s \,.\, \sin \zeta_m \frac{k \,.\, s}{2r} \,. \qquad \ldots (7)$$

Daraus folgt

$$h_2 - h_1 = s \cos \zeta_m + \frac{s^2}{2r} (\sin^2 \zeta_m - k \sin \zeta_m) \,. \qquad \ldots (8)$$

Setzt man in der Klammer $\sin^2 \zeta_m$ anstelle $\sin \zeta_m$ — dies entspricht der Annahme einer Änderung des mittleren Radius der Lichtbahn mit $\frac{1}{\sin \zeta}$ — so ergibt sich schließlich

$$h_2 - h_1 = s \,.\, \cos \zeta_m + \frac{1 - k}{2r} \,.\, s^2 \sin^2 \zeta_m \qquad \ldots (9)$$

oder, zufolge (5)

$$h_2 - h_1 = s \cos \zeta_m + \frac{1 - k}{2r} s_2{}^2. \qquad \ldots (10)$$

Es hätte also, wie man sieht, in die Korrektur zufolge Erdkrümmung und Refraktion bei der Berechnung des Höhenunterschiedes aus der Schrägstrecke streng genommen die auf den Horizont des Zielpunktes reduzierte Strecke s_2 einzugehen, doch ist dieser Umstand zufolge des kleinen Betrages dieser Korrektur bedeutungslos. Die für kurze Strecken benützte Formel (10) behält also auch für die im vorliegenden Rahmen betrachteten Streckenlängen ihre Gültigkeit.