Paper-ID: VGI_197218

# Zum Artikel “Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers“ von Anton Kossina

Wladimir K. Hristov [1]

[1] *Bulgarische Akademie d. Wissenschaften, ul. 7 Noemvri No. 1, Sofia*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (4), S. 111–116

1972

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hristov_VGI_197218,
Title = {Zum Artikel ‘‘Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers
    ‘‘ von Anton Kossina},
Author = {Hristov, Wladimir K.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {111--116},
Number = {4},
Year = {1972},
Volume = {60}
}
```

als schönstes Ergebnis der jüngsten Zeit die Erkenntnis, daß es einen minimalen Kernradius der Erde geben muß.

Die weltweite Anerkennung und Wertschätzung seiner außerordentlichen wissenschaftlichen Leistungen ist durch Einladungen zu zahlreichen Inlandsvorträgen, zu mehr als 150 Vorträgen im näheren und weiteren Ausland sowie zu wiederholten Gastprofessuren in Braunschweig, Dresden, München und Moskau dokumentiert; seine wissenschaftliche Geltung und sein internationales Ansehen erhielten ihren sichtbaren Ausdruck in einer Reihe von Ehrungen.

Bereits 1950 wurde Ledersteger zum korrespondierenden Mitglied der Deutschen geodätischen Kommission gewählt. Im November 1953 erfolgte seine Wahl zum Mitglied der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und im Jänner 1961 zu deren Präsidenten. Durch zwei Perioden war er Sekretär der Sektion Geoid der Internationalen Assoziation für Geodäsie. Er war weiter Mitglied der Geophysikalischen Kommission sowie Mitglied der Astronomischen Kommission und der Kommission für Weltraumforschung bei der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und österreichischer Delegierter in der Internationalen Kommission für die Satellitentriangulierung. Am 7. Mai 1960 verlieh ihm die Technische Hochschule Graz das Ehrendoktorat der technischen Wissenschaften; am 17. Februar 1961 wählte ihn die Bayerische Akademie der Wissenschaften zum korrespondierenden Mitglied; am 30. Mai 1961 erfolgte seine Wahl zum korrespondierenden Mitglied und am 22. Mai 1962 seine Wahl zum wirklichen Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften; am 3. Mai 1967 wurde er zum Ehrenmitglied der Akademie der ungarischen Wissenschaften gewählt; am 14. April 1970 wurde er mit dem Technikerpreis der Wiener Wirtschaft ausgezeichnet und am 4. November 1970 vollzog die Technische Universität Dresden seine Promotion zum Dr.-Ing. ehrenhalber.

Professor Ledersteger war ein überzeugender und von seinen Hörern hoch geschätzter Vortragender, der es verstand, auch schwierige Probleme seiner Vorlesungen und Vorträge leicht verständlich darzustellen. Mit seinen berühmten Vorgängern Joseph Herr, Wilhelm Tinter, Richard Schumann und Friedrich Hopfner gehört er zu einem strahlenden Fünfgestirn der Forschung und Lehre; sein freundliches Wesen und seine herzliche Verbundenheit zu seinen Kollegen und seinen Schülern wird ihm, der seiner Hochschule und seinem Heimatlande viel Ehre eingebracht hat, ein gutes Gedenken bewahren. *Friedrich Hauer*

## Zum Artikel „Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers“ von Anton Kossina

Von *Wladimir K. Hristov*, Sofia

Der obige Artikel ist in der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“ Nr. 1, 1972, S. 2—5, veröffentlicht. Zur Klärung des dort dargestellten Sachverhaltes ist eine Ergänzung notwendig.

Der Autor dieser Ergänzung hat den Sachverhalt in seinem Buche „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematischen Statistik und Methode der kleinsten Quadrate", VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1961, 3.5 Streuungsellipse, S. 122—129, streng dargelegt. Hier werden nur die Schlußformeln und -resultate gegeben.

Wenn wir die wahren Werte mit $a$ bzw. $b$, die Standards mit $\sigma_1$ bzw. $\sigma_2$ und den Korrelationskoeffizienten mit $\rho$ bezeichnen, so haben wir für die normalen Größen $x$ und $y$ die folgende differentielle simultane Verteilung nach Bravais

$$(1)\quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\frac{(x-a)\,(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2}\right)\right]. \qquad \ldots (1)$$

Wenn wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$ gleich einer Konstante setzen, so bekommen wir als Linie gleicher Wahrscheinlichkeit eine Ellipse

$$(2)\qquad \frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\frac{(x-a)\,(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2} = \lambda^2 = \text{const.}, \qquad \ldots (2)$$

die wir mit $E(\lambda)$ bezeichnen, natürlich unter der Voraussetzung, daß $x$, $y$ kartesische Koordinaten sind.

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Eintreffen des Punktes $(X, Y)$ innerhalb der Ellipse $E(\lambda)$ liegt

$$(3)\qquad P(\lambda) = \iint\limits_{E(\lambda)} f(x, y)\, dx\, dy \qquad \ldots (3)$$

und bekommen

$$(4)\qquad P(\lambda) = 1 - \exp\left[-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right]. \qquad \ldots (13)$$

Wir legen durch den Mittelpunkt $(a, b)$ der Ellipse ein neues Koordinatensystem $x'$, $y'$, wo die $x'$-Achse die Richtung $\alpha$ haben soll, und führen dadurch neue zufällige Größen $X'$ und $Y'$ ein

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= (X-a)\cos\alpha + (Y-b)\sin\alpha \\ Y' &= -(X-a)\sin\alpha + (Y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (14)$$

Wir bekommen als Dichte der Wahrscheinlichkeit für den Ort $(x', y')$

$$(6)\, f(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((Ax'^2 - 2Bx'y' + Cy'^2)\right)\right] \ldots (16)$$

worin bedeuten

$$(7)\qquad A = \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2{}^2} \qquad \ldots (17)$$

$$(8)\qquad B = \frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sigma_1{}^2} + \rho\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sigma_2{}^2} \qquad \ldots (18)$$

$$(9)\qquad C = \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1{}^2} + 2\rho\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2{}^2}. \qquad \ldots (19)$$

Für die Dichten der Wahrscheinlichkeit der separaten Verteilungen bekommen wir

(10) $$f_1(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y')\, dy' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{C}} \exp\left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 C} x'^2 \right]. \quad \ldots (23)$$

(11) $$f_2(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y')\, dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{A}} \exp\left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 A} y'^2 \right]. \quad \ldots (24)$$

Die Mittelwerte sind natürlich gleich Null

(12) $$M(X') = \int_{-\infty}^{+\infty} x' f_1(x')\, dx' = 0$$

(13) $$M(Y') = \int_{-\infty}^{+\infty} y' f_2(y')\, dy' = 0.$$

Es ist von Interesse, die Dispersionen von $X'$ und $Y'$ zu haben

(14) $$D(X') = \sigma_1'^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 f_1(x')\, dx' = \sigma_1^2 \sigma_2^2 C \quad \ldots (25)$$

(15) $$D(Y') = \sigma_2'^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y'^2 f_2(y')\, dy' = \sigma_1^2 \sigma_2^2 A. \quad \ldots (26)$$

Manche nennen $\sigma_1'$ und $\sigma_2'$ mittlere Koordinatenfehler von $x'$ und $y'$ statt Standards von $X'$ und $Y'$.

Interessant ist die Beziehung

(16) $$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \text{const.} \quad \ldots (28)$$

Nun nehmen wir für den Verschwenkungswinkel den Wert $\alpha_e$, bestimmt nach

(17) $$tg\, 2\alpha_e = \frac{2\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad \ldots (29)$$

Damit bekommen wir

(18) $$A_e = \frac{\cos^2 \alpha_e}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{\cos \alpha_e \sin \alpha_e}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\sin^2 \alpha_e}{\sigma_2^2} \quad \ldots (32)$$

(19) $$B_e = 0 \quad \ldots (31)$$

(20) $$C_e = \frac{\sin^2 \alpha_e}{\sigma_1^2} + 2\rho \frac{\cos \alpha_e \sin \alpha_e}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\cos^2 \alpha_e}{\sigma_2^2}. \quad \ldots (33)$$

Es findet sich für die Dichte der simultanen Wahrscheinlichkeit

$$(21)\quad f(x',y') = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,\sqrt{A_e\,C_e}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,C_e}\,x'^2 - \frac{1}{2\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,A}\,y'^2\right] \quad . \ (36)$$

Ein Vergleich mit (1) zeigt, daß die Größen $X'$ und $Y'$ bei diesem speziellen Koordinatensystem unkorreliert sind, $\rho = 0$.

Für die Dichten der separaten Wahrscheinlichkeit findet sich

$$(22)\quad f_1(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')\,dy' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{C_e}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2\,C_e}\,x'^2\right] \quad \ldots\ (32)$$

$$(23)\quad f_2(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')\,dx' = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{A_e}} \exp\left[-\frac{1}{2\,\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,A_e}\,y'^2\right]. \quad \ldots\ (38)$$

Es folgt sofort

$$(24)\qquad f(x',y') = f(x')\cdot f(y'), \qquad \ldots\ (39)$$

d. h., daß bei diesem speziellen Koordinatensystem die Größen $X'$ und $Y'$ voneinander unabhängig sind.

Es besteht der folgende Zusammenhang, der nicht immer beachtet wird:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{unkorreliert}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{unabhängig} & \text{abhängig} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \text{korreliert} \\ \downarrow \\ \text{abhängig} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{unabhängig} \\ \downarrow \\ \text{unkorreliert} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{abhängig}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{unkorreliert} & \text{korreliert} \end{array}$$

Wenn wir eine Funktion von zufälligen Größen haben, so ist für die Dispersion der Funktion von Bedeutung nur der Umstand, ob die zufälligen Größen korreliert oder nicht korreliert sind, aber nicht, ob sie abhängig oder nicht abhängig sind.

Die Größen $A_e$ und $C_e$ sind die Extremwerte von $A$ und $C$. Ebenso bekommen wir die Extremgrößen von $\sigma_1'$ und $\sigma_2'$

$$(25)\qquad \sigma_{1e} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{C_e} \qquad \ldots\ (41)$$

$$(26)\qquad \sigma_{2e} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{A_e}. \qquad \ldots\ (42)$$

Wir bilden jetzt den Abstand $r$

$$(27)\qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = x'^2 + y'^2 \qquad \ldots\ (46), (47)$$

und bilden den mittleren Wert davon, womit wir gerade

$$(28) \quad M(r^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x'^2 + y'^2) f(x', y')\, dx'\, dy' = \sigma_{1_e}{}^2 + \sigma_{2_e}{}^2 = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 = = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 \qquad \ldots (48)$$

bekommen.

Manche nennen das den mittleren Punktlagefehler, worunter man jedoch nichts klares versteht.

Es muß betont werden, daß Standards bzw. mittlere Fehler nur eindimensionale Größen haben, z. B. die Koordinaten, so daß wir schreiben können

$$(29) \qquad x_o = x \pm m_x, \qquad y_o = y \pm m_y.$$

Zwei- und mehrdimensionale Größen haben keine Standards bzw. mittlere Fehler und wir können nicht schreiben

$$(30) \qquad (x_o, y_o) = (x, y) \pm 3,$$

da dies absurd ist.

Es besteht große Unklarheit über den sogenannten „mittleren Punktlagefehler". Der sogenannte mittlere Punktlagefehler ist nichts anderes als der mittlere Wert der eindimensionalen Größe $r^2$. Ich betone, sowohl $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ als auch $r^2 = x'^2 + y'^2$ sind eindimensionale Größen, von denen bei $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma$ die erste die $\chi$-Verteilung

$$(31) \qquad \varphi\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \; x > o$$

und die zweite die $\chi$-Quadrat-Verteilung

$$(32) \qquad \varphi\left(x'^2 + y'^2\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\, e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \; x > o$$

hat mit zwei Freiheitsgraden [S. 2.09 Chi-Quadrat-Verteilung. Freiheitsgrade, 2.10 Umformungen der Chi-Quadrat-Verteilung].

Die Sache ist eigentlich sehr einfach: wir haben einmal eine Abweichung $r$ von der wahren Punktlage in beliebiger Richtung, und ein zweites Mal nehmen wir die Komponente dieser Abweichung in gegebener Richtung. Die beiden eindimensionalen Größen $r$ und $r^2$ haben nicht normale Verteilungen und darin eben besteht der Irrtum.

Wir wollen die mittlere (quadratische) Abweichung $d$ in beliebiger Richtung haben. Wir bekommen sie bekannterweise durch die sogenannte Fußpunktskurve zur Streuungsellipse mit den Halbachsen $\sigma_{1_e}$ und $\sigma_{2_e}$. Wir können uns das Koordinatensystem beliebig orientiert denken: die Fußpunktskurve gibt uns gerade die mittleren Fehler der Koordinaten.

Besonders einfach gestaltet sich die Sache, wenn die Streuungsellipse ein Kreis ist, mit dem auch die Fußpunktskurve zusammenfällt. Dann ist:

Mittleres Quadrat der Abweichung in gegebener Richtung

(33) $$m_x{}^2 = m_y{}^2 = d^2;$$

Mittleres Quadrat der Abweichung abgesehen von der Richtung

(34) $$M(r^2) = 2\,d^2;$$

Wahrscheinlichkeit für die Fehlerellipse

(35) $$P(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

*Zusammenfassung*

Bei Beobachtungen mit normaler Verteilung gilt für die Ergebnisse:

1) Die Dichte der simultanen Wahrscheinlichkeit wird durch die Formel von Bravais gegeben.

2) Die Linien mit gleicher Dichte der Wahrscheinlichkeit sind Ellipsen und eine davon ist die Streuungsellipse.

3) Die Abweichung in beliebiger aber fixierter Richtung hat normale Verteilung.

4) Die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat der Abweichung in beliebiger aber fixierter Richtung wird durch die Fußpunktskurve gegeben und ist der mittlere Koordinatenfehler in dieser Richtung.

5) Die Abweichung abgesehen von der Richtung bei Fehlerellipse=Kreis hat Chi-Verteilung.

6) Das Quadrat der Abweichung abgesehen von der Richtung bei Fehlerellipse=Kreis hat Chi-Quadrat-Verteilung.

7) Die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat der Abweichung abgesehen von der Richtung heißt konventionell „mittlerer Punktlagefehler“ und hängt in einfacher Weise mit den beiden mittleren Koordinatenfehlern zusammen.

8) Die zweidimensionalen Größen, nämlich die Koordinatenpaare, haben keine mittleren Fehler.

# Digitalisierung von photogrammetrisch erhaltenen Daten*)

Von *G. Otepka*, Wien

*Zusammenfassung:*

Die vorliegende Arbeit soll einen Überblick über Methoden, Möglichkeiten und Geräte geben, die heute zur Digitalisierung von photogrammetrischen Auswertungen verfügbar sind. Im Anschluß daran werden Schätzungen über den Umfang der zu digitalisierenden Datenmengen und der dazu notwendigen Speichermedien angegeben, sowie die Gründe für eine Digitalisierung in den verschiedenen Maßstäben erläutert. Den letzten Teil der Ausführungen bilden Anwendungsbeispiele.

## 1. *Einleitung*

Photogrammetrische Auswertungen erfolgen normalerweise in 3 Phasen:

1. Interpretation und Auswahl der im Meßbild dargebotenen Informationen

---

* Überarbeitete Fassung eines Vortrages an der TH Wien am 20. Oktober 1971 im Rahmen der Kolloquien der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen.