

Paper-ID: VGI_197402



Die Richtungsgenauigkeit von Pentaprismen

Gerhard Brandstätter ¹

¹ A-8010 Graz, Glacisstraße 33

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (1), S.
16–24

1974

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_197402,  
Title = {Die Richtungsgenauigkeit von Pentaprismen},  
Author = {Brandst{"a"}tter, Gerhard},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u"}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {16--24},  
Number = {1},  
Year = {1974},  
Volume = {62}  
}
```



Die Richtungsgenauigkeit von Pentaprismen

Von *Gerhard Brandstätter*, Graz

0. Einleitung

Ingenieurgeodätische Arbeiten unter beengten Raumverhältnissen verlangen mitunter Beobachtungen mit rechtwinkelig gebrochener Ziellinie. Die Ablenkung des Strahlenganges erfolgt im allgemeinen mit Hilfe des Pentaprismas, wobei dieses entweder frei aufgestellt oder direkt vor dem Fernrohrobjektiv in Form eines Vorsatzprismas angebracht wird. Abweichungen der so erzeugten Beobachtungsrichtung von der idealen Normalrichtung werden durch Schlifffehler hervorgerufen, die als Fehler der Winkel zwischen den Prismenflächen (Prismenfehler) einerseits bzw. als Fehler des rechten Winkels zwischen diesen und der Basis des Prismas (Pyramidalfehler) andererseits auftreten. Ihr Einfluß soll im folgenden untersucht werden.

1. Brechung und Spiegelung räumlicher Richtungen

Eine räumliche Richtung

$$\mathbf{r}^T = (r_1, r_2, r_3) = (\cos a \sin z, \sin a \sin z, \cos z) \quad \dots (1.1)$$

($a \dots$ Azimut, $z \dots$ Zenitdistanz) wird bei Durchgang durch eine Trennfläche zwischen den Medien mit den Brechungsindizes n und n' zufolge

$$\mathbf{r}' = \frac{n}{n'} \left\{ \mathbf{r} - [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \sqrt{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 - 1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2}] \mathbf{n} \right\} \quad \dots (1.2)$$

[1] abgelenkt. \mathbf{n} ist der Normalvektor der Trennfläche, \mathbf{r}' die neue Richtung. Die Spiegelung an der Fläche wird durch

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad \dots (1.3)$$

beschrieben.

Definiert nun ein Normalenvektor (\mathbf{n}) die Soll-Lage einer Trennfläche und $\mathbf{n} = (\mathbf{n}) + d\mathbf{n}$ deren um kleine Beträge davon abweichende Ist-Lage, dann weicht die beobachtete Richtung um

$$d\mathbf{r}' = \frac{n}{n'} \left\{ -\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n})}{\sqrt{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}))^2 - 1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2}} \right] (\mathbf{n}) - \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}) - \sqrt{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}))^2 - 1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2} \right] d\mathbf{n} \right\} \quad \dots (1.4)$$

bei Brechung und um

$$d\mathbf{r}' = -2 [(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}) (\mathbf{n}) + (\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n})) d\mathbf{n}] \quad \dots (1.5)$$

bei Spiegelung von der idealen Richtung ab. Dieser Fehler wird an den folgenden (fehlerfreien) Flächen zufolge

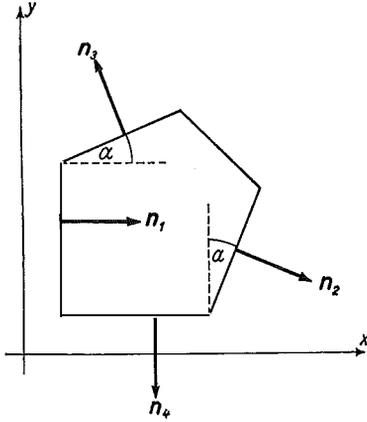
$$d\mathbf{r}' = \frac{n}{n'} \left\{ d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \left[1 - \frac{(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{((\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})^2 - 1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2}} \right] \mathbf{n} \right\} \quad \dots (1.6)$$

bei Brechung und

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - 2 [d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \dots (1.7)$$

bei Spiegelung weitergegeben.

2. Das fehlerfreie Pentaprisma



Das fehlerfreie Prisma mit der Brechzahl n ist durch normal auf der $[x, y]$ -Ebene stehende Prismenflächen bzw. deren Normalvektoren (Fig. 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^T &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{n}_2^T &= (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \\ \mathbf{n}_3^T &= (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \\ \mathbf{n}_4^T &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

Fig. 1

definiert ($\alpha = \frac{\pi}{8}$). Das Ergebnis der Durchrechnung ist natürlich bekannt Für die Bestimmung der Fehlereinflüsse mit Hilfe der Formeln (1.4), (1.5) und (1.6) wird jedoch der fehlerfreie Strahlengang benötigt, der deshalb in tabellarischer Form zusammengestellt sei. Dabei erhalten die Richtungen \mathbf{r} des einfallenden Strahles und \mathbf{r}' des austretenden Strahles an einer Fläche mit der Normalen \mathbf{n}_i denselben Index.

\mathbf{r}_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
\mathbf{n}_1	1	0	0
$\mathbf{r}'_1 \equiv \mathbf{r}_2$	$\frac{1}{n} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	$\frac{1}{n} r_{12}$	$\frac{1}{n} r_{13}$
\mathbf{n}_2	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	0
$\mathbf{r}'_2 \equiv \mathbf{r}_3$	$\frac{1}{n} (-\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \cos 2\alpha + r_{12} \sin 2\alpha)$	$\frac{1}{n} (\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \sin 2\alpha + r_{12} \cos 2\alpha)$	$\frac{1}{n} r_{13}$
\mathbf{n}_3	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
$\mathbf{r}'_3 \equiv \mathbf{r}_4$	$\frac{1}{n} (-\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \cos 4\alpha + r_{12} \sin 4\alpha)$	$\frac{1}{n} (-\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \sin 4\alpha - r_{12} \cos 4\alpha)$	$\frac{1}{n} r_{13}$

bzw. wegen $4\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\mathbf{r}_3' \equiv \mathbf{r}_4$	$\frac{1}{n} r_{12}$	$-\frac{1}{n} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	$\frac{1}{n} r_{13}$
\mathbf{n}_4	0	-1	0
\mathbf{r}_4'	r_{12}	$-r_{11}$	r_{13}

Die auf die Basis des Prismas bezogene horizontale Richtungskomponente ist also nach Verlassen des Prismas um einen rechten Winkel versetzt, die vertikale Komponente und somit die Zenitdistanz bleibt natürlich unverändert und die Richtung des austretenden Strahles ist vom Brechungsindex unabhängig.

3. Das mit Schliffehlern behaftete Pentaprisma

Da die Fertigung optischer Teile mit sehr hoher Präzision erfolgt, darf angenommen werden, daß die Schlifffehler sehr klein sind. Mit σ_i als Abweichung der Prismenwinkel α von den Sollwerten und τ_i als Pyramidalfehler, das ist der „Höhlenwinkel“ von \mathbf{n}_i , haben die Flächennormalen die Form

$$\begin{array}{l} \mathbf{n}_1^T = (\quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad , \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad , \tau_1) \\ \mathbf{n}_2^T = (\cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha, -\sin \alpha - \sigma_2 \cos \alpha, \tau_2) \\ \mathbf{n}_3^T = (-\sin \alpha - \sigma_3 \cos \alpha, \cos \alpha - \sigma_3 \sin \alpha, \tau_3) \\ \mathbf{n}_4^T = (\quad \quad \quad -\sigma_4 \quad \quad \quad , \quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad , \tau_4) \end{array} \quad \left| \quad \dots \quad (3.1) \right.$$

Hierbei wurde das der Durchrechnung zugrundeliegende Koordinatensystem so gelegt, daß seine y-Achse zur ersten optischen Fläche parallel ist und \mathbf{n}_1 dadurch keinen horizontalen Lagefehler σ_1 aufweist.

Die Einflüsse von σ_i und τ_i sind auf Grund der getroffenen Annahmen voneinander unabhängig und gestatten so die gesonderte Durchrechnung für jeden Einzelfehler in der Form, daß stets nur eine der optischen Flächen einen bestimmten Lagefehler aufweist und die Fortpflanzung ihres Einflusses bei sonst fehlerfreien Flächen mit Hilfe der Gln. (1.6) und (1.7) berechnet wird. Die Summe der resultierenden Teilabweichungen ergibt den Gesamtfehler der aus dem Prisma austretenden Richtung.

4. Pyramidalfehler

Die in (1.4) und (1.5) wegen des Pyramidalfehlers einzuführenden Abweichungen $d\mathbf{n}_i$ der Flächennormalen von der Soll-Richtung lauten:

$$d\mathbf{n}_i^T = (0, 0, \tau_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

die (\mathbf{n}_i) sind, wie aus den Beziehungen (3.1) entnommen werden kann, die fehlerfreien Flächennormalen aus Abschnitt 2, die (\mathbf{r}_i) entsprechen den Richtungen des fehlerfreien Strahlenganges. Damit ergibt sich insbesondere für die Brechung an der letzten Fläche laut Beziehung (1.6) allgemein:

$d\mathbf{r}_4$	dr_{41}	dr_{42}	dr_{43}
\mathbf{n}_4	0	-1	0
(\mathbf{r}_4)	$\frac{1}{n} r_{12}$	$-\frac{1}{n} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	$\frac{1}{n} r_{13}$
$\left\{ [(\mathbf{r}_4) \cdot \mathbf{n}_4]^2 - 1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} r_{11}$			
dr_4	dr_{41}	$-dr_{42} \left[1 - \frac{1}{r_{11}} \cdot \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \right]$	0
$d\mathbf{r}_4'$	$n dr_{41}$	$\frac{n}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot dr_{42}$	$n dr_{43}$

Die spezielle Durchrechnung der einzelnen fehlerhaften Strahlengänge liefert nun die im folgenden tabellarisch zusammengestellten Anteile am Richtungsfehler des austretenden Strahles.

τ_1 :

\mathbf{r}_1	r_{12}	r_{12}	r_{13}
(\mathbf{n}_1)	1	0	0
$d\mathbf{n}_1$	0	0	τ_1
$d\mathbf{r}_1'$	$-\frac{1}{n} \left[1 - \frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}} \right] \cdot r_{13} \tau_1$	0	$-\frac{1}{n} [r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}] \tau_1$

Der Strahlengang im Inneren des Prismas verursacht lediglich die orthogonale Versetzung der Horizontalkomponenten, daher

$\tau_3:$

\mathbf{r}_3	$\frac{1}{n} (-\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot$	$\frac{1}{n} (\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot$	$\frac{1}{n} r_{13}$
(\mathbf{n}_3)	$\cdot \cos 2\alpha + r_{12} \sin 2\alpha)$	$\cdot \sin 2\alpha + r_{12} \cos 2\alpha)$	0
$d\mathbf{n}_3$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	τ_3
	0	0	
$d\mathbf{r}_3' \equiv d\mathbf{r}_4$	$2\frac{1}{n} r_{13} \tau_3 \sin \alpha$	$-2\frac{1}{n} r_{13} \tau_3 \cos \alpha$	$-2\frac{1}{n} \{\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot$
			$\cdot \sin 3\alpha + r_{12} \cos 3\alpha\} \tau_3$
$d\mathbf{r}_4'$	$2 r_{13} \tau_3 \sin \alpha$	$-2 \frac{r_{13}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \tau_3 \cos \alpha$	$-2 \{\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot$
			$\cdot \sin 3\alpha + r_{12} \cos 3\alpha\} \tau_3$

 $\tau_4:$

\mathbf{r}_4	$\frac{1}{n} r_{12}$	$-\frac{1}{n} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	$\frac{1}{n} r_{13}$
(\mathbf{n}_4)	0	-1	0
$d\mathbf{n}_4$	0	0	τ_4
$d\mathbf{r}_4'$	0	$(1 - \frac{1}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}) r_{13} \tau_4$	$-(\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} - r_{11}) \tau_4$

$d\mathbf{r}'_3 \equiv d\mathbf{r}_4$	0	$\frac{1}{n} \left[1 - \frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}} \right] r_{13} \tau_1$	$-\frac{1}{n} [r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}] \tau_1$
$d\mathbf{r}'_4$	0	$\left[\frac{1}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} - 1 \right] r_{13} \tau_1$	$- [r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}] \tau_1$

τ_2 :

\mathbf{r}_2	$\frac{1}{n} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	$\frac{1}{n} r_{12}$	$\frac{1}{n} r_{13}$
(\mathbf{n}_2)	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	0
$d\mathbf{n}_2$	0	0	τ_2
$d\mathbf{r}'_2 \equiv d\mathbf{r}_3$	$-2 \frac{1}{n} r_{13} \tau_2 \cos \alpha$	$2 \frac{1}{n} r_{13} \tau_2 \sin \alpha$	$-\frac{2}{n} (\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \cos \alpha - r_{12} \sin \alpha) \tau_2$
\mathbf{n}_3	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
$d\mathbf{r}'_3 \equiv d\mathbf{r}_4$	$-2 \frac{1}{n} r_{13} \tau_2 \cos 3\alpha$	$-2 \frac{1}{n} r_{13} \tau_2 \sin 3\alpha$	$-\frac{2}{n} (\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \cos \alpha - r_{12} \sin \alpha) \tau_2$
$d\mathbf{r}_4$	$-2 r_{13} \tau_2 \cos 3\alpha$	$-2 \frac{r_{13}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \tau_2 \sin 3\alpha$	$-\frac{2}{n} (\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cdot \cos \alpha - r_{12} \sin \alpha) \tau_2$

Der gesamte durch die Pyramidalfehler zustandekommende Richtungsfehler lautet demnach mit $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$ und $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$

$$d\mathbf{r}'_4 = \begin{pmatrix} 2r_{13} \sin \frac{\pi}{8} (\tau_3 - \tau_2) \\ -2 \frac{r_{13}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cos \frac{\pi}{8} (\tau_3 + \tau_2) + r_{13} \left(1 - \frac{1}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}\right) (\tau_4 - \tau_1) \\ -2 \left[\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cos \frac{\pi}{8} (\tau_3 + \tau_2) + r_{12} \sin \frac{\pi}{8} (\tau_3 - \tau_2) \right] + (r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}) (\tau_4 - \tau_1) \end{pmatrix} \dots (4.2)$$

und beeinflusst beide Richtungsparameter.

5. Prismenfehler

Die Prismenfehler werden durch die von (3.1) abzuspaltenden Abweichungen

$$\begin{aligned} d\mathbf{n}_2^T &= (-\sigma_2 \sin \alpha, -\sigma_2 \cos \alpha, 0) \\ d\mathbf{n}_3^T &= (-\sigma_3 \cos \alpha, -\sigma_3 \sin \alpha, 0) \\ d\mathbf{n}_4^T &= (-\sigma_4, 0, 0) \end{aligned}$$

hervorgerufen. Ihre Auswirkung auf die Richtung des austretenden Strahles ist bekannt (Jordan-Eggert-Kneißl, Band II). Die nach demselben Schema wie im vorhergehenden Abschnitt berechneten Einzelfehler lauten

$$\text{für } \sigma_2: d\mathbf{r}_4'^T = (2\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \sigma_2, 2\frac{r_{12}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \sigma_2, 0),$$

$$\text{für } \sigma_3: d\mathbf{r}_4'^T = (2\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \sigma_3, 2\frac{r_{12}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \sigma_3, 0),$$

$$\text{für } \sigma_4: d\mathbf{r}_4'^T = ((\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} - r_{11}) \sigma_4, r_{12} \left(\frac{1}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} - 1\right) \sigma_4, 0)$$

und damit ihr Gesamteinfluß

$$d\mathbf{r}_4' = \begin{pmatrix} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} (2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - r_{11} \sigma_4 \\ \frac{r_{12}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} (2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - r_{12} \sigma_4 \\ 0 \end{pmatrix} \dots (5.1)$$

Die in Jordan-Eggert-Kneißl, Band II, Seite 145f. abgeleitete Beziehung folgt hieraus, abgesehen von Unterschieden in Bezeichnung und Vorzeichen, wegen

$$\mathbf{r}_4' = \begin{pmatrix} \cos(a_1 - \frac{\pi}{2} + da) \\ \sin(a_1 - \frac{\pi}{2} + da) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ -\cos a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \sin a_1 \\ 0 \end{pmatrix} da = (\mathbf{r}_4) + \mathbf{r}_1 da$$

und somit

$$d\mathbf{r}_4' = \mathbf{r}_1 da$$

aus der ersten oder zweiten Komponente von (5.1) mit

$$da = \sqrt{1 + (n^2 - 1) \frac{1}{r_{11}^2} (2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - \sigma_4} \dots (5.2)$$

6. Diskussion der Richtungsfehler

Die Abweichungen (4.2) und (5.1) gelten für Strahlen, die in beliebiger Richtung einfallen. Steht die erste Fläche des Pentaprismas so genau normal zur Zielrichtung, daß r_{12} und r_{13} klein von erster Ordnung sind und $r_{11} \approx 1$, dann verschwinden in (4.2) die beiden Horizontalkomponenten, in (5.1) die zweite Komponente und die Einflüsse der Schlifffehler reduzieren sich auf

$$d\mathbf{r}'_4 = \begin{pmatrix} n(2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - \sigma_4 \\ 0 \\ -2n \cos \frac{\pi}{8} (\tau_3 + \tau_2) + (1 - n)(\tau_4 - \tau_1) \end{pmatrix}, \dots (6.1)$$

wo die erste Komponente direkt den Azimutfehler, die dritte Komponente den Fehler der Zenitdistanz angibt. Diese Form genügt bei Verwendung von Vorsatzprismen und gilt insbesondere für frei aufgestellte Prismen, deren erste Fläche durch Autokollimation an einem aufgesprengten Spiegel zum Zielstrahl normal eingerichtet ist. Wird diese Anordnung zur Ablotung in Schächten verwendet, kann der Einfluß der Fehler durch Beobachtung in zwei diamitralen Positionen und Mittelung der beiden Lotpunkte eliminiert werden.

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich für $r_{13} = 0$, $r_{12} \neq 0$. Der Zielstrahl trifft dann horizontal aber mit beliebigem Azimut die erste Prismenfläche und weist nach Durchgang durch das Prisma die Abweichung

$$d\mathbf{r}'_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} (2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - r_{11} \sigma_4 \\ \frac{r_{12}}{r_{11}} \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} (2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4) - r_{12} \sigma_4 \\ -2 \left[\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cos \frac{\pi}{8} (\tau_3 + \tau_2) + r_{12} \sin \frac{\pi}{8} (\tau_3 - \tau_2) \right] + (r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}) (\tau_4 - \tau_1) \end{pmatrix} \dots (6.2)$$

von der Sollrichtung auf. Die Pyramidalfehler wirken sich hier nur auf die Zenitdistanz aus, die Prismenfehler wirken allgemein nur im azimutalen Sinn, beide in Abhängigkeit von den Horizontalkomponenten der Einfallsrichtung. Eine Änderung des Zenitdistanzfehlers wird hier ausschließlich durch eine horizontale Drehung des Prismas erreicht.

7. Zur Prüfung von Pentaprismen

Für die quantitative Prüfung wird ein genauer rechter Winkel, in dessen Schenkeln ein Kollimator und ein auf unendlich fokussierter Theodolit stehen (Fig. 2) sowie ein Sollhorizont durch Kollimator und (horizontale) Theodolit-Zielachse benötigt. Wird im rechten Winkel ein Prisma angebracht, dann befinden sich Kollimator und Theodolit über dieses in Autokollimation und das Bild des Kollimatorfadenkreuzes

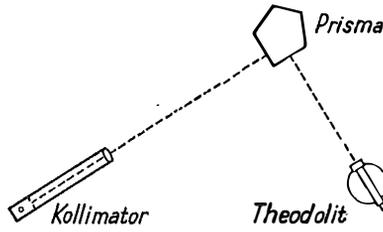


Fig. 2

in der Bildebene des Theodolitfernrohres gibt die Richtung des aus dem Prisma austretenden Strahles an. Abweichungen von der Soll-Lage können so mit Hilfe des Theodolits gemessen werden, ebenso deren Änderung bei Verdrehung des Prismas. Als Beobachtungsgleichungen für die Auswertung der Messungen dienen die Gl. (5.2) und wegen $dr_{43}' = -dz_4$ die dritte Komponente von (6.2) mit den fünf unabhängigen Parametern $x_1 = 2(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_4$, $x_2 = -\sigma_4$, $x_3 = \tau_3 + \tau_2$, $x_4 = \tau_3 - \tau_2$ und $x_5 = \tau_1 - \tau_4$ (Tab. 1).

x_1	x_2	x_3
$\sqrt{1 + (n^2 - 1) \frac{1}{r_{11}^2}}$	- 1	_____
_____	_____	$2\sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2} \cos \frac{\pi}{8}$
x_4	x_5	l
_____	_____	da
$2r_{12} \sin \frac{\pi}{8}$	$r_{11} - \sqrt{r_{11}^2 - 1 + n^2}$	dz

Tab. 1

Bei der azimuthalen Komponente ist allerdings zu beachten, daß sich der Koeffizient von x_1 in Abhängigkeit vom Azimut des einfallenden Strahles nur langsam ändert und daher das Prisma so weit wie es die Fassung gestattet, aus der Ausgangslage $a = 0$ herauszudrehen ist, um x_1 und x_2 halbwegs sauber trennen zu können. Dies verbessert natürlich auch die Kondition der drei zenitalen Beobachtungsgleichungen, deren Beobachtungslagen symmetrisch zur Ausgangsrichtung anzuordnen sind.

Literatur

Flügge, J.: Leitfaden der geometrischen Optik und des Optikrechnens. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1956.

Jordan-Eggert-Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde. 10. Auflage, Band II, Stuttgart 1963.