

Paper-ID: VGI_197111



Ableitung differentieller Beziehungen in Vektoren- bzw. Matrizenschreibweise in der astronomisch-geodätischen Ortsbestimmung

Herbert Lichtenegger ¹

¹ *Techn. Hochschule, 8010 Graz, II. Lehrkanzel für Geodäsie, Rechbauerstraße 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **59** (4), S. 106–113

1971

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Lichtenegger_VGI_197111,  
Title = {Ableitung differentieller Beziehungen in Vektoren- bzw.  
Matrizenschreibweise in der astronomisch-geod{\'a}tischen Ortsbestimmung},  
Author = {Lichtenegger, Herbert},  
Journal = {{\''0}sterreichische Zeitschrift f{\''u}r Vermessungswesen},  
Pages = {106--113},  
Number = {4},  
Year = {1971},  
Volume = {59}  
}
```



Ableitung differentieller Beziehungen in Vektoren- bzw. Matrizen-schreibweise in der astronomisch geodätischen Ortsbestimmung

Von *Herbert Lichtenegger, Graz*

In der geodätischen Astronomie werden zur Festlegung von Richtungen durch jeweils zwei Parameter verschiedene Koordinatensysteme verwendet. Man unterscheidet im besonderen das Horizontsystem mit den Parametern Zenitdistanz z und Azimut a (gezählt von Süd über West) und das Stundenwinkelsystem mit den Parametern Deklination δ und Stundenwinkel t .

Werden die Richtungen zum Stern, zum Zenit und die Richtung der Rotationsachse der Erde auf eine Einheitskugel (Richtungskugel) abgebildet, so ergibt das entstehende sphärische Dreieck PZS (siehe Abb. 1) eine Transformationsmöglichkeit zwischen den erwähnten Koordinatensystemen, welche mit Hilfe sphärischer trigonometrischer Sätze gefunden werden kann. In weiterer Folge sind auch differentielle Beziehungen für die Wahl günstigster Beobachtungspositionen von Bedeutung.

Es soll im folgenden die Ableitung solcher differentieller Beziehungen ohne Zuhilfenahme von sphärischen Sätzen gezeigt werden, wobei zuerst die Transformation zwischen Horizont- und Stundenwinkelsystem behandelt wird und weiters Differentialformeln direkt aus den Bestimmungsgleichungen zur Festlegung des Zenits bzw. der Richtung des Ortsmeridians abgeleitet werden.

1. Transformation zwischen Horizont- und Stundenwinkelsystem

Die Richtung zum Stern kann ([1],[3]) sowohl im Horizont- wie auch im Stundenwinkelsystem durch einen Richtungsvektor s' bzw. s dargestellt werden. Die jeweilige z -Achse des Koordinatensystems weist zum Zenit bzw. Pol, die x -Achse liegt jeweils orthogonal dazu in der Ebene des Ortsmeridians, und die gemeinsame y -Achse bildet mit x - und z -Achse ein Linkssystem (siehe Abb. 1).

$$s' = \begin{bmatrix} \sin z \cos a \\ \sin z \sin a \\ \cos z \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Transformation kann mit Hilfe einer Drehmatrix \mathbf{R} durchgeführt werden. Da diese Matrix orthogonal ist, kann auch die inverse Transformation durch die transponierte Matrix \mathbf{R}^T leicht durchgeführt werden, da die Beziehung $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$ gilt.

$$s' = \mathbf{R}s \quad s = \mathbf{R}^T s' \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Die skalare Schreibweise ergibt untenstehende Transformationsformeln, wobei diese Gleichungen Sinuscosinus-, Sinus- und Seitencosinussatzanwendungen der sphärischen Trigonometrie auf das sphärische Dreieck bedeuten ([3]).

$$ds = \begin{bmatrix} -\sin \delta \cos t & -\sin t \\ -\sin \delta \sin t & \cos t \\ \cos \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta \\ \cos \delta dt \end{bmatrix} = \mathbf{A}d\mathbf{A} \quad (6b)$$

Damit ergeben sich bereits die differentiellen Beziehungen in Matrizen Schreibweise

$$\mathbf{A}'d\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{A}d\mathbf{A} + d\mathbf{R}_A\mathbf{s}'$$

und unter der Beachtung der Beziehung $\mathbf{A}'^T\mathbf{A}' = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$

$$d\mathbf{A}' = \mathbf{A}'^T\mathbf{R}\mathbf{A}d\mathbf{A} + \mathbf{A}'^Td\mathbf{R}_A\mathbf{s}' \quad (7a)$$

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T\mathbf{A}'d\mathbf{A}' - \mathbf{A}^T\mathbf{R}^Td\mathbf{R}_A\mathbf{s}' \quad (7b)$$

Zur skalaren Umformung beachten wir, daß die Spaltenvektoren von \mathbf{A} und \mathbf{A}' Einheitsvektoren sind, es gilt:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \delta} \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \sec \delta \quad (8a)$$

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{a}', \mathbf{b}'] \quad \mathbf{a}' = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial z} \quad \mathbf{b}' = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial a} \operatorname{cosec} z \quad (8b)$$

Weiters ergibt sich nach Gl. (2):

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial \delta} \quad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial t} \sec \delta \quad (9a)$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{A}' = \bar{\mathbf{A}}' = [\bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{b}}'] \quad \bar{\mathbf{a}}' = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \quad \bar{\mathbf{b}}' = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \operatorname{cosec} z \quad (9b)$$

Ein Teil der in den Gln. (7) vorkommenden Inprodukte kann geometrisch gedeutet und in Funktion des parallaktischen Winkels q ausgedrückt werden (siehe Abb. 2).

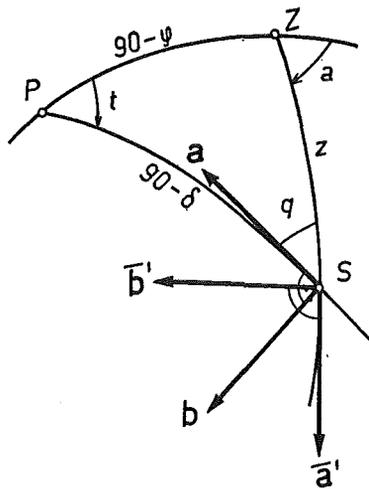


Abb. 2

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^T \bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{a}}' = -\cos q & \mathbf{a}'^T \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{b}}' = \sin q \\ \mathbf{b}'^T \bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{a}}' = \sin q & \mathbf{b}'^T \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{b}}' = \cos q \end{aligned} \quad (10a)$$

Das Glied mit dem Axiator $d\mathbf{R}_A$ ergibt durch einfache Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s}' &= \cos a \, d\varphi & -\mathbf{a}^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s} &= \cos t \, d\varphi \\ \mathbf{b}'^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s}' &= -\sin a \cos z \, d\varphi & -\mathbf{b}^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s} &= \sin t \cos \delta \, d\varphi \end{aligned} \quad (10b)$$

Diese Beziehungen werden in die Gln. (7) eingesetzt und es ergeben sich die skalaren, differentiellen Beziehungen der Transformation.

$$\begin{aligned} dz &= -\cos q \, d\delta + \sin q \cos \delta \, dt + \cos a \, d\varphi \\ \sin z \, da &= \sin q \, d\delta + \cos q \cos \delta \, dt - \sin a \cos z \, d\varphi \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} d\delta &= -\cos q \, dz + \sin q \sin z \, da + \cos t \, d\varphi \\ \cos \delta \, dt &= \sin q \, dz + \cos q \sin z \, da + \sin t \sin \delta \, d\varphi \end{aligned} \quad (11b)$$

Die günstigsten Beobachtungspositionen können durch Umstellung aus den Gln. (11a) gewonnen werden. Im nächsten Punkt soll die direkte Ableitung aus den Bestimmungsgleichungen gezeigt werden.

2. Differentielle Beziehungen der Beobachtungsmethoden

Bei den genauen Methoden der geodätischen Astronomie ist stets ein Parameter der Zenitrichtung, Breite oder Länge, näherungsweise bekannt. Es genügt also die Messung eines Parameters im Horizontsystem, Zenitdistanz oder Azimut (Richtungswinkel), um das sphärische Dreieck auf der Richtungskugel auflösen zu können. Die Beobachtungsverfahren sind so zu wählen, daß sich der systematische Fehler des genähert bekannten Parameters sowie die Meßfehler minimal auf das Ergebnis auswirken.

2.1. Grundlagen

Wir wählen ein Koordinatensystem wie im Abschnitt 1 und stellen die Richtung zum Stern durch einen Vektor im Stundenwinkelsystem dar und ebenso das Dreibein eines Tangentialkoordinatensystems im Beobachtungsort, dessen Achse z zum Zenit, die Achse n als Tangente an den Ortsmeridian nach Nord und die Achse o orthogonal dazu nach Osten weist (siehe Abb. 3).

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.2. Festlegung des Zenits durch Zenitdistanzmessung

Die Bestimmungsgleichung lautet

$$\mathbf{z}^T \mathbf{s} = \cos z \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \mathbf{s} \, d\varphi &= (\mathbf{n}^T \mathbf{s}_1 \sin z + \underbrace{\mathbf{n}^T \mathbf{z} \cos z}_{\equiv \frac{\cos \varphi}{\sin q}}) \, d\varphi = -\cos a \sin z \, d\varphi \\ \mathbf{z}^T \mathbf{a} \, d\delta &= (\underbrace{\mathbf{s}^T \mathbf{a} \cos z + \mathbf{s}_1^T \mathbf{a} \sin z}_{\equiv \frac{\cos q}{\sin q}}) \, d\delta = \sin z \cos q \, d\delta \\ \mathbf{z}^T \mathbf{b} \cos \delta \, dt &= (\underbrace{\mathbf{s}^T \mathbf{a} \cos z + \mathbf{s}_1^T \mathbf{b} \sin z}_{\equiv \frac{\cos \delta}{\sin q}}) \cos \delta \, dt = -\sin z \sin q \cos \delta \, dt \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (15) ergibt sich die zu Gleichung (11 a) analoge, wobei das Glied $\sin q \cos \delta$ umgeformt wurde.

$$dz = \cos a \, d\varphi - \cos q \, d\delta + \left. \begin{array}{l} \cos \varphi \sin a \\ \sin q \cos \delta \end{array} \right\} dt$$

Die explizite Darstellung dieser Gleichung ergibt die differentiellen Beziehungen für die Bestimmung der Breite und des Stundenwinkels (Länge), woraus abgelesen werden kann, daß für Breitenbestimmungen aus Zenitdistanzmessung Beobachtungen in der Nähe des Meridians, für Längenbestimmungen jedoch in der Nähe des ersten Vertikals durchgeführt werden sollen.

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sec a \, dz - \cos \varphi \, \operatorname{tg} a \, dt + \cos q \, \sec a \, d\delta \\ dt &= \sec \varphi \operatorname{cosec} a \, dz - \sec \varphi \operatorname{ctg} a \, d\varphi + \cos q \, \sec \varphi \operatorname{cosec} a \, d\delta \end{aligned} \quad (16)$$

2.3. Festlegung des Zenits durch Richtungs(Azimut-)messungen

Die Bestimmungsgleichung lautet (siehe auch Abb. 3)

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{s}}{\mathbf{o}^T \mathbf{s}} \quad (17)$$

und ergibt skalar geschrieben den Cotangentensatz der sphärischen Trigonometrie.

$$\operatorname{ctg} a = \frac{-\cos \varphi \operatorname{tg} \delta + \sin \varphi \cos t}{\sin t}$$

Einfache Differentiation der Gl. (17) ergibt:

$$-\frac{1}{\sin^2 a} \, da = \frac{\mathbf{o}^T \mathbf{s} (\mathbf{n}^T ds + d\mathbf{n}^T \mathbf{s}) - \mathbf{n}^T \mathbf{s} (\mathbf{o}^T ds + d\mathbf{o}^T \mathbf{s})}{(\mathbf{o}^T \mathbf{s})^2} \quad (18)$$

Das Inprodukt $\mathbf{o}^T \mathbf{s} = -\cos \delta \sin t$ wird nach Gl. (3) ersetzt durch $-\sin z \cdot \sin a$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{\sin a} \, da &= (\mathbf{n}^T ds + d\mathbf{n}^T \mathbf{s}) - \operatorname{ctg} a (\mathbf{o}^T ds + d\mathbf{o}^T \mathbf{s}) \quad , \quad d\mathbf{o}^T = (0, 0, 0) \\ \sin z \, da &= \sin a \, d\mathbf{n}^T \mathbf{s} + (\sin a \mathbf{n}^T - \cos a \mathbf{o}^T) \, ds \end{aligned} \quad (19)$$

Die darin vorkommenden Ausdrücke können geometrisch gedeutet werden:

$$\begin{aligned} \sin a \, d\mathbf{n}^T \mathbf{s} &= -\sin a \, \mathbf{z}^T \mathbf{s} \, d\varphi = -\sin a \cos z \, d\varphi \\ (\sin a \mathbf{n}^T - \cos a \mathbf{o}^T) &= \begin{bmatrix} -\sin a \sin \varphi \\ \cos a \\ \sin a \cos \varphi \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Dieser Vektor kann gedeutet werden als ein ursprünglich im Horizontsystem dargestellter Vektor s' ($a + 90^\circ$, $z = 90^\circ$), der mit Hilfe der Matrix \mathbf{R} in das Stundenwinkelsystem verdreht wird (siehe auch Gl. (8, 9, 10)).

$$s' = \begin{bmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}' \quad , \quad \bar{\mathbf{b}}' = \mathbf{R}^T \mathbf{b}' = (\sin a \mathbf{n} - \cos a \mathbf{o})$$

$$\bar{\mathbf{b}}'^T ds = \bar{\mathbf{b}}'^T \mathbf{A} d\mathbf{A} = \sin q d\delta + \cos q \cos \delta dt$$

Eingesetzt in Gl. (19) ergibt sich die zu Gleichung (11 a) analoge.

$$\sin z da = -\sin a \cos z d\varphi + \cos q \cos \delta dt + \sin q d\delta$$

Die explizite Darstellung dieser Gleichung ergibt die differentiellen Beziehungen für die Bestimmung des Zenits und man ersieht, daß für Breitenbestimmungen aus Richtungsmessungen Beobachtungen in der Nähe des ersten Vertikals, für Längenbestimmungen jedoch in der Nähe des Meridians durchgeführt werden sollen.

$$d\varphi = -tg z \operatorname{cosec} a da + \cos q \cos \delta \sec z \operatorname{cosec} a dt + \sin q \sec z \operatorname{cosec} a d\delta$$

$$dt = \sin z \sec q \sec \delta da + \sin a \cos z \sec q \sec \delta d\varphi - tg q \sec \delta d\delta \quad (20)$$

2.4. Bestimmung des Azimuts

Wir unterscheiden hier Methoden, die neben der Richtungsmessung als zweite Meßgröße die Zeit oder Zenitdistanzen verwenden. Die Differentialformel für die erste Methode ist bereits unter der Festlegung des Zenits aus Richtungsmessungen behandelt worden. Es ergibt sich die Beobachtungsposition der größten Digression für polnahe Sterne. Es soll hier nur mehr der Fall der Azimutbestimmung aus Zenitdistanzen behandelt werden.

Die Bestimmungsgleichung lautet

$$\sin \delta = \mathbf{s}^T \mathbf{p} = (\mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} \quad , \quad \mathbf{p}^T = (0, 0, 1) \quad (21)$$

und ergibt skalar geschrieben wieder einen Seitencosinussatz.

$$\sin \delta = -\cos \varphi \sin z \cos a + \sin \varphi \cos z$$

Wir nehmen an, daß der Vektor s' und ds' geändert und zusätzlich mit der differentiellen Matrix $d\mathbf{R}$ verdreht wird:

$$\sin(\delta + d\delta) = \{d\mathbf{R}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{s}' + ds')\}^T \mathbf{p} = \{(\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A^T) \mathbf{R}^T (\mathbf{s}' + ds')\}^T \mathbf{p}$$

Bei Vernachlässigung Glieder zweiter Ordnung ergibt sich:

$$\cos \delta d\delta = (\mathbf{R}^T ds')^T \mathbf{p} + (d\mathbf{R}_A^T \mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} \quad (22)$$

Einfache Matrizenmultiplikation ergibt:

$$(\mathbf{R}^T ds')^T \mathbf{p} = (-\cos \varphi \cos z \cos a - \sin z \sin \varphi) dz + \cos \varphi \sin a \sin z da$$

$$(d\mathbf{R}_A^T \mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} = (\sin \varphi \sin z \cos a + \cos \varphi \cos z) d\varphi$$

Eingesetzt in Gl. (22) und umgestellt ergibt:

$$da = (tg \varphi + ctg z \cos a) \operatorname{cosec} a dz - (ctg z + tg \varphi \cos a) \operatorname{cosec} a d\varphi + \cos \delta \sec \varphi \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} z d\delta \quad (23)$$

Aus dieser sieht man, daß sich widersprechende Forderungen vorliegen. Damit der Einfluß einer fehlerhaften Breite minimal wird, müßte $t = 90^\circ$, zur Elimination eines Meßfehlers in der Zenitdistanz $q = 90^\circ$ (Elongation) sein.

Literatur

[1] *Mueller, I.*: Spherical and Practical Astronomy, Frederick Ungar Publishing Co., New York.

[2] *Rimmer, K.*: Über räumliche Drehungen, DGK, Reihe A, Heft 25.

[3] *Brandstätter, G.*: Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen. ÖZfV 1966, Heft 5, Seite 137–145.

Bemerkungen zum Querfehler in Zugsmitte bei einem Polygonzug mit Zwischenorientierungen

Von *Josef Zeger*, Wien

Zusammenfassung

Kritische Untersuchung der Gleichung für die Berechnung des Querfehlers in der Mitte eines an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzuges (aus Jordan/Eggert/Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde), sowie der aus dieser Gleichung abgeleiteten Behauptung, daß der Querfehler in Zugsmitte beim Vorhandensein einer einzigen Zwischenorientierung größer wird als bei einem gleichen Polygonzug ohne Zwischenorientierung.

Für die Beurteilung der Güte eines Polygonzuges ist nicht nur die Größe seiner Abschlußfehler maßgebend, es ist auch nötig, über die nach der Ausgleichung zu erwartenden Lagefehler der Polygonpunkte Bescheid zu wissen. Da im allgemeinen der Polygonpunkt in Zugsmitte den größten Lagefehler zu erwarten hat, werden vielfach Abschätzungsformeln für den Längs- und Querfehler des Polygonpunktes in Zugsmitte angegeben, mit deren Hilfe man bereits nach der Erkundung eines Polygonzuges abschätzen kann, mit welchen Lagefehlern man in diesem Zug nach der Ausgleichung zu rechnen haben wird. Für den allgemeinen Fall eines Polygonzuges sind solche Formeln relativ kompliziert und somit für die praktische Anwendung wenig geeignet. Da man außerdem immer bestrebt sein wird, der Idealform eines Polygonzuges — gestreckter Zug mit gleich langen Seiten — möglichst nahe zu kommen, werden der einfacheren Handhabung wegen diese Abschätzungsformeln für den gestreckten Zug mit gleich langen Seiten angegeben.

Die Abschätzung des Längsfehlers in Zugsmitte ist abhängig von dem bei der Polygonzugsmessung verwendeten Streckenmeßgerät, sie bietet weiters keine Probleme und wird daher hier auch nur erwähnt. Etwas schwieriger wird es bei der Abschätzung des Querfehlers. In [1] sind im Band II Abschätzungsformeln für den Querfehler in der Mitte eines Polygonzuges angegeben: