

Paper-ID: VGI_197214



Der Allgemeinfall kosmographischer Perspektiven

Herbert Lichtenegger ¹

¹ *II. Institut f. Geodäsie an der TH Graz, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (3), S. 85–90

1972

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Lichtenegger_VGI_197214,  
Title = {Der Allgemeinfall kosmographischer Perspektiven},  
Author = {Lichtenegger, Herbert},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {85--90},  
Number = {3},  
Year = {1972},  
Volume = {60}  
}
```



Dies könnte wiederum die Vorhersage von Erdbeben erleichtern, wesentliche Hinweise auf neue Bodenschätze geben, und die sinnvolle Nutzung der Weltmeere als Nahrungsmittelquelle, aber auch als Mittel zur unschädlichen Beseitigung gefährlicher Abfälle ermöglichen; das sind ja Fragen, die heute immer dringender werden.

Darüber hinaus war es schon seit jeher das Bestreben des Menschen, seinen Heimatplaneten immer besser kennen und verstehen zu lernen. Auch die theoretische Geodäsie hat hierzu ihren Beitrag zu leisten.

Der Allgemeinfall kosmographischer Perspektiven

Von Herbert Lichtenegger, Graz

Vorbemerkung

Als kosmographische Perspektiven werden perspektive Abbildungen von Kugelflächen aus großen Höhen definiert. In vorliegender Arbeit werden Formelsysteme für die Bildkoordinaten bei allgemeiner Lage der Abbildungsebene entwickelt, dabei ergeben sich durch Spezialisierung unmittelbar die in [1] angegebenen Systeme für Schräg- und Normalaufnahmen.

Bei der Entwicklung wird von der Grundgleichung der analytischen Photogrammetrie [2] ausgegangen, das Problem selbst ist auch in [3] in allgemeiner Form behandelt.

1. Grundlagen

Durch den Mittelpunkt O der abzubildenden Erdkugel mit dem Radius R sei ein Koordinatensystem gelegt, dessen e_3 -Achse zum Träger des Aufnahmesystems (Satellit S) weist, die e_2 -Achse liege orthogonal dazu in der Ebene des Ortsmeridians des Subsatellitenpunktes Su ($\varphi_0, \lambda_0 = 0$) und die e_1 -Achse bildet mit beiden ein Rechtssystem (Abb. 1).

In diesem System seien die Einheitsvektoren zum Aufnahmeort S und zum abzubildenden Punkt P (φ, λ) durch \underline{s}_0 bzw. \underline{s} dargestellt:

$$\underline{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} \sin z \sin a \\ \sin z \cos a \\ \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad \dots (1)$$

Dabei bedeutet a den Peilwinkel und z den Winkel zwischen \underline{s}_0 und \underline{s} .

Der Vektor \underline{s} kann aber auch in einem äquatorialem System (\underline{e}'_i) durch O dargestellt werden und sei dann mit \underline{s}' bezeichnet.

Wird eine orthogonale Matrix (Drehmatrix) R eingeführt, so bestehen nachfolgende Beziehungen:

$$\underline{s} = R \underline{s}', \quad \dots (2a)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \\ 0 & -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad \dots (2b)$$

Die Matrix \underline{A} ergibt sich aus drei Einzeldrehungen, es sei

$$\underline{A} = \underline{A}_3(\Theta) \underline{A}_1(-\gamma) \underline{A}_2(\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3). \quad \dots (6)$$

wobei die Indizes 1, 2, 3 Drehungen um die respektiven Achsen \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} bedeuten.

Für die Elemente von \underline{A} gelten die nachfolgenden Beziehungen:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \omega & - \sin \Theta \sin \gamma \sin \omega \\ -\sin \Theta \cos \omega & - \cos \Theta \sin \gamma \sin \omega \\ \cos \gamma \sin \omega \end{bmatrix}, \quad \dots (7a)$$

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cos \gamma \\ \cos \Theta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}, \quad \dots (7b)$$

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} -\cos \Theta \sin \omega & - \sin \Theta \sin \gamma \cos \omega \\ \sin \Theta \sin \omega & - \cos \Theta \sin \gamma \cos \omega \\ \cos \gamma \cos \omega \end{bmatrix}. \quad \dots (7c)$$

2. Abbildungsgleichungen

Für die koplanaren Vektoren \underline{s}_0 , \underline{s} und \underline{p} gilt die als Grundgleichung der Photogrammetrie bezeichnete Beziehung [2]

$$(R + H) \underline{s}_0 + \mu \underline{A} \underline{p}' = R \underline{s}. \quad \dots (8)$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$\mu \underline{p}' = R \underline{A}^T (\underline{s} - \sec \alpha \underline{s}_0). \quad \dots (9)$$

Es bedeuten μ einen Maßstabsfaktor und der eingeführte Winkel α , welcher durch die Beziehung

$$\sec \alpha = (R + H)/R$$

definiert ist, den Winkel unter dem der Grenzstrahl die Horizontebene des Subsatelliten durchstößt.

Zur expliziten Darstellung des Parameters μ sei wie in der analytischen Photogrammetrie üblich, die skalare Gleichung in Gl. (9) benützt, die die in Richtung \underline{e}_3 liegende Komponente bestimmt:

$$- \mu c = R \underline{a}_3^T (\underline{s} - \sec \alpha \underline{s}_0).$$

2.1. Der Allgemeinflfall

Durch Einsetzen obiger Gleichung für μ in die Gl. (9) erhält man die Gleichungen der Bildkoordinaten für den allgemeinen Fall, wenn für die Elemente von \underline{A} die Gln. (7) gesetzt werden:

$$x = -c \frac{a_1^T (s - \sec \alpha \underline{s}_0)}{a_3^T (s - \sec \alpha \underline{s}_0)} = -c \frac{a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}(s_3 - \sec \alpha)}{a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}(s_3 - \sec \alpha)} \dots (10a)$$

$$y = -c \frac{a_2^T (s - \sec \alpha \underline{s}_0)}{a_3^T (s - \sec \alpha \underline{s}_0)} = -c \frac{a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}(s_3 - \sec \alpha)}{a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}(s_3 - \sec \alpha)} \dots (10b)$$

Die Gleichungen beinhalten sechs konstante Parameter, die Daten der äußeren Orientierung, und zwar die Koordinaten des Aufnahmeortes (φ_0, λ_0, H) und die Drehwinkel (Θ, γ, ω).

2.2. Die Schrägaufnahme

Wird $\omega = 0$ gesetzt, so ergibt sich das Formelsystem für Schrägaufnahmen, das skalar angeschrieben folgend lautet:

$$x = c \sec \gamma N [\cos \Theta \cos \varphi \sin \lambda - \sin \Theta (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi_0)],$$

$$y = c N [\sin \Theta \cos \varphi \sin \lambda + \cos \Theta (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi_0) + \operatorname{tg} \gamma (\cos \varphi \cos \lambda \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 - \sec \alpha)],$$

$$1/N = \operatorname{tg} \gamma [\sin \Theta \cos \varphi \sin \lambda + \cos \Theta (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi_0)] + \sec \alpha - \cos \varphi \cos \lambda \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \varphi_0.$$

Dieses System entspricht den Gln. (17) in [1], wenn man berücksichtigt, daß sich in bezug auf den Maßstab dortiges System auf eine Einheitskammerkonstante ($R \sec \alpha = 1$) bezieht und außerdem der Nullpunkt des Bildkoordinatensystems im Bild des Subsatellitenpunktes liegt. Der Nachweis für die Verschiebung des Koordinatensystems ist leicht zu führen, wenn aus obigen Gleichungen die Bildkoordinaten des Subsatellitenpunktes berechnet werden. Man ersetze φ und λ durch φ_0 und λ_0 und erhält

$$x_{S_u} = 0,$$

$$y_{S_u} = -c \operatorname{tg} \gamma.$$

Dieses Ergebnis kann unmittelbar auch aus Abb. 2 abgelesen werden.

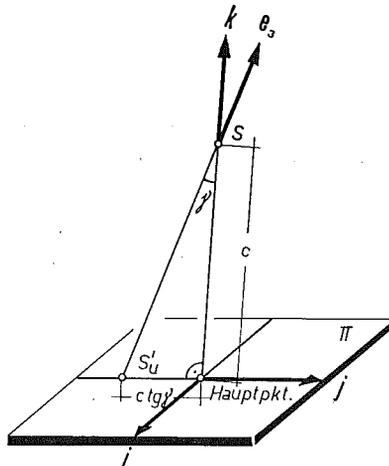


Abb. 2

2.3. Die verkantete Aufnahme und der Normalfall

Die Formelsysteme für diese Aufnahmefälle ergeben sich, wenn in den Elementen der Matrix A : $\gamma = \omega = 0$ bzw. $\Theta = \gamma = \omega = 0$ gesetzt werden. Die sich ergebenden Formelsysteme unterscheiden sich nur durch den Maßstabsfaktor von den Gln. (8) bzw. (4) in [1].

3. Inversion der Aufgabe

Die explizite Darstellung der Bildkoordinaten kann für die Berechnung von Netzentwürfen und simulierten Bildern verwendet werden und ist deshalb für die Kartographie von Interesse. Die Berechnung von φ und λ aus Bildkoordinaten hat hingegen für geodätische Aufgaben große Bedeutung. Diese Inversion der bisherigen Problemstellung soll der Vollständigkeit halber durchgeführt werden.

Ausgehend von der Grundgleichung (Gl. (8)) wird der Richtungsvektor zum Oberflächenpunkt explizit dargestellt:

$$\underline{s} = \sec \alpha \underline{s}_0 + \frac{\mu}{R} \underline{p} \quad \dots (11)$$

Für die Komponenten von \underline{s} gelten folgende Beziehungen:

$$s_1 = \frac{\mu}{R} u,$$

$$s_2 = \frac{\mu}{R} v,$$

$$s_3 = \sec \alpha + \frac{\mu}{R} w.$$

Der unbekannte Faktor μ/R wird wie üblich aus der Komponente s_3 berechnet. Damit ergibt sich unmittelbar:

$$s_1 = (s_3 - \sec \alpha) u/w,$$

$$s_2 = (s_3 - \sec \alpha) v/w.$$

Bei bekannten Orientierungselementen können daraus unter Beachtung der Bedingung

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$$

die Komponenten s_i des Vektors \underline{s} berechnet werden. Die Komponenten s'_i des im Äquatorsystem dargestellten Vektors ergeben sich nach Gl. (2a):

$$\underline{s}' = (s'_1, s'_2, s'_3)^T = \underline{R}^T \underline{s}.$$

Damit ist φ und λ unmittelbar berechenbar. Es gilt

$$\sin \varphi = s'_3,$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -s'_1/s'_2.$$

Schlußbemerkung

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß alle Aussagen über kosmographische Perspektiven mit Hilfe der mitgeteilten Formelsysteme beschrieben werden können. Das gleiche gilt auch für Diskussionen der mathematischen Form der Bildkurven ausgezeichneter Kurven des Urbildes (Grenzkreis: $\alpha = \text{const.}$, Breiten- bzw. Längenkreis: φ bzw. $\lambda = \text{const.}$ etc.).

Bemerkenswert erscheint, daß aus dem photogrammetrischen Modell auch sämtliche Fälle azimuthaler Projektionen abgeleitet werden können. Die Annahme einer Kugel als abzubildende Fläche bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit [3].

Literatur

[1] *Dumitrescu, V.*: Mathematische Grundlagen schräger und senkrechter kosmographischer Perspektiven, AVN Jahrgang 78, Heft 5 pp. 163–172 (1971).

[2] *Rinner, K.*: Einführung in die analytische Photogrammetrie, ÖHS der TH Graz (1964).

[3] *Kuntz, E.*: Die analytischen Grundlagen perspektiver Abbildungen der Erdoberfläche aus großen Höhen, DGK Reihe C, Heft 69 (1964).

Dynamische Fahrkurven in Übergangsbogen

Von *P. Lugner* und *G. Palfinger*, Wien

1. *Einleitung*

Als Haupttrassierungselement neben der Geraden und dem Kreisbogen ist die Klotoide als Übergangsbogen im Straßenbau allgemein in Verwendung [1]. Technisch notwendig ist ein Übergangsbogen bei kleinen Radien, wie dies bei Anschlußstellen an Autobahnen und Schnellstraßen [2] oder bei Kehren der Fall ist. Stellt man sich ein Kraftfahrzeug als Massenpunkt vor, so kann dieses Ersatzmodell mit einem linearen Lenkgesetz die Klotoide, die ja als Kurve mit proportional der Länge wachsender Krümmung definiert ist, genau einhalten. Unter Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung und der auftretenden dynamischen Effekte wird ein Kraftfahrzeug aber eine von der so projektierten Trasse abweichende Fahrkurve besitzen.

Diese Abweichungen sind natürlich von besonderem Interesse, da sie einerseits zur Vermeidung von unbenutzten Fahrbahnflächen [2] und damit zu geringeren Baukosten führen, andererseits zur Ausbildung fahrdynamisch günstigerer Trassen angewendet werden könnten. Wesentlich ist also die genaue Kenntnis der Fahrkurve zu einer gegebenen Trasse. Solche Fahrspurerfassungen wurden bisher vornehmlich mit photogrammetrischen Methoden durchgeführt ([2], [4], [5], [6], [11]). All diesen Verfahren haftet aber eine Reihe von nicht immer exakt erfaßbaren Fehlern an, wie: Subjektive Lenker, fahrpsychologische Leiteinrichtungen und ihr Einfluß auf die jeweilige Fahrkurve, Fahrbahnzustand, technischer Zustand der Kraftfahrzeuge, Ungenauigkeiten bei der Auswertung der Meßergebnisse, Seitenwind etc. Ein weiterer Nachteil dieser Vorgangsweise ist, daß sie nur zu Aussagen über bereits gebaute Trassierungen führt und Erkenntnisse erst bei weiteren ähn-