



Bemerkungen zum Querfehler in Zugsmittle bei einem Polygonzug mit Zwischenorientierungen

Josef Zeger ¹

¹ *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Abt. K 3, 1080 Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **59** (4), S. 113–122

1971

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Zeger_VGI_197112,  
Title = {Bemerkungen zum Querfehler in Zugsmittle bei einem Polygonzug mit  
Zwischenorientierungen},  
Author = {Zeger, Josef},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {113--122},  
Number = {4},  
Year = {1971},  
Volume = {59}  
}
```



$$da = (tg \varphi + ctg z \cos a) \operatorname{cosec} a dz - (ctg z + tg \varphi \cos a) \operatorname{cosec} a d\varphi + \cos \delta \sec \varphi \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} z d\delta \quad (23)$$

Aus dieser sieht man, daß sich widersprechende Forderungen vorliegen. Damit der Einfluß einer fehlerhaften Breite minimal wird, müßte $t = 90^\circ$, zur Elimination eines Meßfehlers in der Zenitdistanz $q = 90^\circ$ (Elongation) sein.

Literatur

[1] *Mueller, I.*: Spherical and Practical Astronomy, Frederick Ungar Publishing Co., New York.

[2] *Rimmer, K.*: Über räumliche Drehungen, DGK, Reihe A, Heft 25.

[3] *Brandstätter, G.*: Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen. ÖZfV 1966, Heft 5, Seite 137–145.

Bemerkungen zum Querfehler in Zugsmitte bei einem Polygonzug mit Zwischenorientierungen

Von *Josef Zeger*, Wien

Zusammenfassung

Kritische Untersuchung der Gleichung für die Berechnung des Querfehlers in der Mitte eines an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzuges (aus Jordan/Eggert/Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde), sowie der aus dieser Gleichung abgeleiteten Behauptung, daß der Querfehler in Zugsmitte beim Vorhandensein einer einzigen Zwischenorientierung größer wird als bei einem gleichen Polygonzug ohne Zwischenorientierung.

Für die Beurteilung der Güte eines Polygonzuges ist nicht nur die Größe seiner Abschlußfehler maßgebend, es ist auch nötig, über die nach der Ausgleichung zu erwartenden Lagefehler der Polygonpunkte Bescheid zu wissen. Da im allgemeinen der Polygonpunkt in Zugsmitte den größten Lagefehler zu erwarten hat, werden vielfach Abschätzungsformeln für den Längs- und Querfehler des Polygonpunktes in Zugsmitte angegeben, mit deren Hilfe man bereits nach der Erkundung eines Polygonzuges abschätzen kann, mit welchen Lagefehlern man in diesem Zug nach der Ausgleichung zu rechnen haben wird. Für den allgemeinen Fall eines Polygonzuges sind solche Formeln relativ kompliziert und somit für die praktische Anwendung wenig geeignet. Da man außerdem immer bestrebt sein wird, der Idealform eines Polygonzuges — gestreckter Zug mit gleich langen Seiten — möglichst nahe zu kommen, werden der einfacheren Handhabung wegen diese Abschätzungsformeln für den gestreckten Zug mit gleich langen Seiten angegeben.

Die Abschätzung des Längsfehlers in Zugsmitte ist abhängig von dem bei der Polygonzugsmessung verwendeten Streckenmeßgerät, sie bietet weiters keine Probleme und wird daher hier auch nur erwähnt. Etwas schwieriger wird es bei der Abschätzung des Querfehlers. In [1] sind im Band II Abschätzungsformeln für den Querfehler in der Mitte eines Polygonzuges angegeben:

a) Querfehler in Zugsmitte für einen an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzug ohne Zwischenorientierungen ([1], Bd. II, Seite 578, Gleichung 25):

$$q^2 = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 3)}{192 \cdot n} \quad \dots (1)$$

b) Querfehler für einen an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzug mit „z“ symmetrisch verteilten Zwischenorientierungen ([1], Bd. II, Seite 584, Gleichung 15):

$$q^2 = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n - 1) \cdot (n + 2z + 1) \cdot (n + z)}{48 \cdot (z + 1)^2} \quad (\text{gültig für } z = 1 \text{ bis } z = n - 2) \quad \dots (2)$$

n ... Anzahl aller Polygonpunkte, einschließlich der Zugsendpunkte

m_β ... mittlerer Fehler eines Polygonwinkels

q ... mittlerer Querfehler

Diese Fehlerformeln beruhen auf folgenden Voraussetzungen:

- Der Polygonzug ist gestreckt;
- alle Polygonseiten sind gleich lang;
- die Zwischenorientierungen teilen den Polygonzug in gleich große Teilzüge;
- die Zielpunkte der Zwischenorientierungen sind unendlich weit entfernt;
- die Winkel zwischen einer Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten sind unabhängig voneinander gemessen und nicht als ein Richtungssatz.

Setzt man in Gleichung (2) $z = 1$, erhält man

$$q^2(z=1) = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \cdot (n + 3)}{192} \quad \dots (3)$$

Das Verhältnis zwischen Gleichung (1) und Gleichung (3) ergibt

$$\frac{q^2(z=0)}{q^2(z=1)} = \frac{n^2 + 3}{n \cdot (n + 3)} = \frac{n + \frac{3}{n}}{n + 3} \quad \dots (4)$$

Gleichung (4) zeigt nun deutlich, daß der Querfehler in Zugsmitte beim Vorhandensein einer einzigen Zwischenorientierung größer ist als beim selben Polygonzug ohne Zwischenorientierung. Auf dieses merkwürdige Ergebnis ist auch bereits in [1], Band II, auf Seite 585 hingewiesen, ebenso auch in [2] auf Seite 715.

Es kann nun andererseits leicht nachgewiesen werden, daß es unmöglich ist, daß durch das Hinzutreten einer einzigen Zwischenorientierung der Querfehler in Zugsmitte verschlechtert wird. In einem Polygonzug stellt jede Zwischenorientierung eine zusätzliche Bestimmung und in weiterer Folge eine zusätzliche Überbestimmung dar. Bei einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ergibt jede Überbestimmung eine Bedingungsgleichung. Den Lagefehler des Polygonpunktes in Zugsmitte erhält man bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Hilfe des Gewichtes einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$M^{(\frac{n+1}{2})} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{FF}^{(\frac{n+1}{2})_x} + Q_{FF}^{(\frac{n+1}{2})_y}} \quad \dots (5)$$

$$Q_{FF} = \left[\frac{ff}{p} \cdot r \right] = \left[\frac{ff}{p} \right] - \frac{\left[\frac{af}{p} \right]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \dots - \frac{\left[\frac{rf}{p} \cdot (r-1) \right]^2}{\left[\frac{rr}{p} \cdot (r-1) \right]} \quad \dots (6)$$

([1], Bd. I, Seite 521, Gleichung 17).

Für einen Polygonzug von allgemeiner Form, der an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßigen Anschluß, aber keine Zwischenorientierung hat, gibt es bekanntlich drei Bedingungsgleichungen, somit wird das Gewicht für die Koordinaten des Punktes in Zugsmitte zu

$$Q_{FF}^{(3)} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 3 \right] \quad \dots (7)$$

Tritt nun bei diesem Polygonzug noch eine Zwischenorientierung hinzu, erhält man das Gewicht der Koordinaten des Punktes in Zugsmitte aus

$$Q_{FF}^{(4)} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 4 \right] = \left[\frac{ff}{p} \cdot 3 \right] - \frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} \quad \dots (8)$$

Da nun $\left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right]$ immer positiv sein muß und der Zähler des Reduktionsgliedes durch ein Quadrat gebildet wird, muß $Q_{FF}^{(4)}$ im allgemeinen kleiner sein als $Q_{FF}^{(3)}$, im Extremfall, wenn das Reduktionsglied gleich Null wird, kann $Q_{FF}^{(4)}$ höchstens gleich $Q_{FF}^{(3)}$ werden, niemals aber größer.

$$Q_{FF}^{(4)} \leq Q_{FF}^{(3)} \quad \dots (9)$$

Es ist somit nachgewiesen, daß es unmöglich ist, daß der Querfehler in Zugsmitte größer werden kann, wenn in einem Polygonzug eine einzige Zwischenorientierung verwendet wird.

Der für die Berechnung des Punktlagefehlers M notwendige Wert des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, m_0 , wird wohl nicht ganz streng gleich groß sein, wenn ein Polygonzug mit oder ohne Zwischenorientierung berechnet wird, man kann ihn aber als praktisch gleich groß betrachten. Außerdem sollte ja bei richtiger Annahme der mittleren Richtungs- und Streckenfehler a priori der Gewichtseinheitsfehler $m_0 \doteq 1$ werden.

Dieser Widerspruch zwischen den Aussagen der Gleichungen (4) und (9) ist in Wirklichkeit nur scheinbar vorhanden, da die Gleichungen (1) und (3) als Grundlage für das Verhältnis (4) nicht dieselben Voraussetzungen beinhalten, es darf daher auch nicht daraus die Schlußfolgerung gezogen werden, daß beim Einbeziehen einer einzigen Zwischenorientierung der Querfehler in Zugsmitte größer wird als bei einer Berechnung ohne Zwischenorientierung. Während es beim Polygonzug ohne Zwischenorientierungen und unter der Voraussetzung, daß auf den Zugsendpunkten

jeweils nur eine einzige Orientierungsrichtung gemessen wird (siehe Abb. 1), keine Differenzen über die Art der Messung der Polygonwinkel gibt, ist es hingegen beim Auftreten von Zwischenorientierungen von wesentlicher Bedeutung, in welcher Art die Zwischenorientierungen in die Polygonwinkelmessung einbezogen werden.

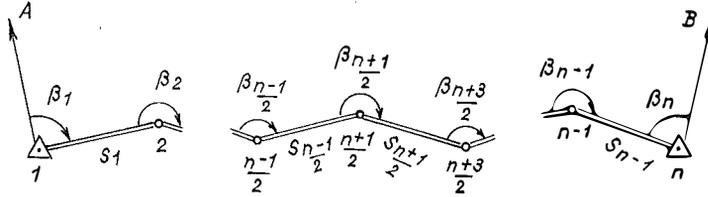


Abb. 1

Bei der Ableitung der Gleichung (3) in [1] wird, wie bereits erwähnt, vorausgesetzt, daß wie in Abb. 2 die Winkel zwischen einer Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten unabhängig voneinander gemessen werden. Durch die getrennte Messung dieser beiden Winkel wird aber die Einheitlichkeit des Gesamtzuges, wie sie z. B. sowohl in Abb. 1 als auch in Abb. 3 gegeben ist,

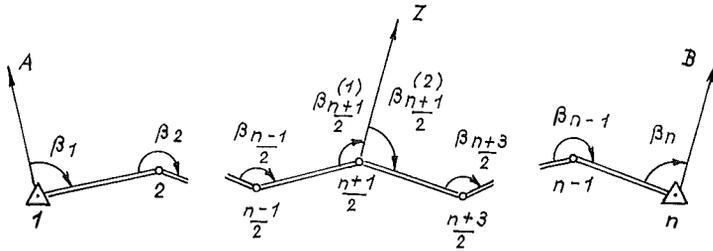


Abb. 2

unterbrochen. Man könnte, falls die Koordinaten des Zugsendpunktes „n“ nicht gegeben wären, bei einer Winkelmessung nach Art der Abb. 2 den zweiten Halbzug von „ $\frac{n+1}{2}$ “ bis „n“ ohne Einfluß auf das Endergebnis wegnehmen und anschließend an die Berechnung des ersten Halbzuges als einen unabhängigen Polygonzug berechnen. Dies wäre jedoch bei einer gleichfalls unabhängigen Messung der beiden

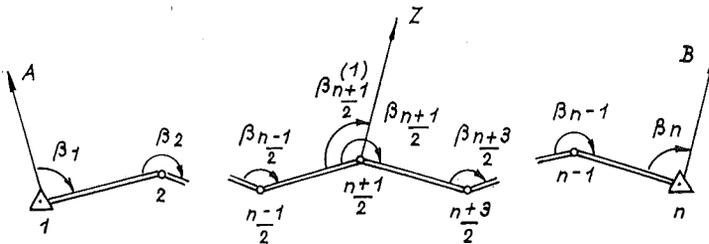


Abb. 3

Winkel auf dem Punkt $\frac{n+1}{2}$ nach Art der Abb. 3 oder bei Messung der Richtungen

im Punkt $\frac{n+1}{2}$ in einem Richtungssatz nicht möglich. Diese Teilung in zwei Halbzüge ist auch in der Art der Ableitung der Gleichung (3) in [1] direkt enthalten.

Will man nun die Gleichung (3), also den Querfehler eines Polygonzuges mit einer einzigen Zwischenorientierung bei einer Winkelmessung nach Art der Abb. 2, vergleichen mit einem gleichwertigen Polygonzug ohne Zwischenorientierung, dann muß man auch für den Zug ohne Zwischenorientierung die gleiche Voraussetzung schaffen. Das würde bedeuten, daß im Punkt $\frac{n+1}{2}$ der Polygonwinkel durch ein koordinatenmäßig nicht gegebenes Hilfsziel gleichfalls in zwei unabhängig gemessene Teilwinkel zerlegt werden müßte, wofür natürlich in der Praxis überhaupt keine Veranlassung besteht. Um aber unter den in [1] gemachten Voraussetzungen eine gültige Aussage über die Auswirkung einer Zwischenorientierung auf den Querfehler in Zugsmitte machen zu können, muß die entsprechende Formel für den Polygonzug ohne Zwischenorientierungen verwendet werden, dies ist aber nicht die Gleichung (1). Damit ist der scheinbare Widerspruch zwischen den Gleichungen (4) und (9) aufgeklärt.

Die Gleichung (2) — gültig für $1 \leq z \leq n-2$ — ist als Erweiterung der Gleichung (3) gleichfalls unter der Voraussetzung der unabhängigen Winkelmessung nach Art der Abb. 2 abgeleitet. Im allgemeinen wird jedoch im Gegensatz dazu auf den Polygonpunkten mit Zwischenorientierungen eine Richtungsmessung erfolgen. Es ist daher die Verwendbarkeit dieser Gleichung für die Abschätzung des Querfehlers in Zugsmitte auch für jene Fälle, wo $z > 1$ ist, nicht als gesichert anzusehen.

Es sollen nun einerseits als Nachweis des oben gesagten und auch als Gegenüberstellung für einen gestreckten Polygonzug mit gleich langen Seiten und einem koordinaten- und richtungsmäßigen Anschluß an beiden Endpunkten unter drei verschiedenen Arten der Einbeziehung einer einzigen Zwischenorientierung im Punkt in Zugsmitte in die Polygonwinkelmessung die entsprechenden Werte für $Q_{FF}^{(3)}$ und für $Q_{FF}^{(4)}$ allgemein abgeleitet werden.

Die Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen, für welche die Q_{FF} ermittelt werden sollen, sind für alle drei Fälle gleich. Die Koordinaten des Punktes in Zugsmitte erhält man aus:

$$y\left(\frac{n+1}{2}\right) = y_1 + s_1 \cdot \sin R^0_1 + s_2 \cdot \sin R^0_2 + \dots + s\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \sin R^0\left(\frac{n-1}{2}\right) \dots (10)$$

$$x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x_1 + s_1 \cdot \cos R^0_1 + s_2 \cdot \cos R^0_2 + \dots + s\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \cos R^0\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Durch partielle Differentiation nach den einzelnen Beobachtungen und nach entsprechender Umformung erhält man daraus für einen Polygonzug von allgemeiner Form die notwendigen f -Werte:

$$f^{(y)}_{\beta_1} = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x_1; f^{(y)}_{s_1} = \sin R^0_1; f^{(x)}_{\beta_1} = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y_1\right); f^{(x)}_{s_1} = \cos R^0_1$$

$$f^{(y)}\beta_2 = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x_2; f^{(y)}s_2 = \sin R^0_2; f^{(x)}\beta_2 = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y_2\right); f^{(x)}s_2 = \cos R^0_2 \dots (11)$$

$$f^{(y)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x\left(\frac{n-1}{2}\right); f^{(y)}s\left(\frac{n-1}{2}\right) = \sin R^0\left(\frac{n-1}{2}\right); f^{(x)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y\left(\frac{n-1}{2}\right)\right); f^{(x)}s\left(\frac{n-1}{2}\right) = \cos R^0\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Für den gestreckten Zug mit gleich langen Seiten werden unter der Annahme von $R^0_1 = R^0_2 = \dots = 100^\circ$ die allgemeinen f -Werte zu:

$$f^{(y)}\beta_i = 0; f^{(y)}s_i = 1; f^{(x)}s_i = 0; f^{(x)}\beta_1 = -\frac{n-1}{2} \cdot s; f^{(x)}\beta_2 = -\frac{n-3}{2} \cdot s; \dots; f^{(x)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = -s \dots (12)$$

Mit diesen partiellen Ableitungen und den Koeffizienten der Fehlergleichungen für die drei Fälle werden die gleichfalls für alle drei Fälle einheitlichen Summen ermittelt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{af}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{af}{p}\right]_x &= -\frac{1}{8} \cdot (n^2 - 1) \cdot s \cdot m^2\beta \\ \left[\frac{bf}{p}\right]_y &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_s & \left[\frac{bf}{p}\right]_x &= 0 \\ \left[\frac{cf}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{cf}{p}\right]_x &= \frac{1}{48} \cdot (n^2 - 1) \cdot (5n - 3) \cdot s^2 \cdot m^2\beta \dots (13) \\ \left[\frac{df}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{df}{p}\right]_x &= -\frac{1}{8} \cdot (n^2 - 1) \cdot s \cdot m^2\beta \\ \left[\frac{ff}{p}\right]_y &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_s & \left[\frac{ff}{p}\right]_x &= \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot s^2 \cdot m^2\beta \end{aligned}$$

Der einfacheren Schreibweise wegen sei hier und in den folgenden Ableitungen m_β im Bogenmaß verstanden. Im Fall drei wurde außerdem m_R unter Verwendung der Beziehung $m_\beta^2 = 2 \cdot m_R^2$ (14) durch m_β ersetzt, um einen Vergleich der Ergebnisse zu erleichtern.

Fall 1: Auf dem Polygonpunkt in Zugsmittle erfolgt die Einbeziehung der Zwischenorientierung durch die Messung der beiden voneinander unabhängigen Winkel zwischen der Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten (siehe Abb. 2). Es müssen daher in der Winkelgleichung für den Gesamtzug für den Punkt $\frac{n+1}{2}$ beide Teilwinkel aufscheinen, ebenso auch in den beiden Projektionsgleichungen. Die Bedingungsgleichung für die Zwischenorientierung wird hier nicht wie in [3] als die Projektion eines Polygons auf die Senkrechte zur Zwi-

schenorientierung eingeführt, sondern aus Gründen der Vereinfachung ebenfalls als Winkelgleichung. Bei der Berechnung des Widerspruches für die der Zwischenorientierung entsprechende Winkelgleichung wird der Widerspruch um $\Delta v \frac{n+1}{2} \cdot z$

zu groß, da der Richtungswinkel zum Zielpunkt der Zwischenorientierung vorerst nur aus vorläufigen Koordinaten berechnet werden kann, es ist daher zur Berücksichtigung der Änderung dieses Richtungswinkels infolge der Änderung der Koordinaten des Standpunktes durch die Ausgleichung in die entsprechende Fehlergleichung die Gauß'sche Relation einzuführen. Zur Vereinfachung wird allerdings der Zielpunkt der Zwischenorientierung ins Unendliche verlegt, wodurch die Gauß'sche Relation gleich Null wird und somit aus der Fehlergleichung wieder verschwindet.

Für den gestreckten Polygonzug mit gleich langen Seiten erhalten die den vier Bedingungsbedingungen entsprechenden Fehlergleichungen unter der Annahme von $R^0_i = 100s$ folgende Form:

$$\begin{aligned}
 v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} + v_{\beta} \binom{(2)}{\frac{n+1}{2}} + \dots + v_{\beta_{n-1}} + v_{\beta_n} + w_1 &= 0 \\
 v_{s_1} + v_{s_2} + \dots + v_{s_{n-1}} + w_2 &= 0 \quad \dots (15) \\
 - (n-1) \cdot s \cdot v_{\beta_1} - (n-2) \cdot s \cdot v_{\beta_2} - \dots - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} \\
 - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta} \binom{(2)}{\frac{n+1}{2}} - \dots - 2 \cdot s \cdot v_{\beta_{n-2}} - s \cdot v_{\beta_{n-1}} + w_3 &= 0 \\
 v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} + w_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nun die folgenden Koeffizienten für die Korrelatengleichungen:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{aa}{p}\right] &= (n+1) \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{bc}{p}\right] &= 0 \\
 \left[\frac{ab}{p}\right] &= 0 & \left[\frac{bd}{p}\right] &= 0 \\
 \left[\frac{ac}{p}\right] &= -\frac{1}{2} \cdot (n^2-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{cc}{p}\right] &= \frac{1}{12} \cdot (n^2-1) \cdot (4n-3) \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (16) \\
 \left[\frac{ad}{p}\right] &= \frac{n+1}{2} \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{cd}{p}\right] &= -\frac{3}{8} \cdot (n^2-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \\
 \left[\frac{bb}{p}\right] &= (n-1) \cdot m^2_s & \left[\frac{dd}{p}\right] &= \frac{n+1}{2} \cdot m^2_{\beta}
 \end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen für die Berechnung der Gewichtskoeffizienten gegeben. Führt man die entsprechenden Reduktionen durch, erhält man:

$$Q_{FF^{(3)}} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 3\right] = \frac{n-1}{4} \cdot m^2_s + \frac{(n^2-1) \cdot (n+3)}{192} \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (17)$$

Das zweite Glied der so erhaltenen Gleichung (17) ist jedoch identisch mit der Gleichung (3). Führt man zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung die nächste Reduktionsstufe durch, muß man feststellen, daß der Zähler des Reduktionsgliedes gleich Null wird:

$$\left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right] = 0 \quad \dots (18). \quad \text{Somit wird } Q_{FF}^{(4)} = Q_{FF}^{(3)} \quad \dots (19)$$

Daß das letzte Reduktionsglied in diesem Fall den Extremwert Null annimmt, hat seine Ursache in der unendlichen Entfernung des Zielpunktes der Zwischenorientierung.

Es ist nun nachgewiesen, daß nur unter der Annahme einer Winkelmessung nach Abb. 2 auch für den Polygonzug ohne Zwischenorientierung die mit Gleichung (3) vergleichbare Formel entsteht.

Fall 2: Auch in diesem Fall werden in dem Punkt in Zugsmitte zwei unabhängige Winkel gemessen, allerdings ist einer dieser Winkel der gewöhnliche Polygonwinkel und der zweite ist der Winkel der Zwischenorientierung mit der vorhergehenden Polygonseite (siehe Abb. 3). In der Winkelgleichung für den Gesamtzug ist hier bei dem Punkt in Zugsmitte nur der reine Polygonwinkel enthalten, ebenso auch bei beiden Projektionsgleichungen. Die vierte Bedingungsgleichung hat dieselbe Form wie im Fall 1. Dieser Fall 2 wird hier nur zu Vergleichszwecken angeführt, es ist kaum anzunehmen, daß eine Polygonzugsmessung in der Praxis in dieser Art durchgeführt wird.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Fall 1 erhalten die Fehlergleichungen folgende Form:

$$\begin{aligned} v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} + \dots + v_{\beta_{n-1}} + v_{\beta_n} + w_1 &= 0 \\ v_{s_1} + v_{s_2} + \dots + v_{s_{n-1}} + w_2 &= 0 \quad \dots (20) \\ - (n-1) \cdot s \cdot v_{\beta_1} - (n-2) \cdot s \cdot v_{\beta_2} - \dots - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} - \dots - \\ - s \cdot v_{\beta_{n-1}} + w_3 &= 0 \\ v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} + w_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Korrelatengleichungen werden somit zu:

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p} \right] &= n \cdot m^2 \beta & \left[\frac{bc}{p} \right] &= 0 \\ \left[\frac{ab}{p} \right] &= 0 & \left[\frac{bd}{p} \right] &= 0 \\ \left[\frac{ac}{p} \right] &= -\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot s \cdot m^2 \beta & \left[\frac{cc}{p} \right] &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (2n-1) \cdot s^2 \cdot m^2 \beta \quad \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{ad}{p} \right] &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{cd}{p} \right] &= -\frac{1}{8} \cdot (n-1) \cdot (3n-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \\ \left[\frac{bb}{p} \right] &= (n-1) \cdot m^2_s & \left[\frac{dd}{p} \right] &= \frac{(n+1)}{2} \cdot m^2_{\beta} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Gewichtskoeffizient für den Polygonzug ohne Zwischenorientierung mit:

$$Q_{FF}^{(3)} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 3 \right] = \frac{n-1}{4} \cdot m^2_s + \frac{(n^2-1) \cdot (n^2+3)}{192 \cdot n} \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (22)$$

Das zweite Glied dieser Gleichung (22) ist identisch mit Gleichung (1). Diese Ableitung untermauert nochmals, daß der Vergleich zwischen den Gleichungen (1) und (3) in der Art, wie dies in [1] durchgeführt wurde, nicht zulässig ist, da beide von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen.

Bei dieser Art der Winkelmessung wird im Gegensatz zu Fall 1 und 3 das Reduktionsglied zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung nicht gleich Null:

$$\frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} = \frac{(n^2-1)^2 \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta}}{16 \cdot n \cdot (n^2+16n-1)} \quad \dots (23)$$

Fall 3: Beim Fall 3 werden in dem Punkt in Zugsmitte die Zwischenorientierung und die Richtungen zu den beiden benachbarten Polygonpunkten in einem gemeinsamen Richtungssatz beobachtet. Auf diese Art wird im allgemeinen auch in der Praxis die Richtungsbeobachtung durchgeführt werden.

Die Bedingungs-, Widerspruchs- und Fehlergleichungen haben das gleiche Aussehen wie im Fall 2, allerdings mit dem Unterschied, daß die einzelnen Winkel durch die Differenz der entsprechenden Richtungen ersetzt sind. Die Koeffizienten der Korrelatengleichungen weisen jedoch bei $\left[\frac{ad}{p} \right]$ und $\left[\frac{cd}{p} \right]$ eine Abweichung gegenüber den entsprechenden Koeffizienten beim Fall 2 auf, während alle übrigen Koeffizienten gleich sind, selbstverständlich nur unter Berücksichtigung der Beziehung (14):

$$\left[\frac{ad}{p} \right] = +\frac{1}{2} \cdot n \cdot m^2_{\beta} \quad \left[\frac{cd}{p} \right] = -\frac{1}{8} \cdot (n-1) \cdot (3n+1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (24)$$

Da die entsprechenden Koeffizienten in beiden Fällen identisch sind, ist auch der Wert von $Q_{FF}^{(3)}$ für beide Fälle gleich. Aber im Gegensatz zum Fall 2 wird hier das Reduktionsglied zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung wie im Fall 1 gleich Null, da auch hier wiederum das Ergebnis der Gleichung (18) eintritt.

Daß der Fehler in Zugsmitte gleich groß ist, unabhängig davon, ob man die eine Zwischenorientierung in die Berechnung einbezieht oder nicht, hat seine Ursache in der ganz speziellen Annahme, daß die Zwischenorientierung einen unendlich weit entfernten Zielpunkt aufweist, wodurch sich der gesamte Berechnungsgang natürlich wesentlich vereinfacht hat. In dem Augenblick, wo die Zwischenorientierung einen Zielpunkt von endlicher Entfernung besitzt, wird selbstverständlich der

Fehler in Zugmitte bei Einbeziehung der einen Zwischenorientierung kleiner werden im Vergleich zur Berechnung ohne diese Zwischenorientierung.

Es ist somit nachgewiesen, daß $Q_{FF}^{(4)}$ niemals größer werden kann als $Q_{FF}^{(3)}$, wohl aber im Extremfall unter besonderen Verhältnissen $Q_{FF}^{(4)} = Q_{FF}^{(3)}$ sein kann.

Literatur

- [1] *Jordan/Eggert/Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage.
 [2] *Herrmann, K.*: Zur Fehlertheorie des zwischenorientierten Polygonzuges, AVN 1929, S. 517ff.
 [3] *Maly, L.*: Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung, ÖZfV, 51. Jahrg. 1963, Seite 39ff.

Mitteilungen

Prof. Dr. Rohrer — 85 Jahre

Mit aus Anlaß der Vollendung des 85. Lebensjahres von Prof. *Dr. Hans Rohrer* gab der Rektor der Technischen Hochschule in Wien, Magnifizenz Prof. *Dr. Erich Bukovics*, am 3. Juni 1971 einen Empfang, an dem auch der Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, *Dipl.-Ing. Ferdinand Eidherr*, teilnahm, der seinerseits aus demselben Anlaß zahlreiche Kollegen für den 8. Juni zu einer „Wiener Jause“ einlud, an der auch Magn. *Bukovics* teilnahm.

Aus den Ansprachen sei nur festgehalten: schon in seiner frühen Dienstzeit war *Rohrer*s Sorge dem Aufbau, der Organisation und dem Ansehen des österreichischen Vermessungswesens, der Hebung unseres Berufsstandes und insbesondere der Reform des geodätischen Hochschulstudiums gewidmet. Und so wurde — dem Fortschritt der Technik folgend — 1924 der „Geodätische Kurs“ zur Unterabteilung für Vermessungswesen erweitert mit der an Technischen Hochschulen üblichen Gliederung der Ausbildung in die wissenschaftlich-technische Grundausbildung und in die anschließende Fachausbildung mit dem Abschluß der beiden Studienabschnitte durch zwei Staatsprüfungen. An die Stelle des im wesentlichen nur für Dienstleistungen innerhalb der Katasterverwaltung herangebildeten Vermessungsgeometers trat der Vermessungsingenieur mit umfassender, voller Hochschulbildung.

Rohrer studierte an unserer Hochschule und war anschließend Beamter im staatlichen Vermessungsdienst. Als hervorragender, leitender Triangulator schuf er die Grundlagen für die Einführung des Gauß-Krüger-Projektionssystems im österreichischen Karten- und Katasterwesen und stellte auf breitem Tätigkeitsfeld bedeutsame Arbeiten für Praxis und Forschung zur Verfügung. In leitender Stellung richtete er sein Augenmerk auf den Ausbau des staatlichen Vermessungswesens und auf die Modernisierung der Vermessungsmethoden. Diese reichhaltige Praxis ermöglichte es ihm als Hochschullehrer seine Vorlesungen vorbildlich zu gestalten und seine Hörer zu der durch die anfallenden wirtschaftlichen, verkehrstechnischen und militärischen Aufgaben notwendig gewordenen Schaffung großräumiger Vermessungssysteme zu befähigen. Diesen für die praktische Ausbildung der Vermessungsingenieure außerordentlich bedeutsamen Vorlesungen entsprechend, gelang es ihm in mühevoller Kleinarbeit — insbesondere in den Jahren nach dem 2. Weltkrieg — die Kartensammlung, die Bibliothek und insbesondere das Instrumentarium der Lehrkanzel stets — dem jeweiligen Stand der Wissenschaft und Instrumententechnik angepaßt — zu ergänzen. Neben dem bestehenden großen Aufgabenkreis widmete er sich mit Vorliebe dem Studium der Geschichte des Vermessungswesens und leitete seine Lehrkanzel nach Vollendung seines Ehrenjahres noch bis 1960. Er bekleidete 1946 bis 1948 die Würde des Dekans der Fakultät für Angewandte Mathematik und Physik, war Mitglied der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, er ist korrespondierendes Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Seine so überaus verdienstvolle Arbeit für unseren Verein begann bereits zur Zeit des ersten Weltkrieges. Seit 1917 gehört *Rohrer* ständig der Vereinsleitung an: als Kassier, 1929 und 1956 bis 1960 als Obmann und heute noch versieht er in selbstloser Weise das arbeitsvolle Amt des Schriftleiters der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen.