



Über die Ausgleichung der Streckeneinschnitte auf der Sphäre mit geographischen Koordinaten

Antál Tárczy-Hornoch ¹

¹ Sopron, Ungarn

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **59** (1), S. 1–6

1971

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Tarczy-Hornoch_VGI_197101,  
Title = {{\U}ber die Ausgleichung der Streckeneinschnitte auf der Sph{\a}re  
mit geographischen Koordinaten},  
Author = {T{\a}rczy-Hornoch, Ant{\a}l},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {1--6},  
Number = {1},  
Year = {1971},  
Volume = {59}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION :

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 1

Baden bei Wien, Ende Februar 1971

59. Jg.

Über die Ausgleichung der Streckeneinschnitte auf der Sphäre mit geographischen Koordinaten

Von *Antál Tárczy-Hornoch*, Sopron

Die Bedeutung der Streckeneinschnitte nimmt auch auf größere Entfernungen immer mehr zu. Aus Raummangel haben wir in der Ledersteger-Festschrift in Studie [1] nur die Ausgleichung der Streckeneinschnitte mit Hilfe von Bedingungsgleichungen in den Figuren auf der Sphäre behandelt. Als deren Fortsetzung soll nun hier die Ausgleichung auf der Sphäre durch Einführung der geographischen Koordinaten der Neupunkte untersucht werden.

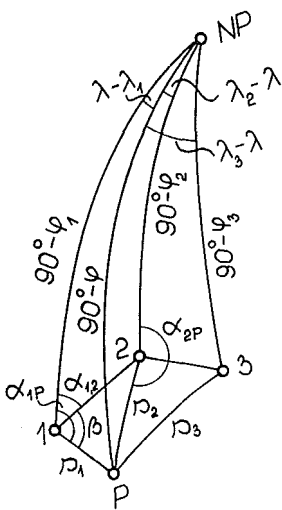


Abb. 1

A) Die Ausgleichung erfolgt nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen

Man braucht hierzu Näherungswerte der geographischen Koordinaten der zu bestimmenden Punkte. Bei einem Neupunkt kann man die Näherungswerte φ^0_P und λ^0_P des zu bestimmenden Punktes P nach Abb. 1 mit Hilfe der geographischen Koordinaten der gegebenen Punkte 1 und 2 und der gemessenen Seiten s'_1, s'_2 leicht berechnen.

Es werden zunächst:

$$\cos \beta^0 = \frac{\cos s'_2 - \cos 1,2 \cos s'_1}{\sin 1,2 \sin s'_1} \dots (1)$$

und

$$\alpha^0_{1P} = \alpha_{1,2} + \beta^0$$

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_1 \cos s'_1 + \cos \varphi_1 \sin s'_1 \cos \alpha^0_{1P}$$

sowie

$$\sin(\lambda_0 - \lambda_1) = \sin s'_1 \frac{\sin \alpha_{1P}^0}{\cos \varphi_0} \quad \dots (1a)$$

Sollten $\widehat{1,2}$ und $\alpha_{1,2}$ nicht gegeben sein, so berechnet man erstere Größe aus φ_1 , φ_2 und $\lambda_2 - \lambda_1$ mit dem sphärischen Kosinussatz und $\alpha_{1,2}$ mit dem Sinussatz.

Sind keine überschüssigen Messungen vorhanden, so kann man beim Streckeneinschnitt nach Gln. (1a) die endgültigen geographischen Koordinaten des Neupunktes berechnen.

Zur Ausgleichung des Streckeneinschnittes müssen die Strecken zum bestimmenden Punkt von mehr als zwei Punkten gemessen sein. Bei drei Punkten entstehen nach Abb. 1 bei Einführung der unbekanntnen Zuschläge $\delta\varphi$ und $\delta\lambda$ zu den Näherungskordinaten des Neupunktes die folgenden Verbesserungsgleichungen (v sind die Verbesserungen):

$$\begin{aligned} \cos(s'_1 + v_1) &= \sin \varphi_1 \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) + \cos \varphi_1 \cos(\varphi_0 + \delta\varphi) \cos(\lambda_0 + \delta\lambda - \lambda_1) \\ \cos(s'_2 + v_2) &= \sin \varphi_2 \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) + \cos \varphi_2 \cos(\varphi_0 + \delta\varphi) \cos(\lambda_2 - \lambda_0 - \delta\lambda) \\ \cos(s'_3 + v_3) &= \sin \varphi_3 \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) + \cos \varphi_3 \cos(\varphi_0 + \delta\varphi) \cos(\lambda_3 - \lambda_0 - \delta\lambda) \\ &\dots (2) \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gln. in Reihen entwickeln, die kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen, und die den Näherungswerten φ_0 , λ_0 entsprechenden Strecken mit s^0 bezeichnet, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\cos \varphi_1 \sin \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \cos \varphi_0}{\sin s'_1} \delta\varphi + \\ &+ \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_0 \sin(\lambda_0 - \lambda_1)}{\sin s'_1} \delta\lambda + \frac{\cos s'_1 - \cos s^0_1}{\sin s'_1} \\ v_2 &= \frac{\cos \varphi_2 \sin \varphi_0 \cos(\lambda_2 - \lambda_0) - \sin \varphi_2 \cos \varphi_0}{\sin s'_2} \delta\varphi - \\ &- \frac{\cos \varphi_2 \cos \varphi_0 \sin(\lambda_2 - \lambda_0)}{\sin s'_2} \delta\lambda + \frac{\cos s'_2 - \cos s^0_2}{\sin s'_2} \quad \dots (2a) \\ v_3 &= \frac{\cos \varphi_3 \sin \varphi_0 \cos(\lambda_3 - \lambda_0) - \sin \varphi_3 \cos \varphi_0}{\sin s'_3} \delta\varphi - \\ &- \frac{\cos \varphi_3 \cos \varphi_0 \sin(\lambda_3 - \lambda_0)}{\sin s'_3} \delta\lambda + \frac{\cos s'_3 - \cos s^0_3}{\sin s'_3} \end{aligned}$$

Bedenkt man, daß $\sin(\lambda_2 - \lambda_0) = -\sin(\lambda_0 - \lambda_2)$ ist, so kann man die Koeffizienten von $\delta\lambda$ für die Strecke n einheitlich als $+\frac{\cos \varphi_n \cos \varphi_0 \sin(\lambda_0 - \lambda_n)}{\sin s'_n}$ schreiben.

Bezeichnet man mit a die Koeffizienten von $\delta\varphi$, mit b jene von $\delta\lambda$ und mit l die absoluten Glieder, so erhalten wir aus den Gln. (2a):

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \delta\varphi + b_1 \delta\lambda + l_1 \\ v_2 &= a_2 \delta\varphi + b_2 \delta\lambda + l_2 \\ v_3 &= a_3 \delta\varphi + b_3 \delta\lambda + l_3 \end{aligned} \quad \dots (2b)$$

Werden die Näherungskoodinaten mit s'_1 und s'_2 gerechnet, dann sind $s^0_1 = s'_1$ und $s^0_2 = s'_2$. Es entfallen deshalb in diesem Falle in Gln. (2b) die Glieder l_1, l_2 und es werden:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \delta \varphi + b_1 \delta \lambda \\ v_2 &= a_2 \delta \varphi + b_2 \delta \lambda \\ v_3 &= a_3 \delta \varphi + b_3 \delta \lambda + l_3 \end{aligned} \quad \dots (2c)$$

Die weitere Auflösung — auch im Falle von mehr als 3 Verbesserungsgleichungen — ist sowohl nach Gln. (2b), als auch (2c) bekannt. Die absoluten Glieder l sind bei der Lösung nach Gln. (2c) in den zwei ersten Verbesserungsgleichungen Null.

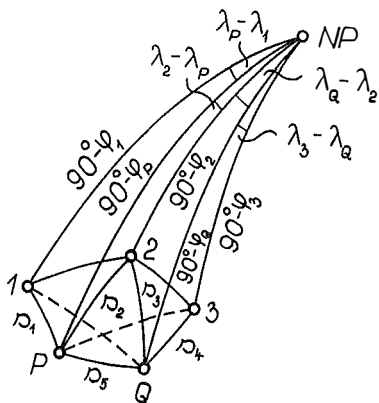


Abb. 2

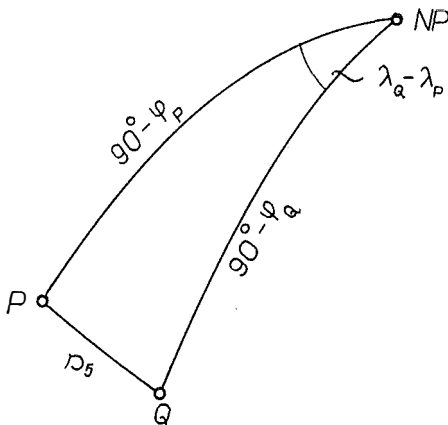


Abb. 3

Sollen zwei Neupunkte P und Q bestimmt werden, so sind zu den Näherungskoodinaten $\varphi^0_P, \lambda^0_P, \varphi^0_Q$ und λ^0_Q die Zuschläge $\delta \varphi_P, \delta \lambda_P, \delta \varphi_Q$ und $\delta \lambda_Q$ zu berechnen. Für die Figur der Abb. 2 (Doppelpunkt-Streckeneinschnitt aus drei Punkten) gelten in diesem Falle unter der Voraussetzung, daß die Näherungskoodinaten von P mit s'_1, s'_2 , jene von Q mit s'_3, s'_4 gerechnet wurden, die Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \delta \varphi_P + b_1 \delta \lambda_P \\ v_2 &= a_2 \delta \varphi_P + b_2 \delta \lambda_P \\ v_3 &= c_3 \delta \varphi_Q + d_3 \delta \lambda_Q \\ v_4 &= c_4 \delta \varphi_Q + d_4 \delta \lambda_Q \\ v_5 &= a_5 \delta \varphi_P + b_5 \delta \lambda_P + c_5 \delta \varphi_Q + d_5 \delta \lambda_Q + l_5 \end{aligned} \quad \dots (3)$$

Die Koeffizienten der ersten vier Gln. können im Sinne der Gln. (2a) und der nachfolgenden Erklärung für das Vorzeichen von $\delta \lambda$ leicht angegeben werden. Es sind daher nur noch die Koeffizienten der fünften Verbesserungsgleichung der Gln. (3) anzugeben. Nach Abb. 3 schreiben wir zunächst:

$$\begin{aligned} \cos(s'_5 + v_5) &= \sin(\varphi^0_P + \delta \varphi_P) \sin(\varphi^0_Q + \delta \varphi_Q) + \\ &+ \cos(\varphi^0_P + \delta \varphi_P) \cos(\varphi^0_Q + \delta \varphi_Q) \cos(\lambda^0_Q + \delta \lambda_Q - \lambda^0_P - \delta \lambda_P) \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir in bekannter Weise:

$$\begin{aligned}
 v_5 = & \frac{\cos \varphi^0_Q \sin \varphi^0_P \cos (\lambda^0_Q - \lambda^0_P) - \sin \varphi^0_Q \cos \varphi^0_P}{\sin s'_5} \delta \varphi_P + \\
 & + \frac{\cos \varphi^0_Q \cos \varphi^0_P \sin (\lambda^0_Q - \lambda^0_P)}{\sin s'_5} \delta \lambda_P + \\
 & + \frac{\cos \varphi^0_P \sin \varphi^0_Q \cos (\lambda^0_Q - \lambda^0_P) - \sin \varphi^0_P \cos \varphi^0_Q}{\sin s'_5} \delta \varphi_Q + \dots (4) \\
 & + \frac{\cos \varphi^0_Q \cos \varphi^0_P \sin (\lambda^0_P - \lambda^0_Q)}{\sin s'_5} \delta \lambda_Q + \frac{\cos s'_5 - \cos s^0_5}{\sin s'_5}
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieser Gl. mit der letzten der Gln. (3) zeigt sofort den Sinn der Größen a_5, b_5 usw. an.

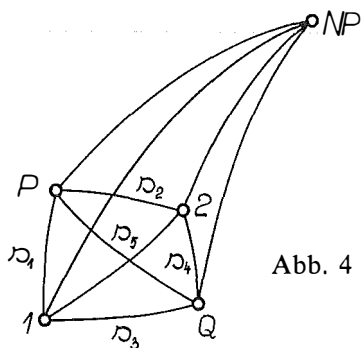


Abb. 4

Wenn entsprechend dem strichlierten Teil der Abb. 2 auch die Strecken $\widehat{1, Q}$ bzw. $\widehat{3 P}$ oder beide gemessen wurden, so können die weiteren Vermittlungsgleichungen ähnlich hergeleitet werden.

Den Gln. (3) bis (4) sinngemäß entsprechende Beziehungen erhalten wir auch, wenn P und Q der Abb. 4 auch (Doppelpunkt-Streckeneinschnitt aus zwei Punkten) im Wege der vermittelnden Beobachtungen bestimmt werden.

Es gibt auch hier noch eine Reihe weiterer Erweiterungen bzw. Kombinationen, deren Gleichungen im Sinne der hier angeführten leicht aufgestellt werden können.

B) Umwandlung der Vermittlungsgleichungen in Bedingungsgleichungen

Auch bei der Ausgleichung des Streckeneinschnittes auf der Sphäre ist zu berücksichtigen, daß bei relativ wenig überschüssigen Beobachtungen wir nach den bedingten Beobachtungen weniger Normalgleichungen haben. Die Ausgleichung nach den vermittelnden Beobachtungen hat aber hier den großen Vorteil, daß man aus der Ausgleichung unmittelbar die Zuschläge zu den Näherungswerten der geographischen Koordinaten und so auch diese selbst erhält. Um beide Vorteile zu vereinigen, kann auch hier vorteilhaft sein, die den vermittelnden Beobachtungen entsprechenden Verbesserungsgleichungen durch mathematische Umformung in jene der bedingten Beobachtungen zu überführen.

Solche mathematische Umwandlungen können bei einer überschüssigen Beobachtung schon bei einem Neupunkt vorteilhaft sein, weil nach den bedingten Beobachtungen hier eine Normalgleichung entsteht, während nach den vermittelnden Beobachtungen zwei. Man drückt in diesem Falle aus den zwei ersten Gln. (2c) $\delta \varphi$ und $\delta \lambda$ als Funktionen der Verbesserungen v_1 und v_2 aus und setzt in die dritte ein. So entsteht die Bedingungsgleichung:

$$(a_3 b_2 - a_2 b_3) v_1 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) v_3 - (a_2 b_1 - a_1 b_2) l_3 = 0 \dots (5)$$

Noch günstiger sind bekanntlich die Fälle mit mehreren Neupunkten und relativ wenig überschüssigen Beobachtungen. In der Abb. 2 bzw. 4 bei zwei Neupunkten können wir der stark ausgezogenen Figur entsprechende hier einzige Bedingungsgleichung dadurch erhalten, daß aus den zwei ersten Gln. der Gln. (3) $\delta\varphi_P$, $\delta\lambda_P$ aus den zwei folgenden $\delta\varphi_Q$, $\delta\lambda_Q$ als Funktionen der Verbesserungen ausgedrückt und in die letzte der Gln. (3) eingesetzt werden. Man hat hier an Stelle der vier Normalgleichungen nach den vermittelnden Beobachtungen nur eine Normalgleichung. Selbst dann, wenn noch eine der Strecken $\widehat{1Q}$ oder $\widehat{3P}$ gemessen wurde, entstehen nach Umwandlung in Bedingungsgleichungen nur zwei Normalgleichungen.

Auch bei den Ausgleichungen auf der Kugel gilt die für die Ebene gemachte Feststellung [1; letzt. Abs.], daß die Ausgleichung nach den bedingten Beobachtungen nur dann erwägenswert ist, wenn die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen unter $2n$ bleibt, wo n die Anzahl der Neupunkte bedeutet.

*

Es soll nur noch kurz auf die Berechnung auf dem Ellipsoid hingewiesen werden.

Hat man beim Streckeneinschnitt keine überschüssigen Beobachtungen, so können — wie erwähnt — die Gln. (1) u. (1a) zur Berechnung der geographischen Koordinaten auf der Kugel verwendet werden. Wie aus den, mit denselben Ausgangswerten gerechneten geographischen Koordinaten auf der Kugel jene auf dem Ellipsoid erhalten werden können, ist bereits in [2; S. 975. Gln. (7) bis (8)] angegeben. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die gemessenen Strecken auf die entsprechenden geodätischen Linien umgerechnet wurden. Sind überschüssige Messungen vorhanden, so liefern die vorher erwähnten Koordinaten gleichfalls nur Näherungswerte B_0 und l_0 der geographischen Breite B und Länge l am Ellipsoid. Für die durch Ausgleichung zu bestimmenden Zuschläge δB und δl können mit Hilfe der auf die geodätischen Linien umgerechneten gemessenen Strecken Vermittlungsgleichungen im Sinne von *Helmert* aufgestellt werden: Ist der eine Endpunkt der geodätischen Linie gegeben, so gilt die erste der Gln. (1) auf S. 281; sind beide Endpunkte zu bestimmen, so die erste der Gln. (4) auf S. 282 von [3]. Bei wenig überschüssigen Beobachtungen können auch hier die Vermittlungsgleichungen oft vorteilhaft in Bedingungsgleichungen umgewandelt werden.

Die gemessenen Strecken können auch auf Normalschnitte umgerechnet werden. In diesem Falle müssen auch die Vermittlungsgleichungen für die Normalschnitte verwendet werden.

Literatur

- [1] *Tarczy-Hornoch*: Über die Ausgleichung der Streckenvierecke und Streckeneinschnitte auf der Sphäre nach den bedingten Beobachtungen. Ledersteger-Festschrift, Wien, 1970.
 [2] *Jordan-Egger-Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde Bd. IV/2 (Die geodätische Berechnung auf der Kugel und auf dem Ellipsoid). Stuttgart (1959).
 [3] *Helmert*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. I. Teil 1880).

Zusammenfassung

Bei den Streckeneinschnitten mit größeren Entfernungen kann es vorteilhaft sein durch Ausgleichung unmittelbar die geographischen Koordinaten der Neupunkte zu berechnen. Man ver-

wendet hierzu vorteilhaft Näherungswerte der geographischen Koordinaten der Neupunkte und ermittelt hierzu im Wege der Ausgleichung die Koordinatenzuschläge.

Bei relativ vielen überschüssigen Beobachtungen und wenig Neupunkten ist die Ausgleichung nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen im Sinne der Gl. (2a) bis (2c), bzw. (3) bis (4) vorteilhafter, während man bei wenig überschüssigen Beobachtungen die Gl. der vermittelnden Beobachtungen im Sinne der Gl. (5) in jene der bedingten Beobachtungen verwandelt.

Besondere Bildflugbedingungen für Photokarten

Von *Peter Waldhäusl*, Wien

1. Bedeutung und Aufgabe der Photokarte

Die Bedeutung der Photokarte kann am besten daraus ersehen werden, daß das erste große Photokartenwerk den Namen „Ökonomische Karte von Schweden“ erhielt. Der Name betont schon die große Wirtschaftlichkeit der Kartenproduktion. Das detailreiche Luftbild wird als Kartenhintergrund gedruckt und ersetzt auf diese Art teilweise die teurere kartographische Bearbeitung. Die Interpretation der Geländedetails wird auf das wichtigste Gerippe — Verkehrswege, Flüsse etc. — und auf wenige Namen beschränkt. Dieses Wenige und Wesentliche wird über den Luftbildhintergrund gedruckt oder mit ihm zusammen reproduziert. Dasselbe gilt auch für die Höhenlinien. Alles Weitere muß der Kartenleser selbst verstehen. Interessanterweise kann er es auch, was allerdings gelegentlich noch immer bestritten wird. Der einfache Bergbauer, ja selbst der des Lesens unkundige Beduine in der Wüste Arabiens findet sich im Luftbild spielend zurecht. Die Photokarte kann daher ihre Aufgabe als allgemeine Orientierungshilfe voll und ganz erfüllen, ja mehr als das: Die Photokarte kann Vertrauen einflößen. Man weiß, daß man ihr als Orientierungshilfsmittel wirklich vertrauen kann, denn schließlich handelt es sich um Photographien, die die Erdoberfläche naturgetreu abbilden. Kartographische Zeichenfehler sind praktisch ausgeschlossen.

Strichkarte und Photokarte sprechen dennoch verschiedene Sprachen. Hier klare, einheitliche Signaturen, dort die ganze Vielfalt der Natur. Hier unterscheidet man Forsthaus, Schule, Heuhütte, dort ist zunächst alles Haus. Je mehr Arbeit und Geld in die Detailinterpretation beziehungsweise Geländeerkundung gesteckt wird, desto mehr bildhafte Information kann in Überdrucksignaturen umgewandelt werden, desto mehr kommt man der klassischen Strichkarte nahe, desto weniger benötigt man mehr das Luftbild.

Umgekehrt: Je weniger Arbeit man in die Interpretation und Geländeerkundung stecken kann, desto mehr Bedeutung erlangt die klare Wiedergabe des Luftbildes. Und genau dieser Situation sieht man sich in den Entwicklungsländern gegenüber, wo ein geometrisch hochwertiges Abbild riesengroßer Gebiete einfach fehlt, zur Aufschließung jedoch dringend benötigt wird und eher heute als morgen fertig sein soll. Es fehlt an allem: Personal, Wissen, Zeit und Geld. Aber man hat an leitender Stelle Verständnis für die Notwendigkeit entscheidender Schritte. In Saudi Arabien zum Beispiel wurden in den letzten zwei Jahren 500 000 km² in 2 großen Blöcken in Arbeit genommen. Endziel ist die topographische Kartierung von 1,65 Millionen km² innerhalb von nur 10 Jahren. Endlose unbesiedelte Gebiete,