Paper-ID: VGI_197202

Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers

Anton Kossina [1]

[1] *St. Johann i. Pongau*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (1), S. 2–5

1972

BibTEX:

```
@ARTICLE{Kossina_VGI_197202,
Title = {Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers},
Author = {Kossina, Anton},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {2--5},
Number = {1},
Year = {1972},
Volume = {60}
}
```

Die Genauigkeitsaussage des mittleren Punktlagefehlers

Von *Anton Kossina*, St. Johann i. Pongau

Es ist üblich, den 3fachen Wert des mittleren Fehlers als oberste Schranke (Fehlergrenze) festzulegen. Die Anzahl der Fehler, die über diesem Wert liegen, ist dann 0,3% (oder: 0,3% „Ausschuß"). Diese Aussage gilt jedoch nicht für den mittleren Punktlagefehler. Der Grund dieser Unstimmigkeit liegt darin, daß man für Fehlerverteilung bei einer eindimensionalen Größe (z. B. eine Strecke) die Gauß'sche Glockenkurve verwendet, deren Fläche zwischen x-Achse und Kurve ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, hingegen muß man bei einer Punktlage (zweidimensional) diese Kurve um ihre Symmetrieachse rotieren lassen und das Volumen unter dieser Fläche stellt das Wahrscheinlichkeitsmaß dar.

Diese Zusammenhänge lassen sich an folgendem Beispiel in einfacher Weise zeigen. Dabei nehme ich an, daß $m_x = m_y = m$ ist, daß also die Fehlerellipse zu einem Kreis ausartet.

Gegeben seien die Koordinaten eines Punktes: $y_0 \pm m$, $x_0 \pm m$. Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert von y zwischen $y_0 - m$ und $y_0 + m$ liegt, ist 68,2%; also die bekannten $^2/_3$.

Man definiert nun die Aussage $(y_0 - m < y < y_0 + m)$ als Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis A eintrifft, lautet $p(A)$;

$$p(y_0 - m < y < y_0 + m) = 0{,}682 = p(A)$$

analog gilt: $$p(x_0 - m < x < x_0 + m) = 0{,}682 = p(B)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Ereignisse zutreffen, daß also sowohl für x als auch für y der wahre Wert innerhalb der Schranke $\pm m$ liegt?

Nach einem Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt für unabhängige Ereignisse: $p(A \, . \, B) = p(A) . p(B)$

also: $$0{,}682 . 0{,}682 = p(A \, . \, B) = 0{,}465$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt innerhalb dieses „Fehlerquadrates" $\pm m$ fällt, ist also bloß 46,5 %.

Für die Fehlerellipse (bei der vereinfachten Annahme ein Kreis mit dem Radius m) ist die Wahrscheinlichkeit noch etwas geringer, nämlich 39 % (und nicht 68 %; siehe auch K. Peters im Vortrag „Moderne Tendenzen der Ausgleichsrechnung", gehalten bei der 5. Fachtagung des Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen).

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl x als auch y innerhalb der Schranken des mittleren Punktlagefehlers $\pm M$ fallen?

$$M^2 = m^2 + m^2 = 2\,m^2, \quad M = m\sqrt{2}$$

$$p(A) = p(y_0 - M < y < y_0 + M) = p(y_0 - 1{,}4\,m < y < y_0 + 1{,}4\,m) = 0{,}84$$

$$p(B) - p(x_0 - M < x < x_0 + M) = \qquad = 0{,}84$$

$$p(A.B) = 0{,}84 . 0{,}84 = 0{,}71$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist 71 %.

Die strenge Rechnung für einen Kreis mit dem Radius M ergibt 63 %.

Man kann also grob sagen, daß der mittlere Fehler einer eindimensionalen Größe dasselbe aussagt, wie der mittlere Punktlagefehler für die zweidimensionale Größe des Koordinatenpaares (y, x), und zwar:
$^2/_3$ aller Werte befinden sich innerhalb dieser Schranke.

Der dreifache mittlere Fehler einer eindimensionalen Größe sagt hingegen keineswegs dasselbe wie der dreifache mittlere Punktlagefehler für ein Koordinatenpaar aus!

$$p(A) = p(y_0 - 3\,M < y < y_0 + 3\,M) = p(y_0 - 4{,}24\,m < y < y_0 + 4{,}24\,m) = 0{,}99994$$

$$p(B) = p(x_0 - 3\,M < x < x_0 + 3\,M) = \qquad = 0{,}99994$$

$$p(A).p(B) = 0{,}99994 . 0{,}99994 = 0{,}99988.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt außerhalb des dreifachen mittleren Punktlagefehlers fällt, ist also ungefähr 0,01 %.

Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler einer eindimensionalen Größe über dem dreifachen mittleren Fehler liegt, 0,3 %.

Es drängt sich nun die Frage auf, wie groß der Bereich wäre, wenn 0,3 % der Punkte außerhalb dieses Bereiches fallen sollen. Ich führe den Beweis indirekt:

$$p(A) = p(y_0 - 3{,}2\,m < y < y_0 + 3{,}2\,m) = 0{,}9986$$

$$p(B) = p(x_0 - 3{,}2\,m < x < x_0 + 3{,}2\,m) = 0{,}9986$$

$$p(A.B) = p(A).p(B) = 0{,}997 \qquad \text{q. e. d.}$$

Man sieht also: für die Schranke von $\pm$ 3,2 m fallen 0,3 % der Punkte außerhalb.

Nun ist $3{,}2\,m = 3{,}2\,\dfrac{M}{\sqrt{2}} = 2{,}3\,M$

Man muß also keinesfalls den dreifachen mittleren Punktlagefehler fordern, um 0,3 % zu erhalten, sondern es genügt der 2,3fache Wert. Mit derselben Begründung (0,3 % „Ausschuß") mit der man für eine eindimensionale Größe den dreifachen

mittleren Fehler als Maximalfehler definiert, kann man also bei einer Punktlage den 2,3fachen Punktlagefehler als Maximalfehler fordern.
Dazu ein Beispiel:

$$M = \pm 7 \text{ cm} \rightarrow \text{Maximalfehler } (0{,}3\,\% \text{ „Ausschuß"}) = \pm 16 \text{ cm}$$

Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit bei von diesen Punkten abgeleiteten Größen, z. B. bei einer Strecke zwischen zwei EP?

Die Strecke zwischen zwei Punkten, die mit den mittleren Punktlagefehlern M behaftet sind, hat als mittleren Fehler $m_s = M$. Für diese Strecke (als eindimensionale Größe) gilt jedoch wieder die Aussage, daß 0,3 % der Fehler außerhalb der Schranke von $\pm 3\, m_s = \pm 3\, M$ fallen. Dazu ein Beispiel:

$$m_s = M = \pm 7 \text{ cm} \rightarrow \text{Maximalfehler } (0{,}3\,\% \text{ „Ausschuß"}) = \pm 21 \text{ cm}$$

Der mittlere Punktlagefehler $M = \pm 7$ cm scheint in der Dienstvorschrift Nr. 14, Fehlergrenzen (Erlaß des Bundesamtes f. EuV vom 16. 6. 1970) als Lagegenauigkeit der Einschaltpunkte (EP) auf. Dieser Wert stellt einen Kompromiß dar, denn vor diesem Zeitpunkt gab es für terrestrisch bestimmte EP eine höhere Genauigkeitsforderung ($M = \pm 5$ cm) als für photogrammetrisch bestimmte EP ($M = \pm 10$ cm).

Zusammenfassung von A:

1. Man kann die Ergebnisse der Fehlerrechnung für eindimensionale Größen nicht auf zweidimensionale Größen anwenden.
   (Analogie: Strecken — Flächen
   doppelte Strecken — nicht doppelte Flächen!)
2. Definiert man den Maximalfehler derart, daß man 0,3 % „Ausschuß" zuläßt, so ist
   a) der Maximalfehler einer eindimensionalen Größe (z. B. einer Strecke) gleich dem 3fachen mittleren Fehler m.
   b) der Maximalfehler einer zweidimensionalen Größe (z. B. Koordinatenpaar) gleich dem 2,3fachen Punktlagefehler M.
   (Es fallen dann 0,3 % der Punkte außerhalb des „Fehlerquadrates".
   $y_0 = \pm 2{,}3\, M, \quad x_0 = \pm 2{,}3\, M.$
   Soll der Bereich kein Quadrat, sondern ein Kreis sein, so ist dessen Radius 2,4 M. Beweis siehe unter *B*.)

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Bestimmung der Koordinaten als Schuß auf eine Zielscheibe auffaßt.

Wir betrachten eine zweidimensionale Zufallsgröße, deren Komponenten x, y, voneinander unabhängige, nach dem Normalgesetz verteilte Zufallsgrößen sind. Außerdem stellen wir uns einen bestimmten Bereich in der xy-Ebene vor und fragen nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen eines Punktes innerhalb dieses Bereiches.

Der Bereich sei ein Kreis mit dem Radius R, dessen Mittelpunkt die Koordinaten a, b haben; a und b sind die wahrscheinlichsten Werte der beiden Zufallsgrößen x, y.

Die Gleichung des Kreises, der diesen Bereich begrenzt, lautet:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt innerhalb dieses Kreises auftritt, ist:

$$p(\lambda) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

λ ist eine Konstante mit folgender Bedeutung:

$$\lambda = \frac{R}{m} \text{ wobei } m_x = m_y = m \text{ ist.}$$

(mittlerer Fehler einer Zufallsgröße)

Die Werte für einige wichtige Radien lauten:

R	Anzahl der Treffer	Ausschuß
m	39%	61%
$M = m\sqrt{2}$	63%	37%
2,4 M	99,7%	0,3%
3 M	99,99%	0,01%

Da es sich hier um einen kreisförmigen Bereich handelt, bestehen einige kleine Abweichungen zum vorhergehenden Ergebnis.

Zusammenfassung von B:

Man kann die Bestimmung der Koordinaten eines Punktes als das Schießen auf eine Zielscheibe auffassen. In der Mitte dieser Zielscheibe ist der wahre Wert, den man treffen will.

Es wurde die Anzahl der Treffer für einige wichtige Radien der Zielscheibe berechnet.

Benützte Literatur:

Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Akademie-Verlag, Berlin 1958.

Klotoidenschnittpunkte

Von *Gerhard Palfinger*, Wien

1. *Einführung*

Zur mathematischen Festlegung des Grundrisses projektierter Straßenachsen werden im allgemeinen drei Trassierungselemente verwendet. Entsprechend den einschlägigen Vorschriften sind dies die Gerade, der Kreis und die Klotoide. Neben der Einrechnung der Elemente sind auch die eventuell vorhandenen Schnittpunktberechnungen zwischen den Elementen oder auch den Fahrbahnrändern, die zu den Elementen gleichen oder variablen Abstand haben, vorzunehmen. Die Schnittpunkte zwischen den Elementen Gerade und Kreis erhält man nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie auf direktem Weg. Schneiden sich hingegen zwei Trassie-