

Paper-ID: VGI_197304



Das Abbildungsgesetz der Übersichtskarte von Österreich 1:500000

Oswald Knoll ¹

¹ *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **61** (1), S.
20–26

1973

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Knoll_VGI_197304,  
  Title = {Das Abbildungsgesetz der {"U}bersichtskarte von {"0}sterreich  
    1:500000},  
  Author = {Knoll, Oswald},  
  Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {20--26},  
  Number = {1},  
  Year = {1973},  
  Volume = {61}  
}
```



Das Abbildungsgesetz der Übersichtskarte von Österreich 1:500 000

Von *Oswald Knoll*, Wien

Zusammenfassung

Zunächst werden die wesentlichsten Gründe genannt, die zu einer Neugestaltung einer Karte von Österreich 1:500000 führten.

Die allgemeinen Konformitätsbedingungen leiten über zu den Abbildungsgleichungen der konformen Kegelabbildung mit zwei längentreuen Parallelkreisen.

Die vorhandenen Rechenhilfsmittel zwangen die Berechnung teilweise logarithmisch bzw. mittels einer Sprossenradmaschine durchzuführen, die verwendeten Formeln mußten dem angepaßt werden. Die erforderlichen Gitterpunkte wurden nur zu einem Teil streng berechnet, ansonsten durch Approximationsverfahren bestimmt.

Summary

At first, the reasons for the reorganisation of the map 1:500000 of Austria are explained. The general conditions of conformal mapping lead to the conformal conic projection with two true parallels. The formulas used were evaluated partly with logarithmic tables, partly with a mechanical desk calculating machine. Of the necessary grid points only some were computed rigorously, the others were determined by an approximate procedure.

1. *Einleitung*

Im Jahre 1968 wurde die Übersichtskarte von Österreich 1:500000 veröffentlicht.

Bis dahin stand die Karte der Republik Österreich gleichen Maßstabes in Gebrauch, die nicht nur veraltet war, sondern schon von der Konzeption her nicht den Anforderungen entsprechen konnte, die an moderne Karten gestellt werden. Der im Jahre 1935 entstandenen Originalzeichnung lag keine einheitliche Projektion zugrunde. Kartenblätter der Generalkarte von Mitteleuropa 1:200000 waren nach photographischer Verkleinerung aneinander gefeldert worden und hatten die kartographische Grundlage für die Originalzeichnung gebildet.

Als im Jahre 1952 ein Namenverzeichnis zur Karte der Republik Österreich erstellt werden sollte, ergaben sich bei der Konstruktion des Suchgitters Schwierigkeiten, die sich noch vermehrten, als einige Jahre später für Zwecke der Landesverteidigung eine Sonderanfertigung, enthaltend das Gauß-Krüger-Gitternetz, zu drucken war.

Überprüfungen ergaben, daß die Karte der Republik bedeutende Lagefehler aufwies. Korrekturen wurden versucht, blieben jedoch wirkungslos, umso mehr als durch jahrelang durchgeführte Evidenznachträge die Strichschärfe der Kartenelemente auf den Astralonfolien gelitten hatte. Nur eine vollständige Neubearbeitung in einer einheitlichen Projektion konnte Abhilfe schaffen.

Es war naheliegend, dem im Jahre 1963 begonnenen Entwurf zu einer neuen Karte von Österreich 1:500000 jene Abbildung zugrunde zu legen, die bereits die Luftfahrtkarte von Österreich 1:500000 aufwies.

Gemäß den internationalen Richtlinien sind Luftfahrtkarten in einer winkeltreuen Abbildung zu entwerfen. Die europäischen Staaten entschieden sich für die Lambertsche konforme Kegelabbildung mit zwei längentreuen Parallelkreisen [2]. Österreich hat abweichend von den dabei empfohlenen längentreuen Parallelkreisen, entsprechend seiner geographischen Lage, die längentreuen Parallelkreise in 46° und 49° Breite gewählt.

2. Die konforme Kegelabbildung mit zwei längentreuen Parallelkreisen

2.1 Formelentwicklung

Rechenumfang und -methodik sowie vorhandene Rechenhilfsmittel führten zur Verwendung nachfolgender Formeln bei der Berechnung, so daß Potenzreihen, wie sie z. B. Hubeny in der ÖZfVW, Jg. 1949, Seite 126–140 angegeben hat, nicht benutzt wurden.

Mit Hilfe des Abbildungstheorems von Tissot und der Tissotschen Indikatrix ergeben sich die allgemeinen Bedingungen für eine konforme Abbildung:

$$a = b \quad \dots(1)$$

$$\beta = \bar{\beta}. \quad \dots(2)$$

a und b sind die beiden Halbachsen der Verzerrungsellipse.

Je zwei von den Punkten P (Mittelpunkt des Einheitskreises) und \bar{P} (Verzerrungsellipse) ausgehende Richtungen schließen die Winkel β und $\bar{\beta}$ ein. Es besteht die umkehrbar eindeutige Zuordnung $P \leftrightarrow \bar{P}$.

Die Indikatrix bildet sich als Kreis ab und das Vergrößerungsverhältnis oder der Maßstab der Abbildung

$$\frac{\text{Radius der Indikatrix}}{\text{Radius des Einheitskreises}} = m \quad \dots(3)$$

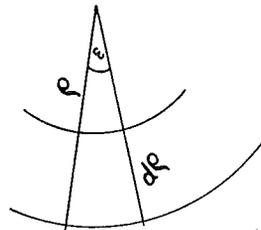
ist unabhängig von der Richtung.

Wegen (1), (2), (3) und den Abbildungen 1a, b kann gesetzt werden

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{\rho \varepsilon}{N \cos \varphi d\lambda}. \quad \dots(4)$$



Ellipsoid
Abb. 1a



Abbild
Abb. 1b

Die orthogonalen Flächenparameter φ und λ entsprechen geographischer Breite und Länge. Das negative Vorzeichen drückt entgegengesetzt verlaufende Wachstumsrichtungen von ρ und φ aus. M und N sind die Krümmungshalbmesser der Hauptnormalschnitte des Ellipsoids.

Wird $\frac{\varepsilon}{d\lambda} = \alpha$ gesetzt, folgt aus (4)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = -\alpha dq = -d\bar{q} \quad [1]. \quad \dots(5)$$

dq ist das Differential der isometrischen Breite. Die isometrische Breite bestimmt sich somit durch

$$q = \int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}.$$

Da $M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ und $N = \frac{a}{W}$ ist, ergibt sich nach (5)

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{W^2 \cos \varphi}. \quad \dots(6)$$

$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}$, e ist die erste numerische Exzentrizität des Erdellipsoids.

Wird die Integration auf der linken Seite von (6) ausgeführt und zerlegt man das Differential der isometrischen Breite unter dem Integralzeichen in Partialbrüche, erhält man

$$\ln \rho = -\alpha \int \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \frac{e^2 \cos \varphi}{2(1+e \sin \varphi)} - \frac{e^2 \cos \varphi}{2(1-e \sin \varphi)} \right) d\varphi$$

und integriert

$$\ln \rho = -\alpha \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right] + \ln C \quad \dots(7)$$

mit $\ln C$ als Integrationskonstante.

Wird der natürliche Logarithmus durch den dekadischen ersetzt und bezeichnet man mit

$$E = \left(\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}$$

erhält man

$$\lg \rho = -\alpha \left[\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \lg E \right] + \lg C. \quad \dots(8)$$

Setzt man

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{E} = U,$$

ist nach (7)

$$\ln \rho = -\alpha \ln U + \ln C$$

und

$$\rho = CU^{-\alpha}. \quad \dots(9)$$

Wegen (5) ergibt sich in Übereinstimmung mit [1]

$$\ln \rho = -\alpha q + \ln \bar{c} = -\bar{q} + \ln \bar{c},$$

$$\rho = \bar{c} e^{-\bar{q}} \quad (e = \text{Basis der natürl. Logarithmen})$$

daher

$$\bar{c} e^{-\bar{q}} = CU^{-\alpha}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{c} &= C \\ \ln U &= q. \end{aligned}$$

Sollen die Parallelkreise mit den Radien r_1 und r_2 längentreu abgebildet werden, ergibt sich an Hand der Abbildungen 1a, b

$$r_1 d\lambda = \rho_1 \varepsilon \qquad r_2 d\lambda = \rho_2 \varepsilon.$$

Da

$$r_1 = \rho_1 \alpha \qquad \text{und} \qquad r_2 = \rho_2 \alpha,$$

folgt unter Berücksichtigung von (9)

$$\begin{aligned} \lg r_1 &= -\alpha \lg U_1 + \lg \alpha + \lg C \\ \lg r_2 &= -\alpha \lg U_2 + \lg \alpha + \lg C. \end{aligned}$$

Durch Differenzbildung wird erhalten

$$\alpha = \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\lg U_2 - \lg U_1} = \frac{\lg(N_1 \cos \varphi_1) - \lg(N_2 \cos \varphi_2)}{\lg U_2 - \lg U_1}. \quad \dots(10)$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich wegen (9) aus

$$\begin{aligned} \rho_1 &= CU_1^{-\alpha} \\ \rho_2 &= CU_2^{-\alpha}, \end{aligned}$$

somit

$$\frac{r_1}{\alpha} = CU_1^{-\alpha} \qquad \frac{r_2}{\alpha} = CU_2^{-\alpha}$$

und

$$c = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha}. \quad \dots(11)$$

2.2 Durchführung der Berechnung

Der Bereich der Übersichtskarte von Österreich ist überwiegend durch die Österreichische Karte 1:50000 gedeckt. Der kartographische Entwurf beruhte daher hauptsächlich auf dieser Karte, die als Gradabteilungskarte von den geographischen Netzlinien 15×15 Minuten begrenzt wird. Es hätte somit genügt, geographische Netzmaschenpunkte in diesen Abständen zu berechnen. Die Abbildung fand jedoch auch für die Luftfahrtkarte von Österreich 1:500000 Verwendung, die ein durchgezogenes geographisches Netz in den Abständen von 10 zu 10 Minuten aufweist, so daß die Einpassung der generalisierten Kartenblätter nach diesen konstruierten geographischen Netzlinien vorgenommen wurde.

Eine strenge Berechnung erfolgte nur für einen Teil der erforderlichen Punktmenge, also nur für eine genügend große Anzahl von Stützstellen der Abbildungsfunktion. Die restliche Punktmenge ergab sich durch lineare und quadratische Interpolation.

Die Verschiebung und Verdrehung der Dreiecksnetze benachbarter Staaten in bezug auf idente Netzpunkte des österreichischen Netzes und der Unterschied zwischen stimmigem und unstimmigem Blattrand der Österreichischen Karte 1:50000 wurde, wenn nötig, bei dem zur Generalisierung verwendeten Kartenmaterial durch entsprechende Korrektur der geographischen Netzlinien berücksichtigt.

Zunächst erfolgte die logarithmische Berechnung von U aufgrund des Klammerausdruckes von (8), unter Verwendung von Tabellenwerten für $\lg E$ bezogen auf das Besselsche Erdellipsoid, sodann nach (10), (11) und (9) für α , C und ρ .

Es ergab sich

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,737\,357\,5\dots \\ \lg C &= 7,068\,165\,5\dots\end{aligned}\quad \dots(12)$$

Kartiert wurde in rechtwinkligen Koordinaten; die geforderte Genauigkeit im Maßstab 1:500000 betrug $\pm 0,04$ mm. Es war daher hinreichend, die Radien nach (9) in Abständen von 30 zu 30 Minuten zu bestimmen, wie sie nachstehende Tabelle zeigt.

φ	46°	46,5°	47°	47,5°	48°	48,5°	49°
ρ_{mm} 1:500000	12036,99	11925,86	11814,73	11703,60	11592,46	11481,31	11370,14

Die Übersichtskarte reicht von 9°30' bis 17°10' östlich von Greenwich und hat die Blatteckpunkte in 49°12' Breite im Norden und 45°55' Breite im Süden. Der Bezugsmeridian liegt 13°20' östlich von Greenwich.

Um positive Auftragswerte zu erhalten, wurde der Koordinatenursprung des cartesischen Netzes im Schnittpunkt Bezugsmeridian — 46° nördlicher Breite angenommen und die y -Werte mit einer additiven Konstanten (1000 mm) versehen.

Der Übergang von polaren zu rechtwinkligen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned}y_{red} &= \rho_{\varphi red} \sin \varepsilon \\ x_{red} &= \rho_o - \rho_{\varphi red} \cos \varepsilon.\end{aligned}\quad \dots(13)$$

x_{red} , y_{red} und ρ_{red} sind hier bereits auf den Maßstab 1:500000 bezogen. Eine strenge Berechnung für die y -Werte erfolgte gleichfalls nur für Netzmaschenpunkte in den Abständen von 30 zu 30 Minuten. Durch lineare Interpolation wurde die restliche Punktmenge der y -Werte ermittelt.

Um die ε -Werte berechnen zu können, genügt es, den Winkel $\Delta\varepsilon$ zwischen Bezugsmeridian und einem beliebigen, am Rande des Abbildungsgebietes liegenden Meridian zu bestimmen, und die übrigen ε durch lineare Interpolation zu ermitteln. Es wurde deshalb $\Delta\varepsilon \triangleq \Delta\lambda = 4^\circ$ festgelegt. Dies entspricht einem Wert von

$$\Delta\varepsilon = 176',9658\dots$$

Um sich das oftmalige Nachschlagen der Cosinus-Funktion zu ersparen, sind die x -Werte nicht nach (13) berechnet, sondern wie folgt ermittelt worden:

Die Gleichung eines Parallelkreises als Scheiteltgleichung eines Kreises lautet

$$\begin{aligned}(\rho - \Delta x)^2 + y^2 &= \rho^2 \\ y^2 &= 2\rho\Delta x - \Delta x^2,\end{aligned}\quad \dots(14)$$

wenn die Abszissen vom Schnittpunkt des Bezugsmeridians mit dem jeweiligen Breitenkreis an gezählt als Δx -Werte bezeichnet werden. Δx^2 kann man als kleine Größe höherer Ordnung vernachlässigen und man erhält daher nach (14)

$$\Delta x = \frac{y^2}{2\rho}.\quad \dots(15)$$

Die Approximation eines Parallelkreises erfolgt damit durch eine Parabel, deren Scheitel im Schnittpunkt Bezugsmeridian-Breitenkreis liegt und die Netzlinie $x = \text{const.}$ ist zugleich Scheiteltangente.

Die x -Werte ergeben sich mit $x_\varphi = \rho_{46} - \rho_\varphi$ zu

$$x = x_\varphi + \Delta x.$$

Nach (15) wurden je Parallelkreis zwei Abszissenwerte errechnet. Die übrigen x -Werte ergaben sich folgendermaßen:

Je Parallelkreis entstehen durch drei Koordinatenwerte — einschließlich o für den Bezugsmeridian — zwei Intervalle. Innerhalb dieser Intervalle können mit hinreichender Genauigkeit gleichabständige Ordinatenwerte, wie z. B. für den vorliegenden Fall von 10 zu 10 Minuten, angenommen werden. Bezeichnet man mit Δx_n den Abszissenwert jeweils am Ende eines Intervalles, berechnen sich $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \dots$ zu

$$\Delta x_1 = \frac{1}{n^2} \Delta x_n, \quad \Delta x_2 = \frac{4}{n^2} \Delta x_n, \quad \Delta x_3 = \frac{9}{n^2} \Delta x_n, \quad \dots \quad \Delta x_\mu = \frac{\mu^2}{n^2} \Delta x_n$$

entsprechend (15), wenn $y_\mu = \frac{\mu}{n} y_n$ gesetzt wird.

Die Abbildung ist achsensymmetrisch. Es genügt daher — wie auch schon bei der Bestimmung der y -Werte praktiziert — die x -Werte für ein Intervall, das zwischen Bezugs- und Grenzmeridian der Karte liegt, zu berechnen.

2,3 Verzerrungsverhältnisse

Die Längenverzerrung ist das Verhältnis von Bild- zu Ellipsoidstrecke.

$$\frac{ds^2}{dS_2^2} = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

E, F, G und $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ sind die Gaußschen Fundamentalgrößen erster Ordnung, wie sie sich aus der Gaußschen Flächentheorie ergeben. E, F, G gelten für das Ellipsoid und $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ für die Bildebene.

Weil die Längenverzerrung — auch als Vergrößerungsverhältnis bezeichnet — bei konformen Abbildungen wegen (3) für alle von einem Punkt ausgehende Richtungen konstant ist, kann man setzen

$$\frac{ds_u^2}{dS_u^2} = \frac{\bar{E}}{E} \qquad \frac{ds_v^2}{dS_v^2} = \frac{\bar{G}}{G}$$

oder

$$\sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = a = b.$$

a und b sind wieder die Halbachsen der Tissotschen Indikatrix. \bar{E} und \bar{G} ergeben sich bekanntlich zu

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2$$

mit x und y als cartesische Parameter in der Bildebene.

Führt man für u, v die Parameter des Erdellipsoids φ und λ entsprechend der Zuordnung

$$x = x(\varphi, \lambda) \qquad y = y(\varphi, \lambda)$$

ein, erhält man nach (13) unter Berücksichtigung von $\varepsilon = \alpha d\lambda$

$$\bar{E} = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \qquad \bar{G} = \alpha^2 \rho^2$$

und da $E = M^2$, $G = N^2 \cos^2 \varphi$ ist, folgt

$$a = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = -\frac{1}{M} \frac{d\rho}{d\varphi} \qquad b = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = \frac{\alpha \rho}{N \cos \varphi}$$

Das negative Vorzeichen für den Ausdruck $\sqrt{\frac{\bar{E}}{E}}$ ist wieder wegen der entgegengesetzt verlaufenden Wachstumsrichtungen von ρ und φ gesetzt. Bildet man den Differentialquotienten $\frac{d\rho}{d\varphi}$ nach (5), wird für

$$a = \frac{\alpha \rho}{N \cos \varphi} \qquad \dots (16)$$

erhalten und es ergibt sich somit $a = b$.

Da die Übersichtskarte kaum über die Parallelkreise 46° und 49° hinausreicht, sei als Beispiel noch die Längenverzerrung in $47^\circ,5$ Breite angegeben.

Nach (16) erhält man, wenn die entsprechenden Zahlenwerte gesetzt werden,

$$a = b = 0,999\ 658 \dots \qquad \dots (17)$$

Die Flächenverzerrung $\frac{df}{df}$ ist durch das Flächenverhältnis von Indikatrix zu Einheitskreis gegeben

$$\frac{ab\pi}{\pi} = ab \triangleq a^2 = b^2.$$

Für die Breite $47^\circ,5$ wird aus (17) $0,99932\dots$ erhalten.

Wird die Längenverzerrung (17) für die Parallelkreise 46° und 49° berechnet, ergibt sich der Wert 1 und damit eine längentreue Abbildung dieser Parallelkreise.

Literatur:

[1] Hubeny, K.: Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids. Sonderheft 13 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, 1953.

[2] Knorr, H.: Zur Bearbeitung der Luftfahrtkarte — Aeronautical Chart — ICAO 1:500000 von Deutschland. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe I: Deutsche Beiträge und Informationen, 1. Jg. 1956 — Nr. 1, S. 12.

[3] Nábauer, M.: Mathematische Grundlagen, Ausgleichsrechnung. Handbuch der Vermessungskunde, 10. Aufl., Jordan/Eggert/Kneissl, Bd. I, 1961.