

Paper-ID: VGI\_197210



## Analytische Behandlung einiger Grundaufgaben der Zweimedien-Photogrammetrie

Uwe Girndt <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Große Düwelstraße, D-3000 Hannover*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (2), S. 65–71

1972

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Girndt_VGI_197210,  
  Title = {Analytische Behandlung einiger Grundaufgaben der Zweimedien-  
    Photogrammetrie},  
  Author = {Girndt, Uwe},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen}},  
  Pages = {65--71},  
  Number = {2},  
  Year = {1972},  
  Volume = {60}  
}
```



### References

*Brown, D. B.* (1971): Analytical Aerotriangulation versus Ground Surveying. Paper presented at ASP-ACSM Fall Convention and Symposium on Computational Photogrammetry, San Francisco, California.

*Ebner, H.* (1970): Die theoretische Lagegenauigkeit ausgeglichener Blöcke mit bis zu 10000 unabhängigen Modellen. Bildmessung und Luftbildwesen, vol. 38, p. 225–232.

*Meissl, P.* (1970): Über die Fehlerfortpflanzung in gewissen regelmäßigen flächig ausgebreiteten Nivellementnetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, vol. 95, p. 103–109.

*Meissl, P.* (1971): A theoretical analysis of the random error propagation in large photogrammetric blocks. Proceedings of ASP Technical Sessions and Symposium on Computational Photogrammetry. ASP-ACSM Fall-Convention, San Francisco, California.

*Varga, R. S.* (1962): *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall.

## Analytische Behandlung einiger Grundaufgaben der Zweimedien- Photogrammetrie

Von *Uwe Girndt*, Graz

### 1. Einleitung

Bei der herkömmlichen Definition der Photogrammetrie wird normalerweise vorausgesetzt, daß die Projektionsstrahlen bei der Aufnahme außerhalb des Kameraobjektives nur ein Medium durchlaufen (Einmedien(EM)-Photogrammetrie). Erweitert man diese Definition auf mehrere Medien, so erhält man den Begriff der Mehrmedien(MM)-Photogrammetrie. Ihr einfachster Spezialfall ist die Zweimedien(ZM)-Photogrammetrie. Sie unterscheidet sich von der EM-Photogrammetrie dadurch, daß das Meßbild nur den Strahlengang bis zur Grenzfläche der beiden Medien vermittelt. Über den Verlauf der gebrochenen Strahlen kann erst bei Kenntnis der Lage und Form dieser Trennfläche sowie der optischen Eigenschaften der beiden Medien eine Aussage gemacht werden.

Die einfachste Grenzfläche ist eine Ebene. Bei ihr treten zu den den Strahlenverlauf bestimmenden Größen gegenüber der EM-Photogrammetrie 4 weitere Parameter hinzu: 3 Parameter, die die Lage der Trennebene festlegen und ein Parameter, der die optischen Eigenschaften des zweiten Mediums relativ zum ersten angibt (Brechungsindex).

### 2. Das Abbildungsgesetz

Das Abbildungsgesetz stellt die mathematischen Beziehungen zwischen den Objektpunkten  $P$  und den Bildpunkten  $P'$  dar (Fig. 1).

Es kann in der Form der Funktion

$$\mathbf{p}_0' = f(\mathbf{x}) \quad \dots \quad (1)$$

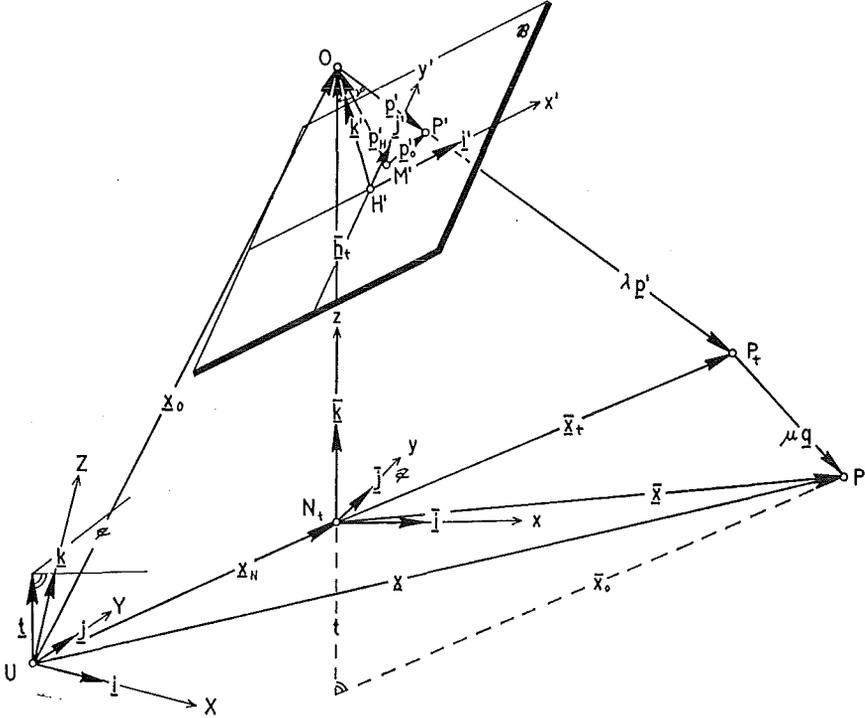
ausgedrückt werden. Diese enthält neben den Variablen der Objektkoordinaten  $\mathbf{x}$  die Konstanten der Abbildung. Es sind dies die 6 Daten der äußeren Orientierung,

die drei Parameter der inneren Orientierung und die 4 Größen, die die Lage und die optischen Eigenschaften des zweiten Mediums charakterisieren. Insgesamt ist also

$$\mathbf{p}'_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{r}'_u, \mathbf{p}'_H, t, n) \quad \dots (2)$$

mit

$\mathbf{r}'_u^T = (\varphi'_u, \omega'_u, \kappa'_u)$  — Parameter der Orientierungsmatrix und  $n$  — Brechungsindex des zweiten Mediums.



Die Funktion  $f$  ist z. B. in [1] abgeleitet. Das Hauptproblem liegt dabei in der Ermittlung des Einfallspunktes  $P_t$ , dessen Lage auf der Trennebene  $t$  aus dem Brechungsgesetz folgt. Eine strenge Lösung dieser Aufgabe führt auf eine Gleichung 4. Grades. Numerisch günstiger ist eine iterative Lösung (siehe z. B. [1], [2]).

### 3. Der räumliche Rückwärtsschnitt

In der EM-Photogrammetrie erfordert der räumliche Rückwärtsschnitt bei bekannter innerer Orientierung die Bestimmung von 6 Unbekannten. In der ZM-Photogrammetrie treten die drei Parameter der Trennebene und eventuell der Brechungsindex hinzu. Es sind also insgesamt 10 Größen zu ermitteln. Bei unbekannter innerer Orientierung ergeben sich 13 Unbekannte. Es sind dies

- die 3 Koordinaten des Aufnahmezentrums  $0$ ,
- die 3 Parameter der Orientierungsmatrix,

die 3 Parameter der inneren Orientierung,  
die 3 Parameter der Trennebene  $t$  und  
der Brechungsindex  $n$ .

Für eine Bestimmung der Unbekannten durch Ausgleichung müssen Näherungswerte gegeben sein. In den meisten Fällen lassen sich diese bei der Aufnahme unmittelbar mit ausreichender Genauigkeit ermitteln.

Betrachtet man die gegebenen Paßpunktkoordinaten zunächst als „fehlerfreie“ Größen, so sind bei einer vermittelnden Ausgleichung die Beobachtungen (Bildkoordinaten) durch die Unbekannten auszudrücken. Es ist also von der Gleichung (2) auszugehen. Jeder Bildpunkt liefert zwei Verbesserungsgleichungen. Diese können außer den genannten 14 Unbekannten noch nicht gemessene Objektkoordinaten enthalten, die als zusätzliche Unbekannte in die Ausgleichung einbezogen werden können. Die Zahl der Übereinstimmungen  $\ddot{u}$  ist also bei  $n$  Punkten,  $k$  gegebenen Koordinaten und  $u$  Unbekannten

$$\ddot{u} = 2n - u - (3n - k) = k - u - n. \quad \dots (3)$$

Jeder Raumpaßpunkt liefert zwei und jeder Lagepaßpunkt eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannten. Bei  $u = 13$  ist das Problem eindeutig lösbar, wenn z. B. 6 Raum- und 1 Lagepaßpunkt gegeben sind. Ist die innere Orientierung bekannt ( $u = 10$ ), so genügen insgesamt 5 Raumpaßpunkte.

Bei einer strengen Ausgleichung wird man auch die Paßpunktkoordinaten als verbesserungsbedürftige, beobachtete Größen betrachten müssen. An die Stelle der vermittelnden Ausgleichung tritt dann die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten (Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung). Die Bedingungsgleichungen mit Unbekannten folgen aus der durch Differentiation linearisierten Gleichung (2). Jeder Paßpunkt liefert zwei Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} v_{x'} - \begin{pmatrix} a_1 & 4 \\ a_1 & 5 \\ a_1 & 6 \end{pmatrix}^T v_x - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_1 & 2 \\ a_1 & 3 \end{pmatrix}^T dx_0 - \begin{pmatrix} a_1 & 7 \\ a_1 & 8 \\ a_1 & 9 \end{pmatrix}^T dt - a_{1 \ 10} \cdot dn - \begin{pmatrix} a_1 & 11 \\ a_1 & 12 \\ a_1 & 13 \end{pmatrix}^T dr'_u \\ - \begin{pmatrix} a_1 & 14 \\ a_1 & 15 \\ a_1 & 16 \end{pmatrix}^T dp'_{H} + (x' - x'^0) = 0, \quad \dots (4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y'} - \begin{pmatrix} a_2 & 4 \\ a_2 & 5 \\ a_2 & 6 \end{pmatrix}^T v_x - \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ a_2 & 2 \\ a_2 & 3 \end{pmatrix}^T dx_0 - \begin{pmatrix} a_2 & 7 \\ a_2 & 8 \\ a_2 & 9 \end{pmatrix}^T dt - a_{2 \ 10} \cdot dn - \begin{pmatrix} a_2 & 11 \\ a_2 & 12 \\ a_2 & 13 \end{pmatrix}^T dr'_u \\ - \begin{pmatrix} a_2 & 14 \\ a_2 & 15 \\ a_2 & 16 \end{pmatrix}^T dp'_{H} + (y' - y'^0) = 0. \quad \dots (4b) \end{aligned}$$

((4a) und (4b) gelten für Raumpaßpunkte. Sind einzelne Objektkoordinaten nicht gegeben, so sind die Verbesserungen durch die entsprechenden Unbekannten zu ersetzen.)

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{B}^T \mathbf{x} + \mathbf{w} = 0, \quad \dots (5)$$

das nach einem der bekannten Verfahren auszugleichen ist.

#### 4. Die räumliche Doppelpunkteinschaltung

Setzt man die innere Orientierung sowie den Brechungsindex als bekannt voraus, so erfordert die räumliche Doppelpunkteinschaltung in der ZM-Photogrammetrie die Bestimmung von 15 Unbekannten. Es treten nämlich zu den 12 Unbekannten der EM-Photogrammetrie wieder die 3 Parameter der Trennfläche hinzu. Die Unbekannten können auch hier genau wie in der EM-Photogrammetrie entweder durch Ausgleichung in einem Guß alle gemeinsam oder in den beiden Schritten der gegenseitigen und der absoluten Orientierung in zwei Gruppen bestimmt werden.

##### 4.1 Gemeinsame Bestimmung aller Unbekannten

Betrachtet man die gegebenen Objektkoordinaten als „fehlerfrei“, so kann die Ausgleichung vermittelnd oder bedingt durchgeführt werden. Bei einer vermittelnden Ausgleichung sind die Formeln (4) für zwei Projektionszentren anzusetzen. Für jeden in beiden Bildern angemessenen Objektpunkt erhält man 4 Verbesserungsgleichungen. Bei der bedingten Ausgleichung ergeben sich für jedes homologe Punktpaar eine Schnitt- und ebensoviel Koordinatenbedingungen wie Objektkoordinaten gegeben sind. Werden die Paßpunktkoordinaten als Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt, so erhält man in beiden Fällen eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten.

Beim ersten Lösungsweg sind die für den räumlichen Rückwärtsschnitt geltenden Formeln lediglich auf zwei Projektionszentren zu erweitern. Jeder Objektpunkt liefert 4 Bedingungsgleichungen mit Unbekannten. Diese enthalten wieder außer den  $u$  Unbekannten der Aufnahmedispositionen alle nicht gemessenen Objektkoordinaten als zusätzliche Unbekannte. Die Zahl der Überbestimmungen ist also

$$\ddot{u} = 4 p_R + 3 p_L + 2 p_H + p_N - u. \quad \dots (6)$$

Dabei bedeuten  $p_R$  die Anzahl der Raum-,  $p_L$  die der Lage- und  $p_H$  die der Höhenpaßpunkte.  $p_N$  ist die Zahl der Neupunkte. Bei  $u = 15$  sind z. B. 3 Raumpaßpunkte und 1 Lagepaßpunkt zur eindeutigen Lösung des Problems ausreichend.

Die Ausgleichung ist ganz analog der beim räumlichen Rückwärtsschnitt.

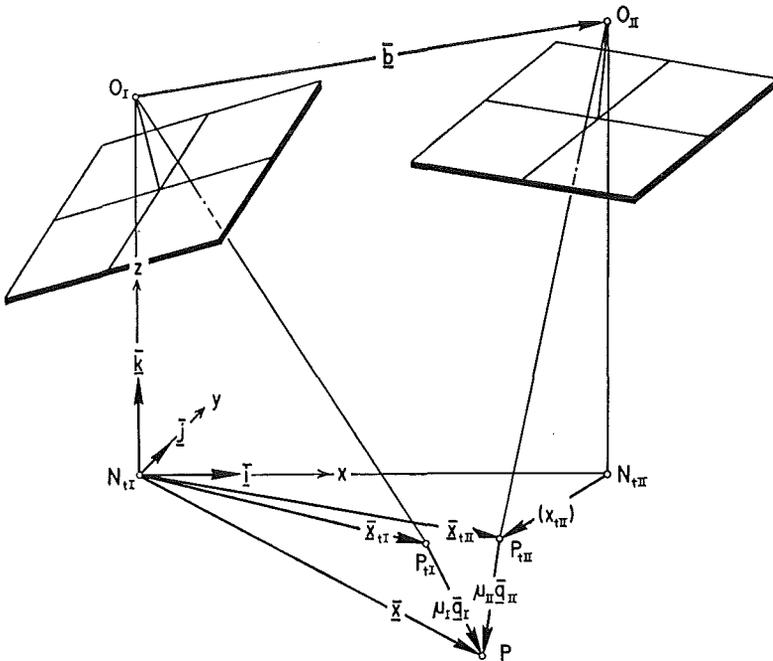
##### 4.2 Orientierung in zwei Schritten (Modellverfahren)

Bei der räumlichen Doppelpunkteinschaltung wird genau wie in der EM-Photogrammetrie zunächst in der gegenseitigen Orientierung ein „Modell“ hergestellt, das dann in der absoluten Orientierung auf die gegebenen Paßpunkte einge-

paßt wird. Dabei gleicht die absolute Orientierung vollkommen der in der EM-Photogrammetrie. Es handelt sich auch hier um eine räumliche Drehstreckung, durch die 7 Unbekannte bestimmt werden. Für die relative Orientierung verbleiben somit 8 Unbekannte (die innere Orientierung und der Brechungsindex seien bekannt). Neben der gegenseitigen Lage der Aufnahmekammern (5 Unbekannte) muß nämlich noch die Lage einer Kammer relativ zur Trennebene  $t$  (3 Unbekannte) bekannt sein, da diese den Strahlenverlauf mitbestimmt. Die gegenseitige Orientierung ist also vollzogen, wenn in 8 Punkten des aus den gebrochenen Strahlen gebildeten Modells die Vertikalparallaxen verschwinden. Zusätzlich kann auch noch der Brechungsindex  $n$  als Unbekannte der gegenseitigen Orientierung betrachtet werden.

#### 4.2.1 Unabhängige Bildpaare

Für die gegenseitige Orientierung unabhängiger Bildpaare wird ein Koordinatensystem eingeführt, dessen  $x$ - $y$ -Ebene in der Trennebene  $t$  liegt und dessen  $z$ -Achse durch das linke Aufnahmezentrum  $O_I$  geht (Fig. 2). Die  $x$ -Achse enthält den Nadirpunkt der zweiten Aufnahme  $N_{II}$ . Als Unbekannte sollen hier die Orientierungswinkel der beiden Kamern (6 Unbekannte) und die Höhen der Aufnahmezentren über  $t$  im Maßstab der Basis (2 Unbekannte) eingeführt werden. Die Länge der Projektion der Basis auf  $t$   $b = x_{0II}$  wird beliebig vorgegeben. Alle anderen Strecken ergeben sich damit in diesem Maßstab.



Das hier angewandte Verfahren wird in der EM-Photogrammetrie als Modellverfahren bezeichnet. Es fußt auf der Bedingung, daß sich homologe gebrochene

Projektionsstrahlen in einem Punkte schneiden müssen. Diese Schnittbedingung lautet in Determinantenschreibweise

$$D = |(\bar{x}_{III} - \bar{x}_{II}), \bar{q}_I, \bar{q}_{II}| = 0. \quad \dots (7)$$

Sie besagt, daß die drei Vektoren  $(\bar{x}_{III} - \bar{x}_{II})$ ,  $\bar{q}_I$  und  $\bar{q}_{II}$  in einer Ebene liegen.

Jedes homologe Punktepaar liefert eine derartige Gleichung. Sind mehr Gleichungen als Unbekannte gegeben, so liegt ein Ausgleichungsproblem vor. Die Linearform der Bedingungsgleichungen mit Unbekannten für diese Ausgleichung erhält man, indem man  $D$  nach den Beobachtungen und nach den Unbekannten differenziert

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e_{17} & I \\ e_{18} & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{x'I} \\ v_{y'I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{17} & II \\ e_{18} & II \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{x'II} \\ v_{y'II} \end{pmatrix} + e_{3I} \cdot dz_{0I} + e_{3II} \cdot dz_{0II} + \\ & e_{10} \cdot dn + \begin{pmatrix} e_{11} & I \\ e_{12} & I \\ e_{13} & I \end{pmatrix}^T d\mathbf{r}_I + \begin{pmatrix} e_{11} & II \\ e_{12} & II \\ e_{13} & II \end{pmatrix}^T d\mathbf{r}_{II} + e_0 = 0. \quad \dots (8) \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Folgebildanschluß

Beim Folgebildanschluß ist die Lage der zweiten Kammer relativ zur ersten festzulegen. Die Aufnahmedispositionen der linken Kammer werden nicht verändert. Es sind also lediglich 6 Unbekannte zu ermitteln. Die Lage der Trennebene wurde bereits im vorigen Modell bestimmt, dadurch entfallen hier gegenüber der relativen Orientierung unabhängiger Bildpaare zwei Parameter. Die Unbekannten sind

$$\mathbf{r}_{II} = (\varphi_{II}, \omega_{II}, \kappa_{II})^T, \bar{\mathbf{x}}_{0II} = (x_{0II}, y_{0II}, z_{0II})^T.$$

Bei dieser Wahl der Unbekannten ist der Maßstab des Modells festgelegt. Er wird aus dem vorherigen Modell übernommen.

Die Bedingungsgleichungen mit Unbekannten für eine Ausgleichung folgen wieder aus den Differentialen der Schnittbedingung. Sie haben die Form

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e_{F17} & I \\ e_{F18} & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{x'I} \\ v_{y'I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{F17} & II \\ e_{F18} & II \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{x'II} \\ v_{y'II} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{F1} & II \\ e_{F2} & II \\ e_{F3} & II \end{pmatrix}^T \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{0II} + \\ & + \begin{pmatrix} e_{F11} & II \\ e_{F12} & II \\ e_{F13} & II \end{pmatrix}^T \cdot d\mathbf{r}_{II} + e_{F0} = 0. \quad \dots (9) \end{aligned}$$

#### 5. Genauigkeitsbetrachtungen

Das Hauptanwendungsgebiet der ZM-Photogrammetrie ist zur Zeit die Vermessung küstennaher Bereiche des Meeresbodens aus der Luft. Bei diesen Aufnahmedispositionen (große Flughöhe und geringe Wassertiefe) liegen genähert die Bedingungen des Normalfalles der EM-Photogrammetrie vor. Es gelten daher die dortigen Verhältnisse auch hier. Danach erscheint es grundsätzlich unzweckmäßig,

die innere Orientierung in die Ausgleichung mit einzubeziehen (vgl. [8]). Da infolge der geringen Wassertiefe der Einfluß des zweiten Mediums auf die Lage der Objektpunkte nur relativ gering ist, machen sich kleine Verschiebungen der Trennebene kaum bemerkbar. Das bedeutet, daß die Höhe der Trennebene  $t$  nur sehr ungenau aus einer Ausgleichung bestimmt werden kann. Aus dem gleichen Grunde lassen sich aber trotzdem theoretisch für Neupunkte die gleichen Genauigkeiten wie in der EM-Photogrammetrie erreichen. In der Praxis sind die Verhältnisse allerdings infolge Abweichungen der Trennfläche von einer Ebene, schlechte Sichtverhältnisse im Wasser usw. ungünstiger.

#### *Literatur*

- [1] *Höhle, J.*: Zur Theorie und Praxis der Unterwasser-Photogrammetrie. München 1971, DGK Reihe C: Dissertationen, Heft Nr. 163.
- [2] *Rinner, K.*: Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie. Ö.Z.f.V., Sonderheft 5, 1948.
- [3] *Rinner, K.*: Zweimedienphotogrammetrie (Manuskript zu Jordan-Eggert-Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde, Band IIIa).
- [4] *Zaar, K.*: Zweimedienphotogrammetrie. Ö.Z.f.V., Sonderheft 4, 1948.
- [5] *Rinner, K.*: Problems of two-medium-photogrammetry. Phm. Engin. 35, 1969, S. 275.
- [6] *Schmutter, B. und Bonfiglio, L.*: Orientation problems in twomedium-photogrammetry. Phm. Engin. 33, 1967, S. 1421.
- [7] *Schmutter, B. und Bonfiglio, L.*: Problems of two-medium-photogrammetry. Haifa 1965.
- [8] *Pietschner, J.*: Grundlagen der analytischen Photogrammetrie. Vermessungstechnik 1969, Heft 6, S. 216.

## Mitteilungen

### Deutscher Geodätentag 1972

Der Deutsche Verein für Vermessungswesen (DVW) e. V. veranstaltet in der Zeit vom 20. bis 23. September 1972 in Braunschweig den 57. Deutschen Geodätentag.

Die Tagung steht unter dem Motto „*Geodäsie als Natur- und Ingenieurwissenschaft*“ mit Schwerpunkten auf Hydrographische Vermessungen, Elektronischer Tachymetrie, Bauvermessung sowie Bodenordnung und Bodenwirtschaft. Daneben ist ein reichhaltiges Rahmenprogramm vorgesehen, aus dem ein Besuch der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig (PTB) sowie eine Harzrundfahrt besonders hervorzuheben sind.

Anmeldungen sind zu richten an die  
Geschäftsstelle des Vorbereitenden Ausschusses  
für den 57. Deutschen Geodätentag

*D 3300 Braunschweig*

Katasteramt, Adolfstraße 60,

die auch alle Auskünfte erteilt und Anfragen beantwortet.

### XXVII. Ordentliche Hauptversammlung des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen

Zeit: Mittwoch, 4. Oktober 1972, 16 Uhr s. t.

Ort: wird noch bekanntgegeben