

Paper-ID: VGI_197207



Was könnte eine Trilateration in der Luft leisten?

Karl Killian ¹

¹ A-1140 Wien, Hadikgasse 40

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (2), S. 30–43

1972

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_197207,  
  Title = {Was könnte eine Trilateration in der Luft leisten?},  
  Author = {Killian, Karl},  
  Journal = {{\u00d6sterreichische Zeitschrift f\u00fcr Vermessungswesen},  
  Pages = {30--43},  
  Number = {2},  
  Year = {1972},  
  Volume = {60}  
}
```



Was könnte eine Trilateration in der Luft leisten?

Von *Karl Killian*, Wien

Zusammenfassung

In Ergänzung zu einer vorangegangenen Arbeit wird in dieser Arbeit ein Vorschlag über die Trilateration in der Luft gemacht, bei der Seitenlängen bis zu 40 km vorkommen. Die aerologischen Verhältnisse in den vorkommenden Flughöhen werden beschrieben und ein Gerät zur Messung des vertikalen Temperaturgradienten wird vorgeschlagen. Die Möglichkeit mit Hilfe der Kenntnis des geostrophischen Windes den Isobarenverlauf zu finden und die Möglichkeit, den geostrophischen Wind zu messen, wird erwähnt. Die astronomische Azimutbestimmung in Luftstandpunkten wird fehlertheoretisch untersucht. Die Lichtkurve wird durch ein entsprechendes Stück einer logarithmischen Spirale ersetzt.

Summary

In continuation of an earlier paper a proposal is made to perform airborne trilateration with distances up to 40 km. This trilateration serves to substantially reduce error propagation in Aerophotogrammetry under lack of ground control. The aerological conditions encountered at the relevant flight altitudes are outlined, and an instrument capable to measure the vertical temperature gradient is described. The possibility to find the isobaric surfaces from a knowledge of the geostrophic wind is mentioned. A method for measuring the geostrophic wind is stressed. Astronomical azimuth determination in airplanes is error-theoretically investigated. The light trajectory is approximated by a portion of a logarithmic spiral.

In einer vorangegangenen Arbeit [4] hat der Verfasser ein Verfahren angegeben, das zunächst kurz wiederholt wird.

Ein Verband von drei Vermessungsflugzeugen 1, 2, 3 (Abb. 1) bildet ein gleichseitiges Dreieck von ca. 10 km Seitenlänge. Jedes der drei Flugzeuge ist mit modernen Autopiloten und photogrammetrischen Reihenbildkammern ausgerüstet. Liegen Weitwinkelkammern 18×18 , $f = 12,5$ cm vor und ist die Flughöhe 4 km, so ist die aufgenommene Geländefläche etwa 6×6 km. Die Weitwinkelkammern weisen Zusatzeinrichtungen auf, die, ähnlich dem zur Horizontabbildung bestimmten Verfahren von *Nenonen*, die Flugzeuge gegenseitig abbilden. Die Verschlüsse der drei Vermessungskammern werden hinreichend gleichzeitig elektronisch ausgelöst. Ferner besitzt jedes der drei Flugzeuge ein *Registrierstoskop* und eine *Einrichtung zur Entfernungsmessung* (mit zeitlicher Registrierung) zu den beiden anderen Flugzeugen.

Es entspricht dem heutigen Stande der Technik, wenn man die Forderung stellt, diese Entfernungen auf einen Dezimeter genau mit *Laser* zu messen. Die Entfernungsmessung mit *Laser* an Stelle von Zentimeter- und Dezimeter-Wellen hätte auch den Vorteil, daß die *Anziehung von Tripelspiegeln erfolgen könnte und daß eine automatische Nachführung des Laserstrahles auf verhältnismäßig einfache Weise durchführbar wäre*.

Die gemessenen Entfernungen sind exzentrische Beobachtungen in bezug auf die Objektivmittelpunkte und werden daher auf letztere reduziert. Diese reduzierten Entfernungen ergeben mit den Höhendifferenzen (gemessen mit Registrierstosko-

pen) für jedes der drei Flugzeuge zwei Vertikalwinkel. Diese dienen zur Bestimmung der Bildnadire.

Den genannten hohen technischen Erfordernissen wurden folgende Vorteile gegenübergestellt:

1. In jedem Luftbild kann der Bildnadir bestimmt werden, der mittlere Fehler beträgt etwa $\pm 0,5'$. Damit wird die zur gegenseitigen und absoluten Orientierung von Luftbildern erforderliche Zeit wesentlich verkürzt und ferner wird erreicht, daß sich die Fehler der Höhen nur nach dem $\sqrt[n]{n}$ -Gesetz fortpflanzen.

2. Das räumliche Rückwärtseinschneiden des Bildverbandes ist bei einem vorgegebenen Festpunktnetz erheblich öfter möglich als das räumliche Rückwärtseinschneiden eines Luftbildes. Setzt man z. B. ein Festpunktnetz voraus, das aus aneinandergereihten gleichseitigen Dreiecken besteht, deren Seitenlängen 5,2 km betragen, so kann unter obigen Aufnahmebedingungen der Bildverband immer, jedoch ein Luftbild niemals durch Rückwärtseinschneiden bestimmt werden.

3. Bei einem vorgegebenen Festpunktnetz ist die Anzahl der auf einem Bildverbandstreifen abgebildeten Festpunkte erheblich größer als jene, die auf einem Bildstreifen abgebildet werden.

4. Die Fehlerfortpflanzungen des *Bildverbandstreifens* folgen in der Längsrichtung sowie in der Höhe dem $\sqrt[n]{n}$ -Gesetz, während sie für den *Bildstreifen* dem $n^{3/2}$ -Gesetz folgen. Dazu kommt noch, daß für die Längsrichtung der vor $\sqrt[n]{n}$ zu setzende Faktor aus Lasermessungen stammt und daher verhältnismäßig sehr klein ist. Hingegen ist der Querverschwenkungsfehler für den Bildverbandstreifen und für den Bildstreifen nicht wesentlich verschieden.

a) Grundlegendes

In dieser Arbeit werden obige Vorschläge weiter untersucht und ergänzt. Das Hauptthema ist die Trilateration in der Luft, mit Seitenlängen bis zu 40 km.

Diese Trilateration wird ebenfalls mit den drei oben beschriebenen Vermessungsflugzeugen ausgeführt, und zwar nach Vollendung der Aufnahme des Gebietes nach dem Bildverbandstreifenverfahren.

Zunächst wird folgende anscheinend gut brauchbare Trilateration in der Luft beschrieben und dann werden ihre Nachteile hervorgehoben.

Die drei Vermessungsflugzeuge 1, 2, 3 (Abb. 2) haben Entfernungen von etwa 30 bis 40 km und machen von den schraffierten Gebieten G_1 , G_2 , G_3 Vermessungsaufnahmen. Die Längsrichtungen dieser Gebiete sind ungefähr parallel zu den Richtungen der Bildverbandstreifen und ihre Länge entspricht z. B. vier Luftaufnahmen. Die Entfernungen zwischen den drei Flugzeugen 1, 2, 3 werden wieder mit Laser gemessen, und die gegenseitige Abbildung der Flugzeuge erfolgt wieder in der oben beschriebenen Weise.

Sind die Aufnahmen durchgeführt, so nimmt eines der drei Flugzeuge, z. B. Flugzeug 1, Kurs auf ein gewünschtes Gebiet G_4 . In der Zwischenzeit fliegen die Flugzeuge 2, 3 die Schleifen S_2 , S_3 ab. Das Gebiet G_4 übernimmt nun die Rolle des

Gebietes G_1 . Nun nimmt eines der beiden Flugzeuge 2, 3 Kurs auf ein weiteres gewünschtes Gebiet usw.

Vor Beginn der Trilateration in der Luft werden auf Grund der Verbandstreifen-Bilder die Gebiete $G_1, G_2, G_3 \dots$ gewählt. Aus den Bildern dieser Trilateration werden viele Paßpunkte und ev. Kartennadire ausgewertet. Die Basen zur Auswertung dieser Paßpunktfelder werden zunächst aus Radar-Höhenprofilenschreibern oder Lasermessungen zu Bodenpunkten bestimmt. Da die Fehlerfortpflanzung eines Bildverbandstreifens in der Längsrichtung sehr klein ist (siehe oben unter 4.), kann die Transformation der Paßpunktfelder auf den Maßstab der Bildverbandauswertung erfolgen.

Die Nachteile dieses Verfahrens sind:

1. Flugtechnische Schwierigkeiten,
2. die Refraktion des Lichtes in der Atmosphäre, verursacht durch die Abgase der Flugmotoren beim Fliegen der Schleifen, ist undefinierbar.

Beide Nachteile verschwinden, wenn die drei Flugzeuge in einem Verband fliegen und ein gleichseitiges Dreieck von etwa 30 bis 40 km Seitenlänge bilden.

Diese Verbandflüge können längs, quer oder schräg zur Richtung der durchgeführten Bildverbandstreifen geflogen werden und ergeben *durchgreifende Kontrollen bzw. wertvolle Bedingungen für die Ausgleichung und können zur astronomischen Azimutbestimmung benützt werden*. Das Verfahren ermöglicht ferner *Paßpunktfelder auszuwerten und ihre gegenseitige Lage durch Trilateration in der Luft zu bestimmen*. *Luftsichtbare Festpunkte können dabei unmittelbar mitverwendet bzw. kontrolliert werden*. Bei diesen Verbandflügen können dauernde oder unterbrochene Reihen-aufnahmen durchgeführt werden. Auch die *Seitenlängen einzelner Geländedreiecke*, deren Punkte signalisiert sind, können bestimmt werden.

Ferner können *Bildverbandstreifen mit großen Standpunktdreiecken* aufgenommen werden. Der Flugverband (Abb. 1) kann z. B. ein gleichseitiges Dreieck von etwa 25 km Seitenlänge bilden. Die zwischen den drei zuerst aufgenommenen Streifen liegenden, nicht aufgenommenen Streifen werden dann der Reihe nach immer mit dem Flugverband mit 25-km-Entfernungen aufgenommen. Analog der bekannten Blocktriangulation mit Bildstreifen könnte eine Blocktriangulation mit Bildverbandstreifen (z. B. 50% Überdeckung) durchgeführt werden.

b) Verwendung der Neon-Kamera

In Abb. 3 ist eine *Neon-Kamera* schematisch dargestellt. Diese Abbildung zeigt nur eine der in unserem Fall notwendigen vier Horizontkammern. Für die nachfolgenden Berechnungen denken wir uns die Aufnahmeachse der Horizontkammer um 90° gedreht (siehe punktierte Linie) und erhalten dann das zum wirklichen Objektiv fingierte Objektiv. Nur zur Vereinfachung der Berechnungen machen wir die Annahme, daß die Mitte des fingierten Objektivs in die Kammerhauptachse AA fällt. Dasselbe möge auch für die drei anderen fingierten Objektive gelten. Die vier zu AA normalen fingierten Achsen der Horizontkammern mögen rechte Winkel untereinander einschließen.

In Abb. 4 sind B_1 und B_2 zwei der vier Bildebenen, deren Kammerkonstanten f gleich groß angenommen werden. p_1 und p_2 sind die aus den abgebildeten Flugzeugen 1, 2 (Größe einige Zehntel mm) bestimmten Lagen „der Objektivmittelpunkte“.

Zur vektoriellen Berechnung des Bildnadir gehen wir folgendermaßen vor: Die in x, y, z gelegenen Einheitsvektoren heißen i, j, k ; die von 0 nach p_1 und von 0 nach p_2 reichenden Vektoren können aus f und aus den Koordinaten der Bildebenen B_1, B_2 angeschrieben werden. Die Divisionen durch ihre Absolutbeträge ergeben ihre Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k \end{aligned}$$

Ist α der Winkel zwischen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 , so folgt:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = \cos \alpha \quad \dots (1)$$

Kontrolle: Aus den gemessenen Seiten des Standpunktedreiecks $0_1, 0_2, 0_3$ kann ebenfalls α berechnet werden. Der photogrammetrisch bestimmte Winkel α muß unter Beachtung seines mittleren Fehlers mit ersterem übereinstimmen.

Die Zenitdistanzen z_1 und z_2 zu den beiden Flugzeugen 1, 2 werden aus den Entfernungsmessungen und den zugeordneten Stoskop-Differenzen berechnet. Der gesuchte Einheitsvektor der Lotrichtung ist

$$\mathbf{e}_3 = \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k$$

Wir verwenden jetzt die abgekürzte Schreibweise, indem wir bei allen Richtungswinkeln „cos“ weglassen. Wir bilden

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 = \cos z_1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = \cos z_2 \end{aligned}$$

Ferner ist $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$

Aus diesen drei Gln. kann $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ berechnet werden: γ_3 aus der letzten Gl. in die beiden anderen eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} &= \cos z_1 \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} &= \cos z_2 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gl. mit γ_2 , die zweite mit γ_1 und subtrahiert man die beiden Gln., so ergibt sich eine lineare Gl. mit den Unbekannten α_3, β_3 . Kombiniert man sie mit einer der beiden Gln., so ergibt sich eine quadratische Gl. für α_3 bzw. β_3 . Infolge der Refraktion erfahren p_1 und p_2 eine zu bestimmende Verschiebung. (Siehe unter c) u. d.)

c) *Eigenschaften der Flächen gleichen Druckes und aerologische Messungen*

In der Aerologie erfolgt die Darstellung der Flächen gleichen Druckes (= Iso-barenflächen) auf zwei Arten:

1. Flächen bestimmten Druckes, sog. *Hauptisobarenflächen* (Luftdruckwerte 1000, 850, 700, 500, 300, 200 und 100 mb) werden je in Schichtenlinien dargestellt. Die Schichtenebenen (genauer Niveauflächen) haben gleiche geopotentielle Abstände. Man nennt diese Darstellung *absolute Topographien der Hauptisobarenflächen*. Von besonderem Interesse für uns sind die Hauptisobarenflächen 700 mb und 500 mb, sie entsprechen nämlich Höhen von etwa 3,0 km und 5,5 km.

2. Einige Flächen gleichen Druckes, deren Drücke jedoch untereinander verschieden sind, werden mit einer horizontalen Ebene (genauer Niveaufläche) geschnitten. Das Ergebnis ist eine *Isobarenkarte*.

Jenes Teilgebiet der Meteorologie, das sich mit dem Zustand und insbesondere den Windverhältnissen in der Atmosphäre bis zu einer Höhe von etwa 30 km befaßt, wird bekanntlich als *Aerologie* bezeichnet (als *Aeronomie* wird seit 1954 die Physik der oberen Atmosphäre bezeichnet); und diese Bezeichnung wird auch in den folgenden Zeilen beibehalten.

Auf der Nordhalbkugel liefern 450 aerologische Stationen aus Höhen bis zu 20 bis 30 km, täglich um 0 und 12 Uhr Weltzeit gemessen, Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit. Die Meßgeräte werden mittels Radiosonden mitgeführt und liefern ihre Informationen auf Kurzwellen den Bodenstationen. Ein mitgeführter Metallfolien-Reflektor dient zur Höhenwindbestimmung mittels Radarpeilung.

Das deutsche aerologische Stationsnetz besteht aus den Stationen: Berlin, Emden, Schleswig, Köln, Hannover, München und Stuttgart.

Einen ersten Einblick über die Abweichung der Isobarenflächen von den Niveauflächen gewinnt man aus Wetterkarten z. B. des Deutschen Wetterdienstes, Teil C (aerologische Beobachtungen): Die dargestellten *absoluten Topographien der Isobarenflächen* beantworten diese Frage direkt.

Eine genauere Antwort auf diese Frage wurde auf folgende Weise erreicht: Aus Teil C wurde ein Sommermonat gewählt, der etwa eine durchschnittliche Zahl von Schlechtwetter-Tagen aufweist: Juli 1964. Die in jeder der sieben Stationen bestimmten absoluten Höhen der Isobarenflächen 500, 700 und 850 mb wurden für jeden Tag des Monats herausgeschrieben. Zwischen den sieben Stationen sind 21 Verbindungslinien möglich, deren Längen auf der Sphäre gemessen etwa 200 bis 730 km betragen. Dividiert man für eine Isobarenfläche die Differenz ihrer absoluten Höhen je zweier Stationen durch die Entfernung der auf die Isobarenflächen projizierten Stationen, so bekommt man die Neigung der Isobarenfläche in der Richtung der beiden Stationen. Es zeigte sich ein guter proportionaler Verlauf der Höhenabweichung mit der Entfernung. Pro 10 km Entfernung war in 56 % der Fälle die Höhenabweichung < 1 m. In 38 % war sie 1 bis 2 m und in 6 % war sie 2 bis 3 m. Scheidet man die Schlechtwettertage aus, so kann man annehmen, daß in unserem Fall pro 10 km Entfernung die Höhenabweichung der Isobarenflächen $< 1,5$ m war.

Die Höhenbestimmung mit Radiosonden weist einen mittleren Fehler von etwa ± 20 m auf. Das entspricht bei 200 km Stationsentfernung auf 10 km reduziert, einem mittleren Fehler von $\pm 1,0$ m. Für eine Stationsentfernung von 730 km ist dieser Betrag $\pm 0,3$ m.

Die globalen Eigenschaften der Isobarenflächen sind z. B. in [11], Seite 70 und 71 aufgezeigt. Die nördliche Halbkugel ist in stereographischer Projektion mit den mittleren absoluten Topographien der 500 mb-Flächen für die Monate Jänner und Juli dargestellt. Man erkennt daraus, daß der engste Teil der „Schichtenlinien“ für den Monat Juli im östlichen Teil Nordamerikas liegt. Die Abweichung pro 10 km ist in diesem ungünstigsten Fall ebenfalls $< 1,5$ m. In den weitaus meisten Teilen der Erdoberfläche ist diese Abweichung pro 10 km $< 0,5$ m.

Während heute das gesamte aerologische Beobachtungsmaterial fast nur von Radiosonden stammt, lieferte dieses im großen Ausmaß noch vor zwanzig Jahren der Wetterflug. Die immer größer werdenden Anforderungen, die der Luftverkehr in immer größeren Höhen stellt (insbesondere Auskunft über Höhenwinde und Strahlströmungen) und die großen Kosten des Wetterfluges gegenüber den Kosten der Radiosonden hatten zur Folge, daß das Wetterflugzeug nur noch für spezielle Aufgaben verwendet wird. Mit Meßflügen können in beliebigen Punkten der Atmosphäre Beobachtungen ausgeführt werden, und mit Abwurfsonden (Meßgeräte und Sender auf Fallschirm) werden große Gebiete (z. B. Pazifik) untersucht.

Für unsere Überlegungen ist es bedeutungsvoll, daß für den Flugwetterdienst Geräte zur Messung von Temperatur, Druck und Feuchtigkeit weitgehend entwickelt wurden [3] [8]. Zur Berechnung der Korrekturen der Refraktion und der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Laserstrahles müssen wir nämlich voraussetzen, daß mit jedem der drei Flugzeuge Temperatur, Druck und Feuchtigkeit registriert werden.

Wie unter d) beschrieben wird, ist auch noch eine Messung des vertikalen Temperaturgradienten laufend erforderlich, die auf folgende Weise geschehen kann: Die Thermoelemente *A*, *B* (Abb. 5a) hängen an Kabeln, und zwar so, daß *A* etwa 20 m unterhalb des Flugzeugrumpfes zu liegen kommt und *B* 10 m unter *A* liegt.

Die Entfernung von 20 m dürfte genügen, um Messungen zu gewinnen, die frei von aerodynamischen Einflüssen sind. Die Temperaturdifferenzmessung (Abb. 5b) soll auf $0,01^{\circ}\text{C}$ genau erfolgen. Das entspricht einem Thermospannungswert von 10^{-6} Volt. Dieser kann mit handelsüblichen Gleichstrommeßverstärkern hinreichend leistungsverstärkt werden.

Bei Beginn der Arbeit werden die Thermoelemente *A*, *B* auf gleiche Höhe gebracht und der Zeiger wird auf 0 gestellt. Zur Ausschaltung der Wirkung von Unsymmetrien (z. B. verschiedene Klemmung) werden gelegentlich die Höhen von *A* und *B* vertauscht.

Zur Verhinderung der Drehung der Meßstellen und zum Schutz gegen Strahlungen werden die Thermoelemente je mit einem Stromlinienkörper umgeben. Über Stromlinienkörper, die an Flugzeugen angehängt werden, bestehen große fliegerische Erfahrungen, z. B. auf Kabel angehängtes Flugmagnetometer für Erdölsuche.

Betrachten wir nochmals die Bestimmung des Bildnadirs nach der oben beschriebenen Art, so kann festgestellt werden, daß die Wirkung systematischer und zufälliger Fehler der Statoskopregistrierungen umso kleiner wird, je größer die Entfernungen der Vermessungsflugzeuge sind. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Abweichung der Isobarenflächen von den Niveauflächen. Hingegen wird die Wirkung

der Refraktion des Lichtes (= Verschiebung von p_1 und p_2 , Abb. 4) umso bedenklicher, je größer diese Entfernungen sind.

In Flughöhen von 3 bis 6 km beträgt zwar die Refraktion im Mittel nur 50% von der Refraktion der etwa 10 m über dem Boden gelegenen Schichten, aber die Entfernungen bis zu 40 km sind doch erheblich. Die Größe der dabei auftretenden Refraktionskorrektur schätzen wir mit der bekannten Gl.: Winkelfehler = $2''$, $1 \cdot e$ (e in km) ab und erhalten $84''$. Dieser Mittelwert ist groß und sagt überdies über den Einzelfall nur wenig aus.

Obige Messungen ermöglichen jedoch die gewünschten aerologischen Daten als Funktion des Raumes und der Zeit festzulegen. Zur Messung dieser Daten ist es besonders günstig, daß die Vermessungsflugzeuge verhältnismäßig kleine Fluggeschwindigkeiten aufweisen. Da die Seitenlängen der Verbanddreiecke ≤ 40 km sind, werden die aerologischen Messungen in parallelen Geraden von je ≤ 20 km Abstand ausgeführt. Zwischen zwei Standpunkten dürfte (schönes Wetter ist vorausgesetzt) mit genügender Genauigkeit, linearer Verlauf der aerologischen Daten angenommen bzw. approximiert werden können.

d) Die Refraktion

Einen guten Einblick in die Refraktion des Lichtes in der Atmosphäre gewinnen wir, wenn wir den Erdradius unendlich groß annehmen. Die Atmosphäre besteht sodann aus beliebig dünnen horizontalen Schichten mit dem Brechungsexponenten $n_1, n_2, n_3 \dots n_b$.

Vom Gegenstand G gehe ein monochromatischer Lichtstrahl aus, dessen Weg wir verfolgen. Nach dem Gesetz von Snellius (Abb. 6) ist

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n_b \sin \alpha_b = \text{const.} \quad \dots (2)$$

Wir nehmen jetzt an, der Gegenstand G liegt in der durch den Beobachtungsort B gehenden horizontalen Ebene. Dann ist für einen in dieser Ebene liegenden Lichtstrahl $\alpha_1 = 90^\circ$ und $n_1 = n_e$ (= der dieser Ebene zugeordnete Brechungsindex). Wenn wir nun $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_b = 90^\circ$ und $n_1 = n_2 = \dots = n_b = n_e$ setzen, so sind die Gln. (2) befriedigt.

Daraus könnte man schließen, daß ein Lichtstrahl, der in der horizontalen Ebene liegt, auch in dieser Ebene bleibt. Es ist jedoch bekannt, daß in unserem Fall (also bei Erdradius = ∞) die tatsächliche Refraktion des Lichtes nicht 0 ist, sondern sogar ein Maximum aufweist.

Es sieht so aus, wie wenn in diesem Fall die geometrische Behandlung des Lichtes versagen würde. Das ist nicht ganz richtig; es gibt nämlich eine *zweite Lösung*: Die Krümmung des Lichtstrahls nach unten. Setzt man nämlich $\alpha_1 = 90^\circ$ und $n_1 = n_e$, so können die Gln. (2) auch erfüllt werden, wenn man $n_2 > n_e$ und $\alpha_2 < 90^\circ$ usw. annimmt.

Die Gln. (2) in allgemeiner Form

$$n \cdot \sin \alpha = c$$

differentiiert

$$dn \sin \alpha + n \cos \alpha d\alpha = 0$$

Ist dh die Breite einer Schichte und ρ der Krümmungsradius des Lichtkurvenstückes, so kann aus der Abb. 7 abgelesen werden

$$\cos \alpha = \frac{dh}{ds}; \quad -d\alpha = \frac{ds}{\rho}$$

In die vorhergehende Gl. eingesetzt und vereinfacht ergibt die bekannte Gl.:

$$\rho = \frac{n}{\left(\frac{dn}{dh}\right) \sin \alpha} \quad \dots (3)$$

ist $\alpha = 90^\circ$, so folgt

$$\rho = \frac{n}{n'} \quad \dots (3a)$$

Von vornherein ist klar, daß die Wellenoptik zur zweiten Lösung führen wird: Es gibt keinen Lichtstrahl, sondern nur einen Lichtstrom. Dieser muß naturgemäß eine bestimmte Breite aufweisen.

Die Luft zerlegen wir wieder in dünne Schichten (Breite dh) mit dem Brechungs-exponenten n_1, n_2, n_3 . Die Lichtgeschwindigkeiten eines horizontal eintretenden Lichtstromes sind sodann in den einzelnen Schichten verschieden. Definitionsgemäß ist

$$n_1 = \frac{c}{c_1}, \quad n_2 = \frac{c}{c_2} \quad \dots (4)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und c_1, c_2, \dots die Lichtgeschwindigkeiten im jeweiligen Medium bezeichnen. Die Breite des Lichtstromes nehmen wir so klein an, daß innerhalb dieser die Änderung der Lichtgeschwindigkeit linear verläuft. Der ursprünglich horizontal eintretende Lichtstrom wird nach der Zeit dt die in Abb. 8 ersichtlichen *Elementarwellenflächen* erzeugt haben. Die *Wellenfläche des gesamten Lichtstromes* ist die Tangentialebene an die *Elementarwellenflächen* und die Richtung des Lichtstromes nach der Zeit dt ist somit geneigt. Der Krümmungsradius der Lichtkurve ergibt sich, wenn man von der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ausgeht (Abb. 8).

$$\rho: c_1 dt = dh:(c_1 - c_2) dt$$

Aus Gl. (4) c_1 und c_2 eingesetzt, ergibt

$$\rho = \frac{\frac{n_2}{n_2 - n_1}}{dh} = \frac{n}{n'}$$

Wie unter c) im vorletzten Absatz erwähnt wurde, ist die Wirkung der Refraktion groß. Die wirkliche Lichtkurve durch einen Kreis zu ersetzen reicht in unserem Fall

kaum aus. Der Kreis ist nur eine einparametrische Kurve und ergibt in beiden Endpunkten die gleiche Refraktion, was nicht immer befriedigen wird. Aus den unter c) angeführten aerologischen Daten können bekanntlich n und n' berechnet werden und nach Gl. (3a) ergeben sich die Krümmungsradien ρ der Lichtkurven. Zur Berechnung der Lichtkurven und insbesondere der Tangentenrichtungen in ihren Endpunkten gehen wir von der *natürlichen Gleichung* einer Kurve aus [1]:

$$f(s, \rho) = 0 \quad \dots (5)$$

In dieser Gl. wird der Krümmungsradius ρ einer Kurve als Funktion der Bogenlänge s dargestellt. Damit wird die Gestalt einer Kurve bestimmt, ohne ihre Lage in bezug auf ein Koordinatensystem anzugeben.

In den meisten Fällen wird es genügen, zwischen zwei Luftstandpunkten eine lineare Änderung von ρ anzunehmen. Diese Annahme entspricht der logarithmischen Spirale, deren natürliche Gl. lautet:

$$\rho = ks \quad \dots (6)$$

Betrachten wir noch allgemeinere Kurven dieser Art, u. zw. solche, deren ρ einer Potenz von s proportional ist

$$\rho = ks^n \quad \dots (7)$$

so findet man für $n = +1$ eine *logarithmische Spirale*, für $n = 1/2$ eine *Kreisevolvente*, für $n = 0$ einen *Kreis*, für $n = -1$ eine *Klothoide*. Von diesen Kurven ist die logarithmische Spirale die einzige, die sich ins Unendliche ausdehnt, und dort wird auch ρ unendlich groß. Die logarithmische Spirale hat zwar nur einen Parameter, aber die Lichtkurve wird durch ein entsprechendes Stück einer logarithmischen Spirale ersetzt.

Sind die Entfernungen von zwei Punkten 1, 2 und die diesen Punkten zugeordneten Krümmungsradien ρ_1, ρ_2 gegeben, so ist damit eine logarithmische Spirale bestimmt und der Winkel $\varphi_{1,2}$ der Tangenten in den beiden Punkten kann berechnet werden (Abb. 9).

Die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale mit dem Anfangsradius ρ_1 ist

$$\rho = ks + \rho_1$$

somit ist

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{s_{1,2}}$$

Ferner ist

$$ds = \rho d\varphi \text{ daher } \varphi = \int \frac{ds}{\rho}$$

somit ist

$$\varphi_{1,2} = \int_0^{s_{1,2}} \frac{ds}{ks + \rho_1} = \frac{1}{k} \int_0^{s_{1,2}} \frac{d(ks + \rho_1)}{ks + \rho_1}$$

$$\varphi_{1,2} = 206265'' \frac{s_{1,2}}{\rho_2 - \rho_1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \dots (8)$$

Für ρ_2 ist immer der größere Radius der beiden Krümmungsradien einzusetzen. Ist $\rho_2 - \rho_1$ klein, so folgt nach Reihenentwicklung, wenn $a_1 = \rho_1:R$, $a_2 = \rho_2:R$,

$$\Delta = a_2 - a_1 \text{ ist: } \varphi_{1,2} = 32'',38 \frac{s_{1,2}}{a_1} \left(1 - \frac{\Delta}{2a_1}\right) \quad \dots (8a)$$

$\varphi_{1,2}$ ist die Gesamtrefraktion. Die Refraktionen in den Punkten 1, 2 sind die Winkel der genannten Tangenten mit der Sehne 1, 2. Ihre Summe ist immer $\varphi_{1,2}$. Auch diese Winkel könnten unter der Annahme, daß die Lichtkurve eine logarithmische Spirale ist, exakt berechnet werden. Es wird jedoch genügen, die Aufteilung der Gesamtrefraktion $\varphi_{1,2}$ entsprechend den Krümmungsradien ρ_1, ρ_2 vorzunehmen.

Beispiel: $\rho_1 = 8R$, $\rho_2 = 9R$ ($R = \text{Erdradius}$), $s_{1,2} = 30 \text{ km}$
somit ist:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= 206265'' \frac{30}{R} \cdot \ln \frac{9}{8} \\ \varphi_{1,2} &= 114'' \\ (114:17) \cdot 8 &= 54'' \quad \dots \text{ Refraktion im Punkt 2} \\ (114:17) \cdot 9 &= 60'' \quad \dots \text{ Refraktion im Punkt 1} \end{aligned}$$

Berechnet man $\varphi_{1,2}$ nach Gl. (8a), so ergeben sich ebenfalls $114''$. Berechnet man $\varphi_{1,2}$ für einen mittleren Radius $= 8,5R$ ($\Delta = 0$) nach Gl. (8a), so kommt man zu dem gleichen Wert. Daraus erkennt man, daß Gl. (8a) im allgemeinen ausreichen wird.

Wir kommen nochmals auf Gl. (3) zurück und erkennen, daß zur Bestimmung von ρ das Gefälle senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles gemessen werden müßte. Da in unserem Fall die vorkommenden Zenitdistanzen nahe 90° sind, begehen wir nur einen Fehler von zweiter Kleinheitsordnung, wenn wir G. (3a) verwenden.

Ferner schreiben wir noch die bekannte *Invariantenbeziehung* auf, die für kugelförmig gekrümmte Luftschichten gilt und ebenfalls nach dem Gesetz von Snellius abgeleitet wird.

$$r_1 n_1 \sin \alpha_1 = r_2 n_2 \sin \alpha_2 = \dots r_b n_b \sin \alpha_b = \text{const.} \quad \dots (9)$$

$r_1, r_2 \dots$ sind die Kugelradien der Luftschichten. Analog den mit den Gln. (2) angestellten Überlegungen erkennen wir, daß diese *Invariantenbeziehung* mit $r_1 = r_2 = \dots r_b$; $n_1 = n_2 = \dots n_b$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_b = 90^\circ$ befriedigt wird. Das Brechungsgesetz von Snellius liefert also auch in diesem Fall ein unbrauchbares Resultat. Denn aus terrestrischen Messungen ist bekannt, daß in diesem Fall der Krümmungsradius des Lichtes etwa $8R$ ist. Auch in diesem Fall gibt es noch eine *zweite Lösung*, die geometrisch und wellenoptisch abgeleitet werden kann und mit unserem Ergebnis praktisch übereinstimmt.

e) *Messung des geostrophischen Windes*

Wie unter c) beschrieben wurde, werden in den aerologischen Stationen die absoluten Topographien der Isobarenflächen, die ganze Erde umspannend, täglich hergestellt. Hinsichtlich der Abweichung der Isobarenflächen von den Niveauflächen geben diese absoluten Topographien natürlich auch für jedes Vermessungsgebiet mindestens generelle Informationen.

Eine Verfeinerung dieser Topographien etwa durch Radiosonden erreichen zu wollen, die ihre Informationen kleinen im Vermessungsgebiet errichteten aerologischen Stationen senden, wäre nicht nur sehr kostspielig, sondern kaum möglich; denn die Höhenfehler der Radiosonden wären zu groß im Vergleich zu den verhältnismäßig kleinen Dimensionen des Vermessungsgebietes. Ferner müßten die absoluten Höhen der Stationen terrestrisch bestimmt werden.

Es entsteht die Frage, ob man mit den Geräten, die die drei Flugzeuge mitführen, diese Verfeinerung erreichen kann.

Wir gehen von bekannten Tatsachen aus: Orte hohen und tiefen Druckes der Atmosphäre bestehen oft tagelange nebeneinander. Daß nicht ein sofortiger Ausgleich dieser Druckunterschiede stattfindet, wird nur durch die Rotation der Erde um ihre Achse bewirkt. Würde die Erde nicht rotieren, dann müßte der sofortige Ausgleich der Druckunterschiede senkrecht zu den Richtungen der Isobaren einer Isobarenkarte erfolgen. Bekanntlich bewirkt aber die infolge der Erdrotation entstehende *Coriolisbeschleunigung*

$$b = 2 \omega v \sin \varphi \quad \dots (10)$$

(ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde, v = Geschwindigkeit des Luftteilchens, φ = Breite), daß Winde über 1000 m Höhe (sie sind frei von Reibungen mit dem Boden) immer nahezu in Richtung der Isobaren verlaufen und daß enge Isobaren großen Windgeschwindigkeiten entsprechen müssen.

Diese Tatsache führte zu einer sehr bewährten Methode der Aerologie: Bestimmung der Richtung und Stärke des Windes aus Isobarenkarten. Es gibt Tabellen und Nomogramme [6] [9] [11] zur Bestimmung des geostrophischen Windes (Isobaren verlaufen geradlinig und parallel) und des Gradientwindes (Isobaren verlaufen gekrümmt).

Wenn es umgekehrt gelänge, Richtung und Stärke des Windes zu messen, könnte man daraus den Isobarenverlauf ermitteln.

Folgender Vorschlag dürfte brauchbar sein: In Abb. 10 ist v_r die relative Geschwindigkeit eines Flugzeugs gegenüber der Atmosphäre. Diese relative Geschwindigkeit heißt auch Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und wird mit sogenannten Fahrtmessern [2] bestimmt. Die Geschwindigkeit über Grund v_g ergibt sich aus photogrammetrischen Daten verhältnismäßig sehr genau. Der Abtriftwinkel α kann mit dem Abtriftmesser bestimmt werden. Daraus folgt die Windgeschwindigkeit v_w . Fliegen die Flugzeuge nicht zu lange Schleifen, so ergibt sich beim Rückflug eine gute Kontrolle (strichliertes Dreieck).

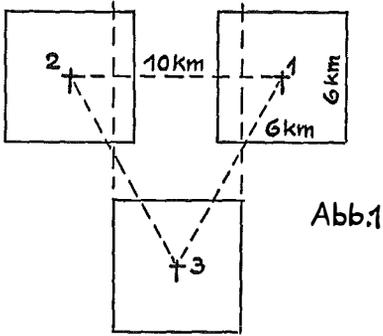


Abb.1

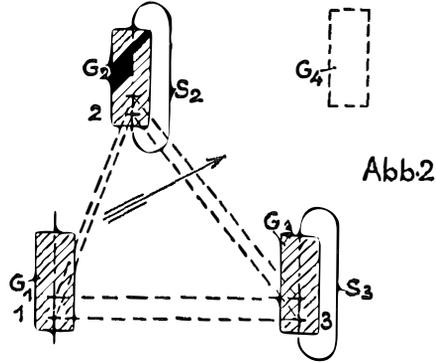


Abb.2

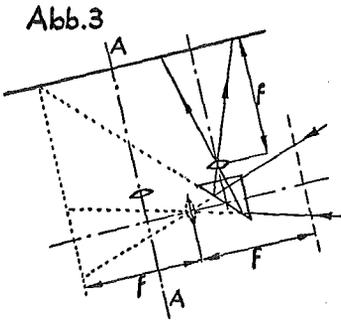


Abb.3

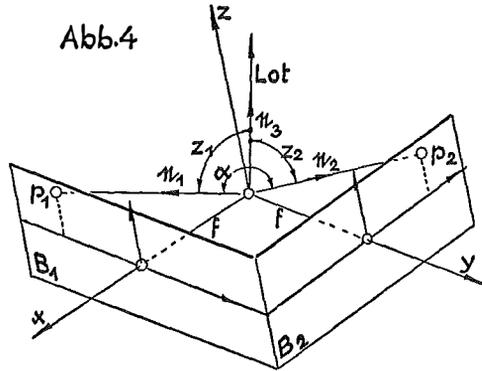


Abb.4

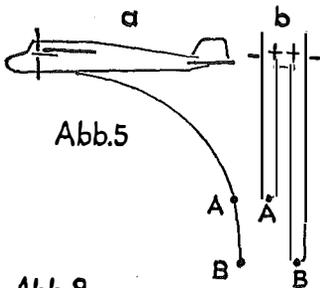


Abb.5

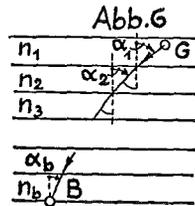


Abb.6

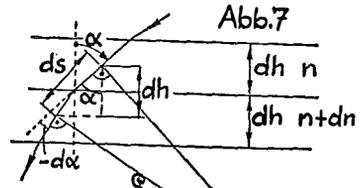


Abb.7

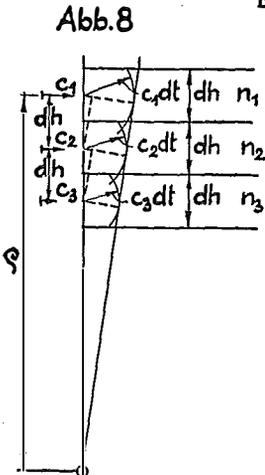


Abb.8

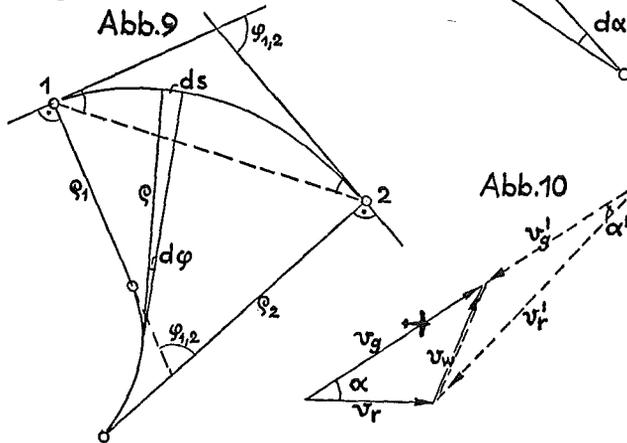


Abb.9

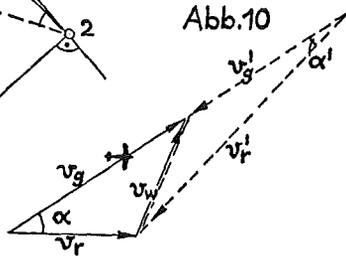


Abb.10

Wie aus Gl. (10) ersichtlich ist, verschwindet die *Coriolisbeschleunigung* in Äquaturnähe. Dort entstehen daher keine geostrophischen bzw. Gradient-Winde, dort können aber auch keine dauernden Tiefs und Hochs bestehen.

f) *Astronomische Azimutbestimmung der Seiten eines Luftstandpunktdreiecks*

Wenn wir voraussetzen, daß zur Aufnahme der Sonne keine speziellen Einrichtungen vorliegen, daß also dazu nur die beschriebenen Horizontkammern verwendet werden, so ist damit auch die Methode der Azimutbestimmung festgelegt: Bestimmung des Azimuts aus der Kenntnis der genäherten geographischen Breite, Deklination der Sonne und Stundenwinkel. Zur Abschätzung der entstehenden Fehler gehen wir von der bekannten Differential-Formel aus (siehe z. B. [7]):

$$da = \frac{\sin q}{\sin z} d\delta + \frac{\cos q \cos \delta}{\sin z} dt + \sin a \cot z d\varphi \quad \dots (11)$$

In dieser Gl. bedeutet $a =$ Azimut, $z =$ Zenitdistanz, $q =$ parallaktischer Winkel an der Sonne, $\delta =$ Deklination der Sonne, $t =$ Stundenwinkel und $\varphi =$ geographische Breite.

Die ungünstigsten Werte der Koeffizienten von $d\delta$, dt und $d\varphi$ kann man folgendermaßen erkennen: Entsprechend dem Aufnahmewinkel der Horizontkammern ist $z > 80^\circ$, somit ist $\sin z > 0,985$, $\cot z < 0,176$. δ kann alle Werte zwischen $\pm 23,5^\circ$ annehmen, somit ist $|\cos \delta| < 0,920$. $\sin q$ und $\cos q$ sowie $|\sin a|$ sind ≤ 1 .

$d\delta$ kann aus Ephemeriden auch bei größten Änderungen von δ etwa auf $1''$ interpoliert werden. Somit beträgt die Wirkung von δ etwa $1''$ bis $2''$.

dt nehmen wir mit $0,1^s$ an, das sind $1,5''$. Der Einfluß von dt ist somit ebenfalls $1''$ bis $2''$.

$d\varphi$ ist der Fehler der geographischen Breite; er setzt sich zusammen aus den Fehlern im Bildnadir (etwa 30 bis $50''$), aus Fehlern der Lotabweichung (im Gebirge etwa 10 bis $15''$), aus Lotstörungen (etwa $5''$ pro 10 km), und aus Lagefehlern der vorläufigen Luftbildauswertung des Stationsdreiecks. Wir nehmen diese Lagefehler etwa 100 m an, das entspricht $3''$ genau. Somit wird $d\varphi$ etwa $80''$ betragen.

Erfolgt die Beobachtung der Sonne im ersten Vertikal ($\sin a = 1$), dann erreicht der Einfluß von $d\varphi$ seinen Höchstwert: $14''$. Erfolgt die Beobachtung der Sonne im Meridian, so hat $d\varphi$ auf das Azimut keinen Einfluß. Setzt man voraus, daß die Beobachtung der Sonne nur im Bereich $\pm 50^\circ$ vom Meridian erfolgt, so ist der Einfluß von $d\varphi < 10''$.

Man erkennt daraus, daß der gesamte Fehler der Azimutbestimmung vorherrschend vom Fehler der photogrammetrischen Winkelmessung zur Sonne und den beiden anderen Flugzeugen abhängen wird.

Die Sonne bildet sich im allgemeinen als Ellipse ab (zentrale Projektion einer Kugel). Bei der Auswertung der Sonnenbilder ist zu beachten, daß der Mittelpunkt des Sonnenbildes nicht gleich ist dem Bild des Sonnenmittelpunktes. Um letzteren Punkt aus dem Sonnenbild zu bestimmen, sind kleine Korrekturen zu berechnen. Gelegentlich wurde diese Tatsache bei photogrammetrischen Azimutbestimmungen mit der Sonne übersehen.

Nehmen wir an, der mittlere Fehler des Winkels zwischen Sonne und einem Flugzeug wäre $\pm 15''$ und der mittlere Fehler nach Gl. (11) abgeschätzt wäre $\pm 10''$, dann wäre der Fehler einer Azimutmessung

$$\sqrt{15^2 + 10^2} = \pm 18''$$

Beachtet man noch, daß in jedem der drei Standpunkte die Azimutmessung erfolgt, d. h. für jede der drei Seiten zweimal die Azimute fast unabhängig voneinander bestimmt werden, so folgt der mittlere azimutale Fehler des Standpunktdreiecks mit $\pm 18''$: $\sqrt{6} \doteq \pm 10''$.

Abschließend vergleichen wir noch eine terrestrische Trilateration bzw. Triangulation mit dem beschriebenen Verfahren. Wir können feststellen, daß die terrestrischen Verfahren zwar höchste Genauigkeit erreichen, daß sie aber einen gewaltigen Aufwand von Zeit und Arbeit für die Erkundung, für den Signalbau, für die Durchführung der Vermessung, für die Stabilisierung und für die Luftsichtbarmachung beanspruchen. Die Trilateration in der Luft erfordert zwar einen ungewöhnlich hohen technischen Aufwand, aber in vielen Fällen wird dieser Aufwand im Vergleich zur erreichbaren Leistung nur sehr gering zu bewerten sein.

Literatur

- [1] *Cesàro, E.*: Vorlesungen über natürliche Geometrie, Verlag Teubner, 1901
- [2] *Duda, Th.*: Flugzeuggeräte Bd. 1, 2 VED Verlag Technik Berlin 1959
- [3] *Hesse, W.*: Handbuch der Aerologie, Akademische Verlagsgesellschaft 1961
- [4] *Killian, K.*: Vorschläge zur räumlichen Aeorotriangulation, Ö.Z.f.V., 56. Jahrgang, Nr. 3 (1968)
- [5] *Koschmieder, H.*: Dynamische Meteorologie, 3. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft, 1951
- [6] *Linke, F.*: Meteorologisches Taschenbuch IV, Akademische Verlagsgesellschaft, 1943.
- [7] *Mühlig, F.*: Astronomisch-geodätische Ortsbestimmung, Verlag Herbert Wichmann, 1960.
- [8] *Müller, G.* u. *Reinhardt, M.*: Zur Bestimmung atmosphärischer Parameter bei Flugzeugmessungen, Z. Flugwissenschaft 14 (1966), Heft 2.
- [9] *Philipps, H.*: Gradientwind-Nomogramm, Z. f. Meteorologie, 1, 1947.
- [10] *Raethjen, P.*: Physik der Atmosphäre, 1. u. 2. Bd., Verlag Teubner, 1942.
- [11] *Scherhag, R.*: Wetteranalyse und Wetterprognose, Verlag Springer, 1948.

On Model Formation With Remote Sensing Imagery

By *F. Leberl*, Enschede (The Netherlands)

1. *Introduction*

The imaging remote sensing systems on which the photogrammetric interest is presently focused, are enumerated in table 1. Not considering the conventional frame camera, the number of contributions in the open literature to the problem of deriving object-space coordinates from remote sensing imagery is rather small.

However, for a number of systems of table 1, model formation with remote sensing imagery has been discussed. An excellent review of the state of the art was