

Paper-ID: VGI_197317



Lotabweichungseinfluß bei der trigonometrischen Höhenmessung mit steilen Visuren

Fritz K. Brunner ¹

¹ *Institut für Geophysik an der Technischen Hochschule Wien, A-1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **61** (4), S. 126–134

1973

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Brunner_VGI_197317,  
  Title = {Lotabweichungseinflu{\ss} bei der trigonometrischen H{"o}henmessung  
    mit steilen Visuren},  
  Author = {Brunner, Fritz K.},  
  Journal = {"0sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {126--134},  
  Number = {4},  
  Year = {1973},  
  Volume = {61}  
}
```



[4] *Trepied, Ch.*: Sur le calcul des coordonnées géodésiques. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Band 80, S. 36, Paris 1875.

[5] *Helmert, F. R.*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. S. 296, Leipzig 1880.

[6] *Jordan, W.*: Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. Handbuch der Vermessungskunde, 3. Band, S. 387, Stuttgart 1890.

[7] *Gauß, C. F.*: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie — Zweite Abhandlung. Art. 26—32, Göttingen 1846.

[8] *Jordan, W. und K. Steppes*: Das Deutsche Vermessungswesen. Band 1, S. 113, Stuttgart 1882.

[9] *Grabowsky, L.*: Über die Potenzreihen zur sogenannten geodätischen Hauptaufgabe. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 15 (1917) 9, S. 133 und 16 (1918) 1, S. 10.

[10] *Schödlbauer, A.*: Über eine neue numerische Lösung der 1. geodätischen Hauptaufgabe auf einem Referenzellipsoid der Erde für Seitenlängen bis 120 km. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 58, S. 8, München 1963.

[11] *Welsch, W.*: Beiträge zur Transformation geodätischer geographischer Koordinaten nach Hristow. S. 12, München 1969.

Lotabweichungseinfluß bei der trigonometrischen Höhenmessung mit steilen Visuren

Von *Friedrich K. Brunner*, Wien

Zusammenfassung

Es wird in dieser Arbeit untersucht, wie weit die trigonometrische Höhenmessung in der Lage ist, das geometrische Nivellement, besonders bei steilen Hängen im Gebirge, zu ersetzen. Es wird gezeigt, daß der Lotabweichungseinfluß (ellipsoidische minus beobachtete Zenitdistanz) auf den zu messenden Höhenunterschied bei gemessener horizontaler Distanz abhängig von der Visurneigung, dagegen aber bei gemessener schiefer Seite unabhängig von der Visurneigung ist. Im Gebirge mit seinen steilen Hängen kommt daher nur als trigonometrische Meßmethode die Zenitdistanzbeobachtung in Verbindung mit schief (elektrooptisch) gemessenen Entfernungen in Frage.

Abstract

The Effect of the Deflection of the Vertical on Trigonometric Levelling with Steep Sightings.

In this paper the problem is being investigated how far geometric levelling can be substituted by trigonometric levelling especially on steep slopes in mountain areas. It is shown that the effect of the deflection of the vertical (ellipsoidal minus true zenith distance) on the height difference to be measured depends on the inclination of the sighting in case the horizontal distance is measured, but is independent of the inclination when the slope distance is measured. Thus, in mountain areas with its steep slopes only the method of zenith distances in connection with electro-optical slope ranges is suitable.

1. Einleitung

In letzter Zeit nimmt die Zahl der Publikationen, die sich mit der trigonometrischen Höhenmessung beschäftigen, vor allem durch die Aktualität dreidimensionaler geodätischer Netze, ständig zu. Allerdings beschäftigen sich diese Arbeiten nur mit der trigonometrischen Höhenmessung als Höhenmeßmethode zur Bestimmung von Meereshöhen oder ellipsoidischen Höhen, wobei aber immer geringe Neigungen der Visuren vorausgesetzt werden. Abweichend von den bisherigen Arbeiten und unter der Annahme, daß die Visurneigungen in erster Näherung nicht horizontal (Tal-Gipfel) sind, sollen in der vorliegenden Untersuchung jene Bedingungen gesucht werden, bei denen die trigonometrische Höhenmessung geometrische Nivellementhöhendifferenzen liefert. (Unter geometrischen Nivellementhöhendifferenzen werden die rohen, unreduzierten Nivellementhöhendifferenzen verstanden, die man aus den im Feldbuch notierten Lattenlesungen errechnet).

Die Suche nach geometrischen Nivellementhöhendifferenzen als Ergebnis der trigonometrischen Höhenmessung wird aus den nachstehenden Gründen für nützlich erkannt. Vom geometrischen Nivellement her ist bekannt, daß strenge Meereshöhen nicht hypothesenfrei ermittelt werden können, da man für die orthometrische Reduktion des geometrischen Präzisionsnivellements Schwerewerte in der Mitte der Lotlinie im Erdinneren annehmen muß. Es ist daher leicht einzusehen, daß ein anderes geometrisches Meßverfahren ohne Schweremessungen ebenfalls keine Meereshöhen liefern kann. Daher sollte man auch bei der trigonometrischen Höhenmessung jenen Fall suchen, bei dem dieses Meßverfahren rohe geometrische Nivellementhöhen liefert. Des weiteren sind die Ergebnisse beider Höhenmeßmethoden nur dann einheitlich zu behandeln, wenn die trigonometrische Höhenmessung geometrische Nivellementhöhendifferenzen liefert. Erst dadurch wären die Höhenunterschiede, die man durch die beiden Methoden ermittelt, vergleichbar und es könnten einheitliche Rechnungen mit beiden durchgeführt werden, z. B. das Einhängen technischer Nivellements in übergeordnete Präzisionsnivellements oder die Reduktionsberechnungen zu orthometrischen oder dynamischen Höhen.

Als zentrales Thema dieser Arbeit soll untersucht werden, ob die Wahl der Seitenbestimmung, horizontale Seite (aus Koordinaten gerechnet) oder direkt (elektrooptisch) gemessene schiefe Seite, einen unterschiedlichen Einfluß auf die Art der gewonnenen Höhendifferenzen hat. Diese beiden Möglichkeiten sollen noch jeweils in einseitig oder gegenseitig beobachtete Zenitdistanzen unterteilt werden.

Bei den Untersuchungen zur trigonometrischen Höhenmessung geht man grundsätzlich von der Berechnung ellipsoidischer Höhenunterschiede aus, wobei die Zenitdistanzen auf die Ellipsoidnormale bezogen sind. Erst in einem zweiten Schritt wird man dann die ellipsoidischen durch die tatsächlich beobachteten Zenitdistanzen (bezogen auf die Niveaufächennormale) ersetzen. Im folgenden ist daher die ellipsoidische Zenitdistanz ζ_A immer die Summe der beobachteten Zenitdistanz z_A und jener Lotabweichungskomponente ε_A , die in das Beobachtungszazimut fällt:

$$\zeta_A = z_A + \varepsilon_A. \quad \dots (1)$$

Ferner gelten die Krümmungsradien, die in die Formeln eingeführt werden, immer für den Ellipsoidschnitt. Dabei wird der Bogen des Ellipsoidschnittes durch einen Kreis-

bogen ersetzt. Der Einfluß dieser Vereinfachung darf nach *Ledersteger* [4] für alle möglichen Aufgaben der trigonometrischen Höhenmessung vernachlässigt werden.

Der Refraktionswinkel δ soll nach *Brunner* [1] mit

$$\delta = \bar{k} \cdot \gamma / 2 \quad \dots (2)$$

gewählt werden, wobei γ für den ellipsoidischen Zenitwinkel und \bar{k} für den von der Visurteilung unabhängigen Refraktionskoeffizienten steht.

2. Trigonometrische Höhenmessung bei gegebener horizontaler Distanz

Bei der trigonometrischen Höhenmessung, in der Form wie sie im allgemeinen bekannt ist, wird die horizontale Seite, gerechnet aus Koordinaten und angegeben für Meeresniveau, als bekannt vorausgesetzt. Für die geometrischen Überlegungen werden zunächst strenge ellipsoidische Umstände vorausgesetzt.

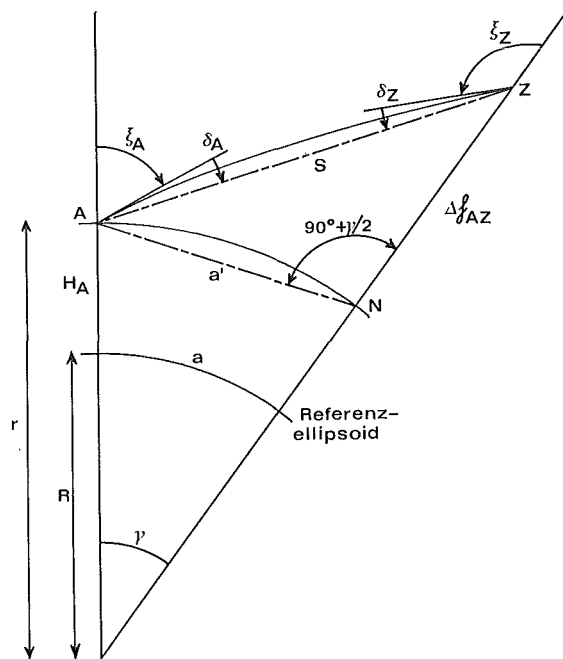


Abb. 1

2.1 Trigonometrische Höhenformeln für ellipsoidische Zenitdistanzen

Für die einseitige ellipsoidische Zenitdistanz ζ_A kann man in Abb. 1 die geometrischen Beziehungen zur Bestimmung der ellipsoidischen Höhendifferenz Δh_{AZ} zwischen den Punkten A und Z ablesen. Aus dem Dreieck AZN findet man, nach den üblichen Umformungen und unter der bekannten Vernachlässigung [3, Seite 356] der Längendifferenz von Sehne zu Bogen, die Gleichung (3).

$$\Delta h_{AZ} = a \left(1 + \frac{H_A}{R} \right) \frac{\cos \left[\zeta_A - \frac{a \cdot \rho}{2R} (1 - \bar{k}) \right]}{\sin \left[\zeta_A - \frac{a \cdot \rho}{2R} (2 - \bar{k}) \right]} \quad \dots (3)$$

Um nun die Untersuchung dahingehend weiterzuführen, wann die trigonometrische Höhenmessung mit beobachteten Zenitdistanzen geometrische Nivellementhöhendifferenzen liefert, muß eine Beziehung zwischen den geometrisch nivellierten und den ellipsoidischen Höhendifferenzen gesucht werden. Aus Abb. 2 kann man leicht die differentiellen Beziehungen (7) des geometrischen Nivellements zur Bestimmung ellipsoidischer Höhendifferenzen ablesen:

$$\Delta h = \Sigma \Delta h - \int_0^a \varepsilon \cdot dl. \quad \dots (7)$$

$\Sigma \Delta h$ steht in Gleichung (7) für die geometrische Nivellementhöhendifferenz, der ja, wie in der Einleitung festgelegt wurde, das besondere Augenmerk gelten soll. Durch Gleichsetzen der beiden ellipsoidischen Höhendifferenzen (6) und (7) kann nun untersucht werden, wann die trigonometrische Höhenmessung aus einseitig beobachteten Zenitdistanzen geometrische Nivellementhöhendifferenzen liefert. Also dann, wenn die Gleichung (8) erfüllt ist.

$$\int_0^a \varepsilon \cdot dl = \frac{a \cdot \varepsilon_A}{\sin^2 z_A} = a \cdot \varepsilon_A + a \cdot \varepsilon_A \cdot \text{ctg}^2 z_A \quad \dots (8)$$

Wird diese Bedingung am Beispiel einer Lotabweichungskurve (in Abb. 3) graphisch dargestellt, so sieht man, daß die Fläche unter der Lotabweichungskurve mit der Summe der beiden Flächen der rechten Seite der Gleichung (8) übereinstimmen muß. Diese Bedingung wird also nur für eine ganz bestimmte Zenitdistanz, die nur zufällig mit der einseitig beobachteten Zenitdistanz übereinstimmen wird, erfüllt sein.

Für den Lotabweichungseinfluß bei der gegenseitigen Zenitdistanzbeobachtung findet man, indem man Gleichung (6) sinngemäß anwendet, den Zusammenhang zum ellipsoidischen Höhenunterschied mit Gleichung (9).

$$\overline{\Delta h} = \overline{\Delta H} - (\varepsilon_A + \varepsilon_Z) \frac{a}{2 \sin^2 z_A} \quad \dots (9)$$

Soll die trigonometrische Höhenmessung durch gegenseitige Zenitdistanzbeobachtung geometrische Nivellementhöhenunterschiede liefern, so muß Gleichung (10) erfüllt sein.

$$\int_0^a \varepsilon dl = a \cdot \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_Z)}{2} (1 + \text{ctg}^2 z_A) \quad \dots (10)$$

Wie bei der trigonometrischen Höhenmessung durch einseitig beobachtete Zenitdistanzen ist die Erfüllung dieser Bedingung (10) wieder von der Visurneigung abhängig, siehe dazu wieder Abb. 3. Besonders unangenehm wird diese Abhängigkeit bei steilen Visuren werden, die ja hier für Höhenunterschiedsmessungen im Gebirge im Blickpunkt des Interesses stehen.

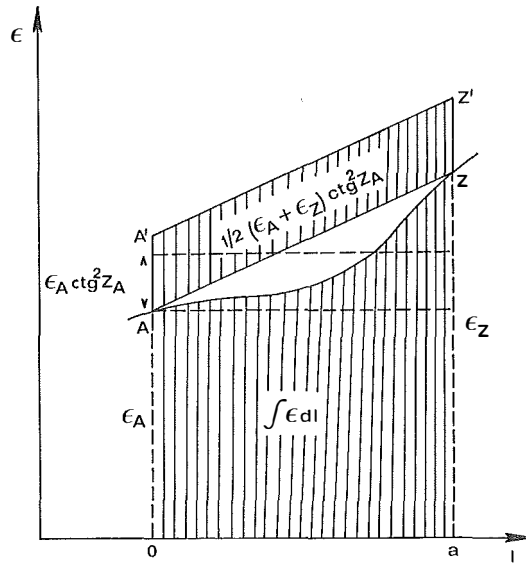


Abb. 3

Man kann also aus Vorstehendem den Schluß ziehen, daß die trigonometrische Höhenmessung mit gegebener *horizontaler* Seite bei steilen Visuren sowohl für einseitig als auch gegenseitig beobachtete Zenitdistanzen im allgemeinen nicht im Stande ist, geometrische Nivellementhöhendifferenzen zu liefern. Dies gilt auch für den Grenzfall, daß die Seitenlängen des trigonometrischen Nivellements (zusammengehängte trigonometrische Höhenmessungen) gegen diejenigen des geometrischen Nivellements gehen. Diesen Umstand hat *Gleinswick* [2] schon angemerkt, doch erkannte er nicht die Abhängigkeit dieses Effektes von der Wahl der Seitenlängenbestimmung.

3. Trigonometrische Höhenmessung bei gegebener schiefer Seite

Durch die Entwicklung von leistungsfähigen und einfach zu bedienenden elektrooptischen Entfernungsmeßgeräten wird die trigonometrische Höhenmessung mit direkt gemessenen schiefen Seiten zunehmend an praktischer Bedeutung gewinnen.

3.1 Trigonometrische Höhenformeln für ellipsoidische Zenitdistanzen

In diesem Kapitel ist zunächst nur der ellipsoidische Höhenunterschied von Interesse. Es sind also die beobachteten Zenitdistanzen schon um die Lotabweichungskomponenten korrigiert. Wieder kann man aus Abb. 1 die geometrischen Zusammenhänge und Beziehungen entnehmen. Als strenge Lösung der Aufgabe bietet sich eine Berechnung in zwei Stufen an. Zuerst wird der halbe Zentriwinkel $\gamma/2$ nach Gleichung (11) gerechnet

$$\gamma/2 = \frac{s \cdot \sin \zeta_A}{2r + s(2 - \overline{k}_A) \cos \zeta_A} \quad \dots (11)$$

und damit dann nach Gleichung (12) der ellipsoidische Höhenunterschied

$$\Delta h_{AZ} = s [1 - (\gamma/2)^2] \cos [\zeta_A - \gamma/2 (1 - \overline{k}_A)] \quad \dots (12)$$

ermittelt. Dieser strengen Lösung steht eine Näherungslösung (13) gegenüber:

$$\Delta h_{AZ} = s \cdot \cos \zeta_A + \frac{(1 - \overline{k}_A)(s \cdot \sin \zeta_A)^2}{2r} \quad \dots (13)$$

Der Differenzbetrag zwischen der strengen Lösung (11, 12) und der Näherungslösung (13) wurde in [1] näher untersucht. Hier soll nur das Resultat in Form eines Diagramms (Abb. 4) wiedergegeben werden. Mit dem Höhenunterschied ΔH und der horizontalen Entfernung a als Eingangswerte der Höhenbestimmungsaufgabe kann man in Abb. 4 bequem jenen Fehler in Millimeter ablesen, der entsteht, wenn man die Näherungslösung statt der strengen Lösung zur Berechnung des Höhenunterschiedes benützt. Für die Reichweite der elektrooptischen Nahbereichs-Entfernungsmeßgeräte kann bedenkenlos die Näherungslösung verwendet werden.

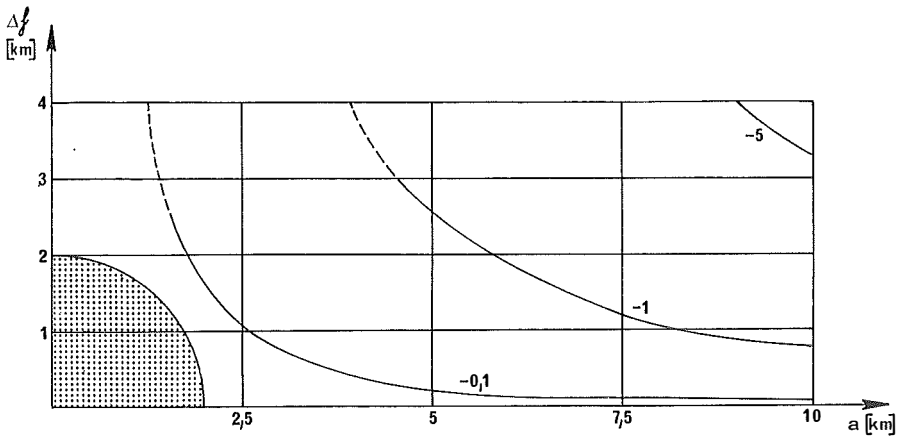


Abb. 4

Für die trigonometrische Höhenformel gegenseitiger Zenitdistanzen kann gezeigt werden [1], daß die Differenz der Hauptglieder der Hin- und Rückmessung unabhängig vom Krümmungsradius des Normalschnittes (ohne Beachtung der Refraktion) gleich dem doppelten Höhenunterschied Δh_{AZ} ist. Man wird daher den ellipsoidischen Höhenunterschied $\overline{\Delta h}_{AZ}$ bei gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen mit ausreichender Genauigkeit und unter Beachtung der Refraktion nach Gleichung (14) rechnen.

$$\overline{\Delta h}_{AZ} = \frac{1}{2} s (\cos \zeta_A - \cos \zeta_Z) - \frac{(s \cdot \sin \zeta_A)^2}{4r} (\overline{k}_A - \overline{k}_Z) \quad \dots (14)$$

3.2 Art der Höhenunterschiede, wenn nur beobachtete Zenitdistanzen vorliegen

Werden die tatsächlich beobachteten Zenitdistanzen statt der ellipsoidischen Zenitdistanzen zur Berechnung des ellipsoidischen Höhenunterschiedes verwendet, so findet man diesen Zusammenhang durch Einsetzen der Gleichung (1) in Gleichung (13). Als Resultat findet man durch Reihenentwicklung und unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Gleichung (15)

$$\Delta h = \Delta H - \varepsilon_A (s \cdot \sin z_A) = \Delta H - \varepsilon_A \cdot a, \quad \dots (15)$$

wobei ΔH für jenen Höhenunterschied steht, der sich mit der tatsächlich beobachteten

Zenitdistanz z_A aus Gleichung (13) ergibt und für $(s \cdot \sin z_A)$ die horizontale Entfernung a mit genügender Genauigkeit eingesetzt wird. Wird die Gleichung (7), für das geometrische Nivellement, der Gleichung (15) gleichgesetzt, so erhält man den wichtigen Zusammenhang zwischen der trigonometrischen Höhenmessung mit schief gemessener Seite und dem geometrischen Nivellement. Damit also der trigonometrisch bestimmte Höhenunterschied mit der geometrischen Nivellementhöhen-differenz übereinstimmt, muß Gleichung (16) erfüllt sein.

$$\varepsilon_A \cdot a = \int_0^a \varepsilon \cdot dl \quad \dots (16)$$

Den wesentlichen Unterschied zur Formel (8), also der trigonometrischen Höhenmessung bei gegebener horizontaler Distanz, erkennt man darin, daß die Bedingung (16) unabhängig von der Zenitdistanz ist. Allerdings werden wieder nur ganz bestimmte Umstände dazu führen, daß die Fläche unter der Lotabweichungskurve mit der Fläche $(\varepsilon_A \cdot a)$ übereinstimmt.

Nun soll noch der Fall der trigonometrischen Höhenmessung mit gegenseitigen Zenitdistanzen betrachtet werden. Werden statt der ellipsoidischen die beobachteten Zenitdistanzen zur Berechnung des Höhenunterschiedes benützt, so resultieren daraus nur dann geometrische Nivellementhöhendifferenzen, wenn Gleichung (17) erfüllt ist.

$$a \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_Z)}{2} = \int_0^a \varepsilon \cdot dl \quad \dots (17)$$

Graphisch bedeutet das, daß die Fläche unter der Lotabweichungskurve mit der Trapezfläche $O A Z a (O)$ in Abb. 3 übereinstimmen muß, allerdings ist diese Bedingung nun unabhängig von der Visurneigung. Man kann für den Grenzfall, daß die Seitenlängen des trigonometrischen gegen jene des geometrischen Nivellements gehen, leicht aus Gleichung (17) erkennen, daß die trigonometrische Höhenmessung mit *schief* gemessener Seite sehr wohl imstande ist, geometrische Nivellementhöhen-differenzen zu liefern.

4. Schlußfolgerungen

Zur trigonometrischen Höhenmessung werden in der Praxis nur beobachtete Zenitdistanzen verwendet, dadurch ergeben sich über die Lotabweichungen der Standpunkte, die Zusammenhänge zwischen den geometrischen Nivellementhöhen und den ellipsoidischen Höhen. Die trigonometrische Höhenmessung mit gegebenen *horizontalen* Seiten (bei steilen Visuren) ergibt als Grenzfall, die Seitenlängen gehen gegen die des geometrischen Nivellements, nicht das geometrische Nivellement. Nur die trigonometrische Höhenmessung mit gemessenen *schiefen* Entfernungen wird im Grenzfall mit dem geometrischen Nivellement, unabhängig von den Visurneigungen, übereinstimmen. Für die trigonometrische Messung von Höhendifferenzen im Gebirge ergibt sich daher aus den theoretischen Ableitungen die Folgerung, daß nur das

trigonometrische Nivellement mit *schief* gemessenen Seiten imstande sein kann, geometrische Nivellementhöhenunterschiede zu liefern.

Literatur

- [1] *Brunner, F. K.*: Beiträge zum trigonometrischen Nivellement im Gebirge. Dissertation der Fakultät für Naturwissenschaften der Technischen Hochschule Wien, 1972.
- [2] *Gleinsvik, P.*: Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln. Mitteilungen aus dem Geodätischen Institut an der ETH. Zürich, Nr. 7, 1960.
- [3] *Jordan-Eggert-Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde. 10. Auflage, Band III, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1956.
- [4] *Ledersteiger, K.*: Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung. *ÖZfV*, 43 (1955); 33–39, 65–73.

Notiz zur analytischen Berechnung des ebenen Rückwärtsschnittes

Von *Gerhard Brandstätter*, Graz

Für jedes Rechenhilfsmittel, das dem Vermessungsingenieur im Laufe der Zeit zur Verfügung stand, wurden stets auch die günstigsten Berechnungsmethoden entwickelt. So vermied man durch diverse Kunstgriffe additive Ausdrücke bei Anwendung der dekadischen Logarithmen und die mechanischen Rechenmaschinen führten zu den bekannten trigonometrisch-analytischen Berechnungsmethoden. Auch für die erste Generation der elektronischen Bürocomputer waren diese noch angemessen, während die bereits kleinen EDV-Anlagen entsprechende jüngste Generation derselben zwangsläufig zur Anwendung rein analytischer Methoden führt, weil auf diesem Wege numerische Probleme am besten überblickt werden.

Diese skizzierte Entwicklung wird besonders deutlich an der Unzahl von Lösungen für den ebenen Rückwärtsschnitt sichtbar. Leider ist keine davon für die Datenverarbeitung wirklich praktikabel. Es wird daher im folgenden eine höchst einfache analytische Lösung vorgeschlagen, die bereits als Programm für den neuesten Mikrocomputer P 652 der Firma Olivetti getestet wurde.

Für die Bestimmung eines Neupunktes $N(y, x)$ werden in der Regel drei Richtungen R_i zu sichtbaren Festpunkten $P_i(y_i, x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) gemessen, die sich von den orientierten Richtungen v_i um die Orientierungskonstante o unterscheiden, so daß die bekannte Beziehung

$$\tan(R_i + o) = \frac{\tan R_i + \tan o}{1 - \tan R_i \tan o} = \frac{y_i - y}{x_i - x} \quad \dots (1)$$

dreimal angewendet werden kann. Hieraus folgen nach einfacher Umformung die drei linearen Gleichungen

$$u + \tan R_i^* v + (x_i + y_i \tan R_i) w = y_i - x_i \tan R_i \quad \dots (2)$$

mit den Hilfsunbekannten

$$u = y - x \tan o, \quad v = -(x + y \tan o), \quad w = \tan o.$$