

Paper-ID: VGI\_197015



## Tendenzen der Ausgleichsrechnung

Kornelius Peters <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Landes- und Katastervermessung, Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **58, 59** (5, 3), S. 145–155, 69–82  
1970, 1971

Bib<sub>T</sub>EX:

```
@ARTICLE{Peters_VGI_197015,  
Title = {Tendenzen der Ausgleichsrechnung},  
Author = {Peters, Kornelius},  
Journal = {{{\u}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen}},  
Pages = {145--155, 69--82},  
Number = {5, 3},  
Year = {1970, 1971},  
Volume = {58, 59}  
}
```



Die Ergebnisse stimmen innerhalb der Rechenschärfe (0,0002 bzw. 0,002 m) mit den Werten von Andersen überein. Dabei ist zu beachten, daß die dreidimensionalen Formeln streng sind und für beliebige Entfernungen gelten, während bei den zweidimensionalen Näherungsformeln von Andersen bei Entfernungen über 1000 km ein merklicher Genauigkeitsabfall zu erwarten ist.

#### Literatur:

- [1] *Hotine, M.*: A Primer of Non-Classical Geodesy, London 1959.
- [2] *Wolf, H.*: Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. Zeitschr. f. Verm. 1963, S. 225.
- [3] *Ramsayer, K.*: Raumtriangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Zeitschr. f. Verm. 1965, S. 15.
- [4] *Ramsayer, K.*: Erprobung und Erweiterung des Verfahrens der räumlichen Triangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. (Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A: Höhere Geodäsie, Heft Nr. 60, 1968).
- [5] *Ramsayer, K.*: Spatial triangulation in a local, astronomical oriented Cartesian coordinate system. Bull. Géod. 1969, S. 123.
- [6] *Jordan/Eggert/Kneißl*: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Band VI.
- [7] *Ramsayer, K.*: Dreidimensionaler Polygonzug in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. (In Vorbereitung).
- [8] *Ramsayer, K.*: Dreidimensionaler Polygonzug im geozentrischen Koordinatensystem. (In Vorbereitung.)
- [9] *Andersen, E.*: Practical formulas for accurate calculation by relative long distances of geographical coordinates or distances and azimuths on the international ellipsoid of rotation. Mémoires de l'Institut Géodésique de Danemark. Troisième Série. Tome Seizième. Kopenhagen 1953.

## Tendenzen der Ausgleichsrechnung

(Gezeigt am Beispiel eines Winkel-Streckennetzes)

Von *Kornelius Peters*, Wien

### 0. Ist die Ausgleichsrechnung uninteressant geworden?

Elektronische Längenmeßgeräte, welche Kilometerstrecken zentimetergenau messen, Kreisetheodolite mit automatischer Nachführung, welche mit Triangulierungsgenauigkeit orientieren, im täglichen Einsatz — Mekometer, handliche Ringlaser, Lasergeodimeter ante portas — Tischcomputer, welche die tägliche Routinearbeit, Groß-EDV-Anlagen, die anonym alles, was darüber hinausgeht, bewältigen — in unserer Praxis scheint kein Platz mehr für die so intensiv studierte und allgegenwärtige Ausgleichsrechnung. Sie scheint sich in den Bereich der Satellitennetze und Blocktriangulationen abgesetzt zu haben.

Mißt man die Aktualität von Themengruppen an ihrem Anteil an der wissenschaftlichen Literatur, ergibt sich jedoch ein völlig unerwartetes Bild. Als Quelle diente die jährliche Übersicht in der ZfV, welche seit 1951 eine äußerst instruktive, nach Themen gegliederte Auflistung praktisch aller in Europa erschienenen Artikel bietet, welche in irgend einem Zusammenhang mit dem Vermessungswesen stehen. Ausgezählt wurden die Gebiete: 13. Ausgleichsrechnung und zum Vergleich die instrumentbezogenen Bereiche 4. Längenmessung, 5. Winkelmessung und 7. Höhen- und Tiefenmessung.

Tabelle 1

Themenkreis	Markante Voraussetzungen		Zitierte Veröff. Prozentueller Anteil	
	der Periode 1951/59	der Periode 1960/69		
			1951/59	1960/69
13. Ausgleichsrechnung	Computer: Magnetband 1951	Algol 1960	273	687
			25	32
4. Längenmessung	Geodimeter 1948	Geod. 4 1959 Tellurometer 1957	341	747
			32	34
5. Winkelmessung	Meridianweiser 1949	Serienkreisel 1960	138	295
			13	14
7. Höhen- und Tiefen- messung	Opton 1950	—	327	447
			30	20

Trotz aller theoretischen Fortschritte wird das Gros aller Aufsätze erst auf Grund von außen gekommener Anregungen erstellt. So waren z. B. zuerst die Geräte und erst später die Arbeiten darüber vorhanden — richtungsweisende Abhandlungen etwa im Sinne von [1] sind naturgemäß in der Minderzahl. Trotz der großen Neuerungen durch übersichtliche Notationen (Matrizen durch *Gotthardt*, Tensoren durch *Tienstra*) und Einbeziehung der Mathematischen Statistik scheint doch die Entwicklung der EDV für den „Lebenswillen“ der Ausgleichsrechnung verantwortlich zu sein, da sie sonst den Nutzwert ihrer Erkenntnisse nicht hätte unter Beweis stellen können. Außerdem profitierte sie in dem von uns betrachteten kleinen Teilgebiet der Netzeinschaltung sicherlich auch von der Entwicklung der Längenmeßtechnik, welche theoretische Grundlagen für Trilaterationsnetze erforderte. Ein gutes Beispiel für die Wechselwirkungen zwischen Geräte- und Rechentechnik bietet [2].

Am Rande bemerkenswert ist der niedere Anteil der „Winkelmessungen“ trotz der weiten Entwicklung der Kreiseltheodolite. Die derzeitige Stagnation von „Höhen- und Tiefenmessungen“ wird vielleicht nach Fortschritten der Ozeanographie schwinden.

Die Ausgleichsrechnung ist also noch immer aktuell. Das beweisen die jüngst erschienenen Lehrbücher prominenter Autoren, die steigende Anzahl von Veröffentlichungen und auch der Budapester FIG-Kongreß vom August 1970, welcher die Netzeinschaltung als Hauptthema behandelte. Um die Tendenzen auf diesem Gebiet zu illustrieren, wird zunächst ein kurzer theoretischer Abriss gegeben, welcher in weiteren Fortsetzungen durch die entsprechenden numerischen Beispiele an Hand des Netzes Neue Welt erläutert werden soll. Nicht schematische Netze sind regelmäßigen pädagogisch zumindest gleichwertig, vgl. [11] S. 314 ff.

### 1. Verlagerung der Aufgabenbereiche: Nicht mehr das Resultat, sondern optimale Messungsanordnung gesucht

#### 1.0 Historische Daten

Mehr als ein Jahrhundert liegt die berühmte Dissertation *Helmerts* zurück [3], in welcher bereits fast alle modernen Gedanken anklingen: Rationelle Vermessung („nothwendiger Genauigkeitsgrad mit möglichst wenig Zeit und Geld“), günstigste

Netzgestalt, Definition der Fehlerellipse, der Fehlermaße, Forderung nach kreisförmigen und gleichgroßen Fehlerellipsen innerhalb eines Netzes, Fehlerabschätzung a priori, Aufsuchen von Fehlern der Fixpunkte (S. 94).

Bereits Ende der Zwanzigerjahre unseres Jahrhunderts lag eine Reihe von Arbeiten über gemeinsamen Winkel- und Streckenausgleich vor, z. B. von *Schumann*.

Die theoretische Genauigkeitsabschätzung strenger kontra genäherter Ausgleich erschien sogar um die Jahrhundertwende [4].

Der Gedanke an die Zuverlässigkeit eines Netzes, d. h. die Kontrolle jeden Bestimmungsstückes durch ein in derselben Richtung wirkendes, wurde vor 30 Jahren erstmalig geäußert [5].

Die beste Übersicht über die zur Sprache kommenden Probleme aus jüngster Zeit bietet [6].

### 1.1 Minimale Punktlagefehler

Das älteste und bekannteste Ziel der Netzerkundung war, den mittleren Punktlagefehler jedes eingeschalteten Punktes möglichst klein oder möglichst unter einem bestimmten Maß zu halten. In neuerer Zeit wurde die Forderung dahingehend präzisiert, daß die Quadratsumme der Punktlagefehler in einem Netz zu minimieren sei [6], [7].

Will man wirtschaftliche Probleme außer acht lassen, ist der mögliche Vorgang nach [6] S. 294 das „Netzaufbau-Verfahren“: Von den Altpunkten ausgehend, sucht man nach Maßgabe der in der Natur möglichen Visuren den Neupunkt mit der besten Bestimmung, d. h. mit dem kleinsten Punktlagefehler a priori. Diesen Punkt als gegeben aufgefaßt, sucht man nun weiter, bis alle Neupunkte bestimmt sind, berechnet nun streng alle einzelnen mittleren Punktlagefehler durch Inversion der gesamten Normalgleichungsmatrix und fügt durch gezieltes Probieren so viele (mögliche) Bestimmungsstücke von den Alt- bzw. den Neupunkten hinzu, bis der schlechtest bestimmte Punkt einen kleineren Punktlagefehler hat als die angegebene Schranke.

. . . (1.1.1)

Bei der Angabe dieser Schranke muß man sich wie bei ähnlichen Aufgaben im klaren sein, ob es sich um einen „mittleren Fehler“ oder um eine äußerste Toleranz handelt! Hier entstehen z. B. bei der Zusammenarbeit mit Bauingenieuren bei Angabe von Durchschlagsgenauigkeiten, Fertigteilbau-Toleranzen usw. immer wieder Mißverständnisse, welche am besten durch Angabe statistisch ermittelter Fehlerwahrscheinlichkeiten verhindert werden. Mehr darüber in den Abs. 1.3 sowie 4. dieser Arbeit.

Die Optimierung (1.1.1) kann selbstverständlich per EDV durchgeführt werden, wengleich sie nicht gemäß einem spezifischen „Optimierungs-Algorithmus“ abläuft. Zu einem solchen, wie er etwa in [8] auf den Seiten 75–93 beschrieben wird, fehlen hier die Nebenbedingungen. Falls man keinerlei Beschränkungen einführt, ist das ideale Netz durch das voll ausgemessene gegeben. Näheres über Optimierung folgt unter 1.5 dieser Arbeit.

Schematische Streckennetze sind in [8], schematische Winkelnetze in [9] und [10] durchgerechnet. [8] und [10] haben als Einheit Quadrate einschließlich Diagonalen, [9] gleichseitige Dreiecke aufzuweisen. Während bei [8] kein Fixpunktrahmen,

sondern nur ein Punkt mit Orientierung bzw. 2 Fixpunkte vorliegen, bieten [9] und [10] echte Festpunktfelder als Ausgangswerte.

Aus [8] ergibt sich, daß die in Richtung der Rautenkette gelegenen, den Ausgangspunkten benachbarten Kanten am genauesten gemessen werden müssen, sodann folgen schwach absteigend die Diagonalen und schließlich die senkrecht zur Hauptrichtung gelegenen Kanten — egal ob es sich um unabhängige oder um korrelierte Messungen handelt. . . . (1.1.2)

Laut [9] sind im voll ausgemessenen Dreiecksnetz alle Neupunkte faktisch gleichwertig, egal ob die Kantenlänge eines Neupunktdreieckes  $1/3$  oder  $1/4$  jener des Festpunktdreieckes beträgt. Streichen einiger Innenrichtungen bringt raschen Genauigkeitsabfall, besonders bei der größeren Masche (30% weniger Visuren —  $m_p$  vergrößert sich um 50% bzw. 100%). . . . (1.1.3)

[10] ist bewußt nach Art von *Ackermann's* Untersuchungen photogrammetrischer Blöcke aufgebaut und läßt reizvolle Vergleiche zu. Die größten Fehler treten entlang der Kanten auf. Beim  $9 \times 9$  Punkt-Quadrat hat nur die äußerste Punktreihe zur Gänze sowie 7 von 9 Punkten der nächsten Reihe einen  $m_p$ , der mehr als 4% größer ist als der in „Blockmitte“. Daher sind zusätzliche Fixpunkte nicht in der Mitte, sondern an den Kanten quadratischer (und rechteckiger) Maschen anzuordnen. . . . (1.1.4)

Eine obere Grenze, wieweit das Ergebnis eines Ausgleichs überhaupt verbessert werden kann, gibt [12] an. Ergänzt man ein Ausgleichsproblem durch  $r_1$  zusätzliche Beobachtungen und  $r_2$  zusätzliche Bedingungen, wobei  $r_1 + r_2 < r - u$ , so gilt: Die Spur der Fehlermatrix ( $u \times u$ ) nach der Verbesserung des Ausgleichs ist nicht kleiner als die Spur vor dem Ausgleich, vermindert um die Summe ihrer Eigenwerte von 1 bis  $r$ . . . . (1.1.5)

Bei einer Einzelpunkteinschaltung kann  $r$  höchstens 1 sein, d. h. höchstens eine zusätzliche Größe ist im Rahmen von (1.1.5) möglich. Die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind hier die Quadrate der beiden Halbachsen der Fehlerellipse. — Will man das Resultat noch nachhaltiger als eben zitiert verbessern, verliert [12] seinen Sinn, da es sich im Falle  $r \geq u$  um ein völlig neues Konzept und nicht mehr um die Verbesserung eines bestehenden handelt.

Wie die  $r_1$ -Messungen anzuordnen sind, muß man gesondert überlegen.

## 1.2 Kreisförmige Fehlerellipse

Obwohl seit [3] die kreisförmige Fehlerellipse als ideal angesehen wird, ist in letzter Zeit die Definition der Punktfehler und der idealen Gestalt der Fehlerellipse in den Vordergrund getreten ([13], [14] jeweils mit Literatur). Bei der genannten Verteilung sind die Fehler innerhalb des Netzes richtungsunabhängig und die beim Konzept  $SpM = \text{Min. vernachlässigten Kovarianzen}$  (gemischten Fehler) treten hier nicht auf. Die Weiterverwendung dieser Punkte ist fehlertheoretisch leicht zu durchschauen. . . . (1.2.1)

Solange es sich nur um Einzelpunkteinschaltung handelt, ist nur anzustreben, daß der Wert  $ab$  verschwindet, da  $Q_{xy} = \frac{-[ab]}{[aa][bb] - [ab][ab]}$ , außerdem soll  $[aa] = [bb]$ . . . . (1.2.2)

Die beiden Forderungen kann man erfüllen, indem man zu gegebenen Visuren bzw. Strecken immer noch eine zusätzliche aussucht, welche der Summe der bisherigen  $ab$  ein entgegengesetzt gleiches  $ab$  bewirkt. Da  $ab$  in beiden Fällen das Produkt einer Konstanten mit  $\sin 2\nu$  ist, ist zu einer vorliegenden Bestimmung die gesuchte zweite normal. Liegen mehrere Richtungen vor, kann man zwei einfache Gleichungen auflösen oder sich an Hand einer Kartierung durch Probieren mit Richtungswinkeln und Strecken helfen.

Beispiel:  $\nu_1 = 50^\circ$ ,  $s_1 = 1$  km,  $ab = -\rho^2/2$ ,  $aa = \rho^2/2$ ,  $bb = \rho^2/2$

$\nu_2 = 150^\circ$ ,  $s_2 = 2$  km,  $ab = +\rho^2/8$ ,  $aa = \rho^2/8$ ,  $bb = \rho^2/8$

$a_3a_3 = b_3b_3$  ergibt  $\nu_3 = 50^\circ, 150^\circ, 250^\circ$  oder  $350^\circ$

$a_3b_3 = +3\rho^2/8$  ergibt  $\sin 2\nu_3 = -1$ ,  $\nu_3 = 350^\circ$ ,  $s_3 = \sqrt{\frac{4}{3}}$  km.

Im Falle von Innenrichtungen wird dasselbe Prinzip beibehalten, nur ist die Überlegung wegen der Orientierungsunbekannten undurchsichtiger. (Vgl. *Barvir*, Vorlesungen aus Technik des Katasterwesens).

Etwas spezieller ist das in [15] behandelte Problem. Einbuchtungslose Fußpunktkurven gehören zu Fehlerellipsen, welche teilweise an kreisförmige heranreichen.

Streng durch Optimierung ist die Aufgabe, ein ganzes Feld von Punkten mit kreisförmigen Fehlerellipsen aufzubauen, praktisch unlösbar. Als Zielfunktion wäre die Absolutsumme der Kovarianzen und gleichzeitig die der Differenzen aller  $[aa]$  und  $[bb]$  zu minimisieren, bei den Kovarianzen werden aber nur die der Hauptdiagonale von  $\mathbf{M}$  benachbarten Glieder betroffen. . . . (1.2.3)

Dies würde zwar angenähert kreisförmige Fehlerellipsen, doch immerhin miteinander korrelierte Punkte geben. Wollte man auch diese Abhängigkeit möglichst klein halten, würde das Ergebnis zu einer besonderen Einzelpunkteinschaltung hinführen, wenn man nicht gar eine punktweise photogrammetrische Auswertung gelten lassen will. Beide Methoden würden gegen die Gesetze der Nachbarschaft verstoßen, besonders wenn diese primär einzuhalten sind. . . . (1.2.4)

Am zielführendsten erscheint dem Verfasser eine Art „Netzaufbau“ wie unter (1.1.1) bzw. (1.2.2) geschildert in Verbindung mit gesuchten Analogien zu schematischen Netzen. In [9] sind auf Grund der Symmetrieeigenschaften gleichseitiger Dreiecke bzw. regelmäßiger Sechsecke die Fehlerellipsen im allgemeinen Kreise. In [10] ist zu ersehen, daß das  $3 \times 9$  Rechteck noch recht langegezogene Fehlerellipsen aufweist. Bereits im  $5 \times 9$ -Netz haben praktisch alle Punkte der inneren  $3 \times 7$ -Geraden kreisförmige Fehlerellipsen, beim  $9 \times 9$ -Quadrat herrschen Kreise vor mit Ausnahme der direkt den Fixpunkten benachbarten Neupunkten. Immerhin sind die Kreise nicht gleichgroß, vgl. (1.1.4).

### 1.3 „Zuverlässigkeit“ (Absicherung gegen grobe Fehler)

Die Absicherung gegen zufällige, normalverteilte Fehler erfolgt auf Grund einer a priori Netzerkundung. Man verwendet einen Erfahrungswert  $\sigma_0$  als mittleren Fehler einer Messung, welcher im statistischen Sinn als mit  $\infty$  Freiheitsgraden bestimmt gelten kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt innerhalb seiner

Fehlerellipse zu liegen kommt, beträgt dann 39%, da es sich um eine zweidimensionale Fehlerverteilung handelt. Die Fläche der Fehlerellipse beträgt  $\text{Det } \mathbf{M}$ . . . . (1.3.1)

Man kann auch den Helmert'schen Fehlerkreis einführen. Sein Radius ist  $\sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{\text{Sp } \mathbf{M}}$  = dem mittleren Punktlagefehler. Der Neupunkt liegt mit 62% Wahrscheinlichkeit innerhalb. . . . (1.3.2)

Weitere Probleme um Fehlerkreise und Fehlerellipsen sind in [16] bzw. [17] S. 512 dargestellt. Bei kreisförmigen Fehlerellipsen ist es egal, ob man sie durch den modifizierten Helmert'schen Fehlerkreis, dessen Radius dem „mittleren Koordinatenfehler“  $\sqrt{1/2 (m_x^2 + m_y^2)}$  = hier  $m_x = m_y = m_p \sqrt{1/2}$  gleich ist, ersetzt. . . . (1.3.3)

Je gestreckter die Fehlerellipse wird, desto größer wird der Einfluß der gemischten Koordinatenfehler. Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb des modifizierten Fehlerkreises zu liegen, unterscheidet sich dann von der, innerhalb der Fehlerellipse zu liegen. . . . (1.3.4)

Ist die Fehlerellipse nicht aus einer a priori-Abschätzung mit hervorgegangen, sondern aus einem Ausgleich, liegen völlig veränderte Wahrscheinlichkeiten vor. Verwendet man  $\sigma_0$ , liegt man etwa mit 95% Wahrscheinlichkeit innerhalb einer Ellipse, welche 2.45 mal größere Halbachsen aufweist als die aus (1.3.1) berechnete. Steht aber kein  $\sigma_0$  zur Verfügung, sondern z. B. nur eine Schätzung  $\hat{\sigma}$  auf Grund von 2 Überbestimmungen, so liegt man mit 95% Wahrscheinlichkeit innerhalb des

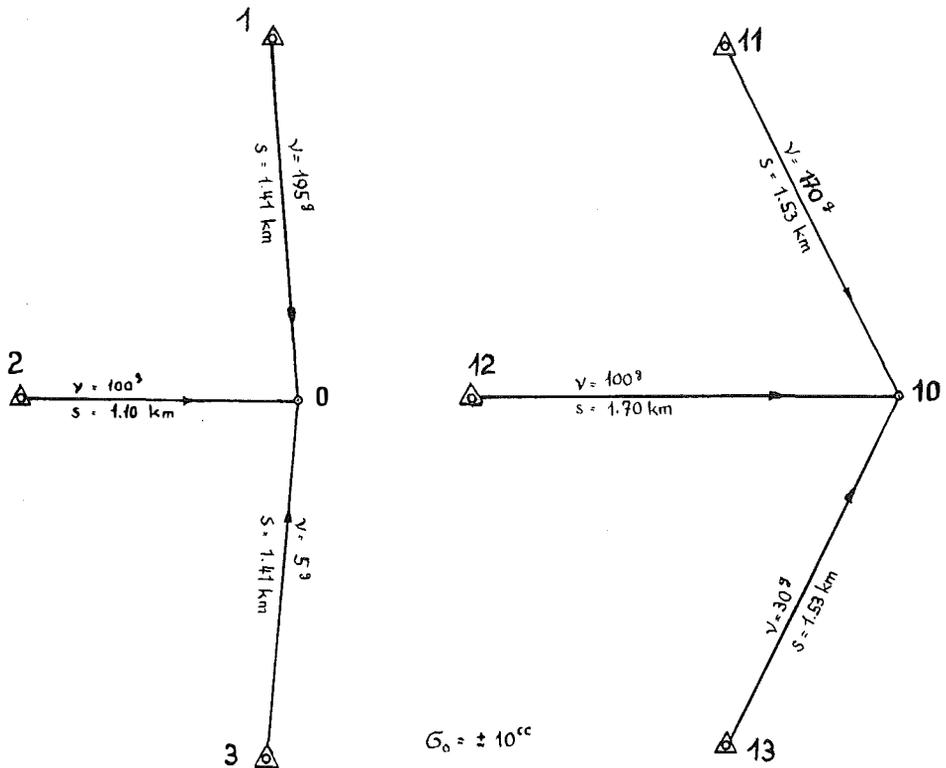


Abb. 1

6.16fachen der ursprünglichen Ellipse. Der Maßstabsfaktor gegenüber einer Ermittlung mit  $\sigma_0$  beträgt weitere 2.5, die Fläche für die aus  $\hat{\sigma}$  bestimmte Fehlerellipse ist mehr als sechsmal so groß wie für die aus  $\sigma_0$ , wenn  $\sigma_0$  und  $\hat{\sigma}$  ziffernmäßig gleich groß sind. . . . (1.3.5)

Gibt man das Vertrauensintervall einer Konfidenzellipse (= maßstäblich geänderte Fehlerellipse, um auf runde Fehlerwahrscheinlichkeiten zu kommen) an wie etwa in [18], S. 106, müßte bei voller Strenge noch hinzugefügt werden, ob es sich um die Dimension auf Grund einer Approximation an den modifizierten Fehlerkreis oder auch unter Berücksichtigung des Flächeninhaltes (1.3.4) handelt

In [18] wird erstmals seit [5] auf das wichtige Problem der Absicherung gegen grobe, nicht zufällige Fehler hingewiesen. Reicheneder hat in seiner Arbeit [5] einen Sicherheitsfaktor definiert, der gleich ist dem mittleren Fehler (in einer Richtung) aus allen Beobachtungen gebrochen durch den mittleren Fehler in dieser Richtung, der sich ergibt, wenn man die zu untersuchende Messung nicht verwendet. (1.3.6) Je kleiner dieser Faktor, desto eher muß der untersuchte Wert unabhängig kontrolliert werden. Abb. 1 (in Anlehnung an [18]) möge als Illustration dienen.

Tabelle 2 zeigt hierzu die mit Rechenschiebergenauigkeit ermittelten Werte im Sinne von (1.3.6):

Tabelle 2

	Netz 0—3			Netz 10—13		
	alle Messungen	ohne 1	ohne 2	alle Messungen	ohne 11	ohne 12
$m_y$ (cm)	1.6	2.2	1.6	1.9	3.0	1.9
$m_x$ (cm)	1.7	1.7	1.8	2.4	2.7	3.8
$sf_y$ (%)	.	73	100	.	63	100
$sf_x$ (%)	.	100	9	.	89	63

Würde im Netz 0—3 ein grober Fehler bei  $v_{2/0}$  unterlaufen, z. B. extreme Refraktion, falsche Abschrift aus dem Meßprotokoll, Rechenfehler bei Satzmittelung, Eingabefehler bei der automatischen Berechnung u. dgl., würde das zur Folge haben, daß  $X_0$  1 mal ungenauer bestimmt worden wäre als a priori abgeschätzt, wenn man  $v_{2/0}$  hätte verwerfen müssen; im Netz 10—13 hätte derselbe Fall nur den 1.6fachen vorangeschlagenen Fehler bewirkt. Im zweiten Netz ist also die Gefahr, nachmessen zu müssen, wesentlich geringer. Man sieht aus dieser Überlegung, daß das erste Netz trotz größerer a priori-Genauigkeit das weniger zuverlässige ist und die Richtung  $2/0$  besonders gewissenhaft zu behandeln ist.

Reicheneders Methode streng durchzurechnen ist bei größeren Netzen aber äußerst mühsam, da für jede Alternative eine neue Berechnung von  $Q$  aus  $N_i^{-1}$  durchzuführen ist, wobei direkte Herleitungen aus  $N^{-1}$  mit der Neumann'schen Reihe (gemäß [17] oder den Arbeiten von *Gotthardt*, *Linkwitz*) wegen großer  $\Delta N$  und somit schlechter Konvergenz selten in Frage kommen. (Mehr über dieses Problem im Kapitel 3. dieser Arbeit.) Es wird also gerade dann beim gefühlsmäßigen Abschätzen bleiben müssen, wenn die Routine des Praktikers, die wie Tab. 2 entschieden hätte, zu versagen beginnt.

Hier kann man sich nach *Baarda* [19] mit voller Strenge weiterhelfen. Das für uns wichtigste dort behandelte Problem lautet: Wie genau ( $\check{\nabla}_0 l_i$ ) kann eine Beobachtung  $l_i$  in einem Netz sein, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\beta_0$  ein grober Fehler aufgedeckt wird, wenn der Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für die Ausgleichung mit  $1 - \alpha_0$  Ausschlußwahrscheinlichkeit erstellt wird? . . . (1.3.7)

Wie genau können  $b$  zusätzlich im Netz gemachte Beobachtungen  $l_{+1}$  . . . .  $l_{+b}$  sein, wenn ein grober Fehler mit  $\beta_0$  Wahrscheinlichkeit aufgedeckt werden soll, bei  $1 - \alpha$  Ausschlußwahrscheinlichkeit der Konfidenzbereiche der Ausgleichung? . . . (1.3.8)

Weitere Fragen kann man ähnlich [5] formulieren, nämlich wie groß eine Koordinatenverbesserung  $dx$  werden kann, um sich signifikant von einer a priori-Abschätzung  $m_x$  zu unterscheiden. . . . (1.3.9)

Für uns ist primär (1.3.7) interessant, da (1.3.8) theoretisch zu verwickelt ist, besonders in der sehr spröden Darstellung [19], und (1.3.9) von den Näherungswerten abhängt.

$$\check{\nabla}_0 l_i = \sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_i}} \quad \text{laut [19], S. 66} \quad . . . (1.3.10)$$

$$N_i = \mathbf{P} (\mathbf{G} - \mathbf{AQA}^T) \mathbf{P} \delta, \text{ aus [19] 11.10 und [21], Abs. 3.2 interpretiert.} \quad . . . (1.3.11)$$

In (1.3.11) bedeutet  $\mathbf{AQA}^T$  die Gewichtskoeffizientenmatrix der aus der Ausgleichung abgeleiteten Werte von  $\mathbf{l}$ , d. h. ein Maß für die Fehler, welche die nun aus den ausgeglichenen Koordinaten abgeleiteten ehemaligen Bestimmungsstücke des Netzes haben würden. Nimmt man den einfachsten Fall  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ , alle Messungen

$$\text{gleichgewichtig, Gewicht} = 1, \text{ wird (1.3.11) zu } 1/\bar{N}_i = \sqrt{1 - \frac{\check{m}_i^2}{\sigma_0^2}} = \frac{\check{m}_v}{\sigma_0} \quad . . . (1.3.12)$$

Die Vorteile, welche [19] gegenüber [5] bietet, sind:

Statistisch exakte Erfassung des Problems; auch im allgemeinsten Fall (1.3.11) nur eine allerdings umfangreiche Matrizenoperation; direktes Ablesen der Genauigkeitsanforderungen an die Beobachtungen. Je größer  $\check{\nabla}_0 l$ , desto eher muß die Messung durch eine gleichwirkende zusätzliche kontrolliert werden; je kleiner, desto überflüssiger beginnt sie zu werden. In einem guten Netz sollen alle  $\check{\nabla}_0 l$  annähernd gleich groß sein.

Weitere Prozeduren aus [19] betreffen das Aufsuchen grober Fehler ("data snooping"), dies ist aber nicht Gegenstand meiner Arbeit. Es folgt die Anwendung von (1.3.7) bzw. (1.3.10), (1.3.11) sowie (1.3.12) auf unser Beispiel (Abb. 1):

Für  $\beta_0 = 80\%$ ,  $\alpha_0 = 5\%$  folgt laut [19]  $\lambda_0 = 7.85$ , durch Ausmultiplizieren der Matrizen  $\mathbf{AQA}^T$  folgen die  $\check{\nabla}_0 l$ , welche auch durch Überlegungen mit dem Horsky-Diagramm aus Perpendikeln der Fußpunktkurven von 0 bzw. 10 kontrolliert werden können, und nach (1.3.10) die gesuchten Resultate in Tabelle 3, errechnet in Rechenschiebergenuauigkeit.

$\sigma_0 \sqrt{\lambda_0} = 28^{\text{cc}}$  wäre eine Messung, welche laut Reicheneder einen Sicherheitsfaktor von 100% erzeugen würde.

Tabelle 3

	Netz 0-3					Netz 10-13	
	$v_{1/0}$	$v_{2/0}$	$s_{1/0}$	$v_{1/0}$	$v_{2/0}$	$v_{11/10}$	$v_{12/10}$
$m_l^2/\sigma_0^2$	0.48	0.97	0.41	0.48	0.58	0.65	0.68
$N$	0.52	0.03	0.59	0.52	0.42	0.35	0.32
$\bar{\nabla}_0 l$	39 <sup>cc</sup>	163 <sup>cc</sup>	7 cm	39 <sup>cc</sup>	43 <sup>cc</sup>	47 <sup>cc</sup>	49 <sup>cc</sup>

Die wirksamste Methode bei der Netzkonfiguration 0-3 laut Abb. 1, um  $\bar{\nabla}_0 v_{2/0}$  zu verbessern, ist offensichtlich die Messung der Strecke  $s_{1/0}$  (oder  $s_{3/0}$ ). Um deren Wirksamkeit zu überprüfen, kommt man auch unter Berücksichtigung von [19], S. 45 nicht um eine neuerliche Matrizenoperation mit Aufstellung von  $A_{+i}$ ,  $Q_{+i}$ ,  $A_{+i} Q_{+i} A_{+i}^T$  herum.

Näherungsoperationen scheitern wie schon oben erwähnt an mangelnder Konvergenz. Ein stufenweiser Ausgleich läßt sich relativ schwer algorithmisieren. Für  $\sigma_0 = \pm 2$  cm (Geodimeter) kommt man zu den Werten von Tabelle 3, Spalten 4-6, mit einer wesentlichen Verbesserung der Netzstruktur.

(wird fortgesetzt)

#### Verzeichnis der wichtigsten Formelgrößen

$A$	Matrix der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen (Formmatrix)
$\alpha_0$	Ausschlußwahrscheinlichkeit für die Annahme einer Hypothese, besonders beim Fisher-Test
$a_i, b_i$	Koeffizienten in den Verbesserungsgleichungen
$\beta_0$	Wahrscheinlichkeit für das Aufdecken eines groben Fehlers
$\delta$	Spaltenvektor mit dem Kronecker'schen $\delta:1$ für $i = j$ , 0 für $i \neq j$
$\bar{\nabla}_0 l$	Genauigkeitsschranke für eine Messung $l$ , um mit $\beta_0$ Wahrscheinlichkeit als grober Fehler entlarvt zu werden
$\bar{\nabla}_0 x$	Genauigkeitsschranke für das Ergebnis einer Ausgleichung, um als durch einen groben Fehler beeinflusst aufgedeckt zu werden.
Det	Determinante von . . . . .
$E$	Einheitsmatrix
$G = \sigma_0^2 P^{-1}$	Kovarianzmatrix der Beobachtungen a priori
$l$	Vektor der Messungen $l_i$
$\lambda$	Vektor der Eigenwerte von $M$ , gewonnen aus der algebraischen Gleichung $u$ -ten Grades $\text{Det}(\lambda E - M) = 0$ .
$\lambda_0(\alpha_0, \beta_0, 1, \infty)$	statistische Kerngröße laut [19], worin $\alpha_0, 1, \infty$ auch in der Fisher'schen Kenngröße $F(\alpha_0; m_1 = 1, m_2 = \infty)$ vorkommen. In $F(\alpha_0; 1, \infty)$ wird eine aus einer Überbestimmung gewonnene Varianz $\hat{\sigma}^2$ gegen die empirische Varianz $\sigma_0^2$ mit einer Ausschlußwahrscheinlichkeit $\alpha_0$ abgeschätzt. Siehe etwa auch [20].

$\mathbf{M} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}$	Kovarianzmatrix der „Unbekannten“ a priori
$\text{Sp } \mathbf{M} = \sum m_p^2$	Spur von $\mathbf{M}$ ; „äußerer Fehler des Punkthaufens“ [7]
$\tilde{\mathbf{M}}$	Kovarianzmatrix $\mathbf{M}$ nach Hinzufügen von $r_1$ Beobachtungen und $r_2$ Bedingungen. $r_1 + r_2 = r$ , $\text{Sp } \tilde{\mathbf{M}} \geq \text{Sp } \mathbf{M} - \sum_1^r \lambda$ , $r < u$ .
$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$	mittlerer Punktlagefehler im Sinne Helmert's a priori
$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}}$ , $m_y$	mittlere Koordinatenfehler a priori
$m_{xy} = \sigma_0 \sqrt{Q_{xy}}$	gemischter Koordinatenfehler (Kovarianz) eines Punktes (wichtig bei Berechnung relativer Fehler sowie der Fläche der Fehlerellipse)
$m_{xij} m_{xikj}$ , $m_{yij}$	Kovarianzen zwischen Koordinaten verschiedener Punkte bei der Netzeinschaltung
$m_{-i}$	mittlerer Fehler (a priori), wenn das Netz ohne die Messung $l_i$ durchgerechnet wird, d. h. wenn die $i$ -te Zeile in $\mathbf{A}$ verschwindet
$m_l$	mittlerer Fehler eines Bestimmungsstückes $l$ , abgeleitet aus den ausgeglichenen Koordinaten $\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}$
$m_{\bar{v}}$	mittlerer Fehler einer Verbesserung, berechnet aus den Koordinaten
$\mathbf{N}$	Normalgleichungsmatrix: bei gleichgewichtigen Beobachtungen $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , bei ungleich genauen $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$
$N_i$	Netzabhängige Größe mit Aussage über die Wirksamkeit einer Beobachtung $l_i$ für die Netzqualität
$P$	Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von . . . .
$\mathbf{P}$	Gewichtsmatrix der Beobachtungen, meist als Diagonalmatrix angesetzt, die Elemente heißen dann $p_i$
$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$	Gewichtskoeffizientenmatrix der Unbekannten
$\sigma_0$	mittlerer Fehler der Gewichtseinheit a priori
$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n - u}}$	mittlerer Fehler der Gewichtseinheit aus dem Ausgleich
$sf = \sqrt{\frac{m}{m-i}}$	Sicherheitsfaktor nach <i>Reicheneder</i> [5]
$u$	Anzahl der Unbekannten
$\mathbf{v}$	Vektor der Verbesserungen $v_i$
$\mathbf{w}$	Vektor der Widersprüche $w_i$ , $\mathbf{w} = \mathbf{I}_0 - \mathbf{l}$
$\mathbf{X}_0$	Vektor der Näherungswerte für die unbekanntenen Koordinaten
$\mathbf{x}$	Vektor der Unbekannten beim vermittelnden Ausgleich

#### Literatur:

- [1] *Carter, Muir*: Bücher, die die Welt verändern. Prestel-Verlag, München 1968.
- [2] *Grafarend*: Neuartige Navigationsprinzipien. ZfV 1970, S. 180–187.
- [3] *Helmert*: Studien über rationale Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie. Zf. Mathematik und Physik 1868, S. 73–120 und ferner S. 163–186.
- [4] *Schulze*: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. ZfV 1904, Hefte 1 und 2.

- [5] *Reicheneder*: Die Sicherheit einer Punkteinschaltung. ZfV 1941, S. 386–395.
- [6] *Wolf*: Polarität und Optimierung bei freien und eingeschalteten Netzen. AVN 1970, S. 291–298.
- [7] *Meissl*: Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. ÖZfV 1962, S. 159ff.
- [8] *Pelzer*: Die Genauigkeit elektromagnetisch gemessener Streckennetze. DGK-Reihe C, Nr. 136.
- [9] *Steinich*: Untersuchungen zur Konfiguration und Beobachtungsgenauigkeit in trigonometrischen Aufnahmenetzen. VT 1969, S. 222–229.
- [10] *Gotthardt*: Genauigkeitsuntersuchungen an schematischen trigonometrischen Netzen. Festschrift Großmann, Wittwer 1967, S. 123–131.
- [11] *Gerke, Pelzer*: Netzverdichtung oder Netzaufbau aus Funktionen gemessener Größen? AVN 1970, S. 309–317.
- [12] *Meissl*: Eine Abschätzung der Verbesserung eines Ausgleichs durch zusätzliche Beobachtungen und Bedingungen. Acta geodeatica . . . Acad. Sci. Hung. Tomus 4 (1–2), S. 167–173.
- [13] *Großmann*: Vorwärtseinschneiden und Fehlermaße. ZfV 1969, S. 235–237.
- [14] *Köhr*: Über mittlere Punktfehler. ZfV 1969, S. 445–455.
- [15] *Tárczy-Hornoch*: Über die Bedingungen der einbuchtungslosen Fußpunktskurven der mittleren Fehlerellipsen. AVN 1969, S. 233–238.
- [16] *Grafarend*: Zur Wahrscheinlichkeitstheorie des Helmert'schen Punktfehlers. ÖZfV 1970, S. 33–41.
- [17] *Wolf*: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler 1968.
- [18] *Conzett*: Moderne Methoden der Vermessung. SZfV 1970, S. 101–109.
- [19] *Baarda*: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, Nr. 5, Delft 1968.
- [20] *Storm*: Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl., Berlin 1969.
- [21] *Baarda*: Statistical Concepts in Geodesy. Netherlands Geod. Comm., Vol. 2, Nr. 4, Delft 1967.

## Feld-Rechenwalze zur Streckenreduktion

Von *Walter Smetana*, Wien

### Zusammenfassung

Die von mir erdachte Rechenwalze ( $25 \times 7$  cm), soll den Technikern, die vornehmlich mit der elektronischen Distanzmessung mittels Wildschem DI 10 zu tun haben, die Möglichkeit bieten, auf dem Felde, sogleich nach Einlaufen der betreffenden Schrägdistanz am Meßteil des Gerätes, die Gesamtkorrektionsgröße  $\delta s$  für die Schrägdistanz wegen Schrägvisur bei schon bekannten Höhen- bzw. Tiefenwinkeln für einen Bereich von  $\sphericalangle \varphi = 0 \dots 3$  Neugrad, einer mittleren Meereshöhe  $H$  der Meßstrecke und der Projektionsverzerrung im Gauß-Krüger-System, an der Rechenwalze zu ermitteln.

Die Gesamtkorrektionsgröße  $\delta s$  für die mit dem DI 10 erhaltene Schrägdistanz wird hiebei an der betreffenden Streckenmarke der Entfernungsskala der Rechenwalze mit cm-Genauigkeit abgelesen bzw. geschätzt.

Die bereits in der Kanzlei anhand von Punktübersichten bzw. Punktkarten ermittelte mittlere Meereshöhe  $H$  der Meßstrecke sowie eine mittlere Ordinate  $Y$  derselben werden, schon während des Einlaufens der Schrägdistanz, an der Rechenwalze eingestellt und zwar,  $H$  auf etwa 30 m und  $Y$  auf etwa 1–2 km genau.

Die Rechenwalze soll dem Techniker eine, meines Erachtens, unnötige Mehrarbeit, sei diese durch händische Berechnungen oder auch Vorschreibungen zur elektronischen Berechnung verursacht, ersparen.

## Tendenzen der Ausgleichsrechnung

(Fortsetzung von Heft 5/70)

Von *Kornelius Peters*, Wien

### 1.4 Bedingungen zwischen Funktionen des Ergebnisses (Forderungen an Strecken, Winkel usw.)

Häufig werden nicht nur die Genauigkeitsmaße der Ergebnisse einer Ausgleichung, sondern auch von gewissen Funktionen dieser Werte benötigt, z. B. die mittleren Fehler der Richtungen und Strecken aus ausgeglichenen Koordinaten, die mittleren Fehler der Koordinaten transformierter Punkte aus den durch Überbestimmung ermittelten Transformationselementen. Die Berechnung bietet prinzipiell keine Schwierigkeiten, ist aber bei konventionellem Ansatz umständlich durch die Erweiterung des Normalgleichungssystems um das Funktionsgewicht ([22] S. 98—103). Für das Verständnis nützlich ist die TIENSTRA'sche Merkregel, welche bereits 1934 gefunden wurde (Anwendung etwa [23]). Beide Methoden können als bekannt vorausgesetzt werden.

Wesentlich transparenter erscheint unser Problem in der Matrizendarstellung ([24] S. 81). Sei  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{x}$  die lineare Funktion  $\mathbf{F}$  der Ergebnisse der Ausgleichung  $\mathbf{x}$ , wird  $\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})} = \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{F}^T$

... (1. 4. 1)

Beispiel:  $\mathbf{f}$  seien die Seiten eines Dreieckes  $\mathbf{x}$  wie folgt:

$$s_{12} = s_{12}^0 + \cos v_{12} dx_1 + \sin v_{12} dy_1 - \cos v_{12} dx_2 - \sin v_{12} dy_2$$

$$s_{13} = s_{13}^0 + \cos v_{13} dx_1 + \sin v_{13} dy_1 - \cos v_{13} dx_3 - \sin v_{13} dy_3$$

$$s_{23} = s_{23}^0 + \cos v_{23} dx_2 + \sin v_{23} dy_2 - \cos v_{23} dx_3 - \sin v_{23} dy_3$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} ds_{12} \\ ds_{13} \\ ds_{23} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} + \cos v_{12} + \sin v_{12} - \cos v_{12} - \sin v_{12} & 0 & 0 \\ + \cos v_{13} + \sin v_{13} & 0 & 0 & - \cos v_{13} & - \sin v_{13} \\ 0 & 0 & \cos v_{23} + \sin v_{23} - \cos v_{23} - \sin v_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_{(\mathbf{f})} = \begin{pmatrix} Q_{s_{12}s_{12}} & Q_{s_{12}s_{13}} & Q_{s_{12}s_{23}} \\ Q_{s_{12}s_{13}} & Q_{s_{13}s_{13}} & Q_{s_{13}s_{23}} \\ Q_{s_{23}s_{12}} & Q_{s_{23}s_{13}} & Q_{s_{23}s_{23}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} & Q_{x_1x_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & Q_{y_3x_3} & Q_{y_3y_3} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{0s_{12}} = \sigma_0 \sqrt{Q_{s_{12}s_{12}}} \text{ usw., } ds_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^0$$

Sind nun die Funktionen der ausgeglichenen Werte eigentlich bedeutender als diese selbst, wenn etwa der Ausgleich nur aus methodischen Gründen wie vorliegend durchgeführt wurde, können an sie gewisse Anforderungen gestellt werden, welche gleich in die Rechnung eingebaut werden können.

Das einfachste und am frühesten durchgerechnete Beispiel ist die SCHREIBER'sche Bedingung für Basiserweiterungsnetze ([24] S. 191 ff.). Doch auch dieses bedarf einiger Voraussetzungen. Die Genauigkeit der übertragenen Basis in einem trigonometrischen Netz soll möglichst hoch sein. Wird nun die Anzahl aller Winkelmessungen im Netz als gegeben angesehen, kann man unter der Annahme, das Gewicht eines Winkels sei der Wiederholungszahl seiner Messungen gleichzusetzen, einen Ansatz für eine Minimumsbedingung mit der oben erwähnten Nebenbedingung treffen. Das Resultat: Die Basis wird dann am genauesten übertragen, wenn nur die zu ihrer Bestimmung gerade notwendigen, geometrisch günstigsten Winkel entsprechend oft gemessen werden.

Ein Analogon hierzu wäre die Aufgabe, einen Neupunkt  $P_0$  durch Streckenschnitt mittels insgesamt 10 Di 10-Messungen zu 10 möglichen Fixpunkten hin zu bestimmen (Abb. 2).



Abb. 2

Soll der mittlere Punktlagefehler von  $P_0$  möglichst klein werden, müßten jene zwei Strecken ausgesucht werden, welche möglichst senkrecht aufeinander stehen, und je 5 mal gemessen werden; in der Abbildung 2 also  $S_{08}$  und  $S_{010}$ . (Auch der „mittlere Punktlagefehler,, ist der Fehler einer abgeleiteten Größe!)

Daß die strenge Durchführung dieser Erkenntnisse wegen der Korrelation der Messungen und Fehlen einer Netzkontrolle anfechtbar ist, muß nicht weiter ausgeführt werden. Eine Ausweitung auf ganze Netze oder mehrere Bedingungen führt auf Optimierungsmodelle, deren Aufwand nicht gerechtfertigt scheint, wie schon die Überlegung für nur einen Punkt zeigt. Sollen nicht Fehler optimiert werden, sondern das Netz nur gewissen Bedingungen genügen, führt das auf vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen ([24], S. 235 ff.).

Zusätzlich zu den Verbesserungsgleichungen  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$  sind Bedingungen zwischen den Unbekannten zu berücksichtigen von der Art  $\mathbf{B}^T\mathbf{x} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \dots (1.4.2)$

Nun führt man den Vektor der Lagrange'schen Multiplikatoren  $\mathbf{k}$  ein, welcher dieselbe Dimension wie  $\mathbf{t}$  besitzt. Das endgültige Gleichungssystem heißt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{k} + \mathbf{A}^T\mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{x} + \mathbf{t} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots (1.4.3)$$

Ob die Mühe einer solchen Ausgleichung lohnt, sei dahingestellt, da man trachten wird, die Bedingungen zwischen den Unbekannten bereits im ersten Ansatz (für die  $\mathbf{x}$ ) durch Einsetzen zu berücksichtigen.

Ein Beispiel für solche Bedingungen wäre etwa ein Tunnel-Triangulierungsnetz wie in Abb. 3, wobei für die ausgeglichenen Koordinaten der Neupunkte  $A, B$ , 1 bis 6 gefordert wird, daß eine Orientierung in  $A$  nach 1, 2, 3 und in  $B$  nach 4, 5, 6 eine um genau 200g verschiedene Anschlagrichtung  $AB$  bzw.  $BA$  ergeben müssen:

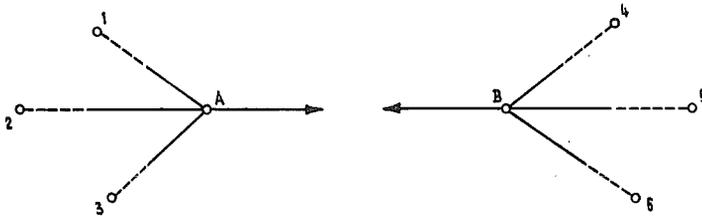


Abb. 3

$$\begin{aligned} &1/3 \{ (a_{A1} + a_{A2} + a_{A3}) dx_A - a_{A1} dx_1 - a_{A2} dx_2 - a_{A3} dx_3 + (b_{A1} + b_{A2} + b_{A3}) dy_A - \\ &- b_{A1} dy_1 - b_{A2} dy_2 - b_{A3} dy_3 \} + a_{AB} (dx_A - dx_B) + b_{AB} (dy_A - dy_B) \\ &- 1/3 \{ (a_{B4} + a_{B5} + a_{B6}) dx_B - \dots \dots \dots \} - a_{BA} (dx_B - dx_A) - b_{BA} (dy_B - dy_A) = 0 \end{aligned}$$

(1.4.2) ist in diesem Fall nur eine Gleichung,  $\mathbf{t}$  ein Skalar und gleich Null.  $\mathbf{B}^T$  ein Zeilenvektor

$$1/3 * \left\| \begin{array}{cccc} (a_{A1} + a_{A2} + a_{A3}) & (b_{A1} + b_{A2} + b_{A3}) & -a_{A1} & -b_{A1} \\ (a_{B4} + a_{B5} + a_{B6}) & \dots & -a_{BA} & -b_{BA} \end{array} \right\| + b_{B6}$$

$(a_{ij}, b_{ij}$  Gauß'sche Richtungskoeffizienten)

für  $\mathbf{x} = \left\| \begin{array}{c} dx_A \\ dy_A \\ dx_1 \\ \vdots \\ dy_B \\ \vdots \\ dy_6 \end{array} \right\|$

Weitere Überlegungen zum Problem der Funktionen ausgeglichener Größen: Steht ein Programm nach [19] zur Verfügung, setzt man die gefragten Funktionen als zusätzliche (fiktive) Beobachtungen an und erhält gemäß (1.3.8) und Tabelle 3 dieser Arbeit eine Aussage über den zu erwartenden Fehler bzw. welche Beobachtungen zusätzlich gemacht werden müßten, um eine Schranke für die abgeleitete Größe zu unterschreiten. In Abbildung 1 seien z. B. nur die Richtungen  $v_{1/0}$  und  $v_{3/0}$  gemessen. Wollte man nun  $v_{2/0}$  daraus ableiten, sieht man aus Spalte 3 von Tabelle 3, daß dies nicht zulässig ist. Seien hingegen  $S_{1/0}$   $v_{1/0}$  und  $v_{3/0}$  beobachtet, wird  $\vec{v}_0 v_{2/0} = 43^\circ$ , also nur 50%

über dem am genauesten erreichbaren Wert von  $28^\circ$ , welcher unter den angenommenen statistischen Schranken einer direkten Messung mit der Genauigkeit von  $v_{1/0}$  und  $v_{3/0}$  entspricht.

Die Arbeit [25] zeigt, welche Messungen für die gefragten Größen überflüssig sind. Da die verwendeten Näherungen aber nicht mehr konvergieren, wenn man fragt,

welche die Genauigkeit wesentlich beeinflussen würden, läßt sich der Formelapparat nur im Sinne der Ausschließung anwenden.

Schließlich sei noch auf ein Ergebnis von [11] hingewiesen. Für die elektrooptischen Distanzmeßgeräte mit folgenden Fehlergesetzen und Reichweiten:

Tellurometer MA 100,  $m_S = \pm (0.1 \text{ cm} \pm 0.15 \text{ cm/km})$ ,  $S_{\max} = 2 \text{ km}$

Wild DI 10,  $m_S = \pm (1 \text{ cm} \pm 0.15 \text{ cm/km})$ ,  $S_{\max} = 2 \text{ km}$

Geodimeter 4 B, 6,  $m_S = \pm (1 \text{ cm} \pm 0.15 \text{ cm/km})$ ,  $S_{\max} = 15 \text{ km}$

(Zitat aus der genannten Arbeit! Ohne Meinung des Verf.) wurden regelmäßige Streckennetze (Quadrate mit Diagonalen) durchgerechnet, deren Seitenlängen die realistischen Werte von 1 km für die Kurzstreckengeräte, 3 km für Geodimeter betragen. Des weiteren wurde ein unregelmäßiges Streckennetz ausgeglichen. Aus beiden Konfigurationen wurden abgeleitete Netzelemente herausgegriffen. Interessanterweise sind etwa gleichlange Strecken bzw. gleichgroße Winkel mit gleichlangen Schenkeln in beiden Netzen fast gleich genau! . . . (1.4.4)

Tabelle 4

Tellurometer MA 100					Wild DI 10					Geodimeter 4,6				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
8	0,7	0,4	0,4	0,6	8	3,0	2,2	1,9	1,7	24	3,9	2,4	0,7	1,0
6	0,6	0,3	0,3	0,6	6	2,6	1,4	1,7	2,7	18	3,4	1,5	0,6	1,2
4	0,5	0,2	0,4	0,8	4	2,2	1,1	2,0	3,5	12	3,0	1,3	0,7	1,6
2	0,4	0,2	0,6	1,3	2	1,6	0,9	3,1	5,1	6	2,0	1,0	1,2	2,1

Spalte 1: Seitenlänge in km;

Spalte 2: fiktiver mittlerer Streckenfehler aus Summation der direkten Messungen;

Spalte 3: mittlerer Streckenfehler aus der Ausgleichung (beide in cm);

Spalte 4: mittlerer Winkelfehler eines rechten Winkels in ° aus der Ausgleichung;

Spalte 5:  $(\text{Sp. 2}) * (\text{Sp. 1})^{-1} * \rho^{cc}$

Offensichtlich sind die Resultate aus der Ausgleichung etwa doppelt so genau als die der fiktiven aneinandergereihten Messung, und zwar für Strecken wie auch für Winkel.

### 1.5 „Rationelle“ Messung

Nach NEUBERT ist „rationell“ die Quersumme der Vorzüge „schnell, genau, zuverlässig, billig“, wobei die Gewichte der vier je nach den gerade vorliegenden Anforderungen variieren können. Wie 1.3 zeigte, muß „genau“ noch lange nicht „zuverlässig“ sein. Aber auch „schnell“ und „billig“ sind wesentlich verschieden, da der Einsatz teurer Geräte die Messung oft außerordentlich beschleunigen kann. Und in der reinen Kostenrechnung spielen Überlegungen, betreffend Geräteamortisation, Kapazitätsauslastung, Abschreibung, keine geringere Rolle als Bruttolöhne und Kilometergelder. Es ist daher einleuchtend, daß auch unter massivsten Einsatz der EDV zielführende Rationalisierungsberechnungen geodätischer Netze noch in den ersten Anfängen stehen, da wirklich realistische Modelle eine Unzahl von Parametern aufweisen.

Zum Unterschied von Betriebsrationalisierungen oder Optimierungsaufgaben ähnlich dem Transportproblem, wo die Resultate der Rechnung einen jahrelang immer wiederkehrenden schematischen Ablauf nach sich ziehen, wird ein geodätisches Netz im allgemeinen nur einmal observiert; bis zur nächsten Messungsperiode, und handle es sich auch um Erdkrustenbewegungsmessungen, haben sich die geräte-technischen und organisatorischen Voraussetzungen grundlegend geändert. Als beachtenswert erscheint mir persönlich hier nur die Optimierung von Netzen für Deformationsmessungen an Bauwerken.

Nach G. FÖRSTNER war KÖHR der erste Autor, der sich echt mit Wirtschaftlichkeitsüberlegungen befaßte ([26] mit Literatur, [28]). Er setzt die Gesamtdauer einer Messung gleich Einrichtungszeit plus Wiederholungszahl mal Dauer der Einzelmessung und den mittleren Fehler dieser mehrfachen Messung gleich mittleren Fehler der Einzelmessung gebrochen durch Wurzel aus der Wiederholungszahl, die Leistungsfähigkeit gleich die Reziproke von mittleren Fehler der Einzelmessung mal Wurzel der Einzelmessungsdauer. Als Beispiel gelte ein Vergleich von Geodimeter 4 B und DI 10:

Tabelle 5

	Geodimeter 4	DI 10
Einrichtungszeit (min)	20	10
Wiederholungszahl der Messungen auf einem Standpunkt (Beispiel)	2	2
Dauer der Einzelmessung (min)	5	1
Gesamtdauer der Messung (min)	30	12
m. F. der Einzelmessung (cm)	2	1
m. F. der Strecke (cm) lt. Köhr	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Leistungsfähigkeit	0,3	1,4

Diese Werte stimmen natürlich nur grob innerhalb des gemeinsamen Meßbereiches beider Geräte.

Die mit den Instrumenten durchgeführten Messungen dienen zur Berechnung gewisser funktionell von ihnen abhängiger Größen, wie Koordinaten, Richtungen, Flächen u. dgl., deren Fehler vom Fehler der Gesamtmessung und dem funktionellen Zusammenhang abhängig ist, und bewirken einen gewissen Aufwand, der von der Gesamtdauer der jeweiligen Messungen abhängt.

Es gibt nur zwei Möglichkeiten der Optimierung je nach der „Zielfunktion“, welche das Extrem anrechnen soll, geordnet:

1) mit gegebenem Aufwand eine maximale Genauigkeit der abgeleiteten Funktionen, und ... (1.5.1)

2) mit vorgegebener Genauigkeit der abgeleiteten Funktionen einen minimalen Aufwand anzustreben ... (1.5.2)

(WOLF schlägt in [6] einen Kompromiß aus beiden Forderungen vor, welcher wohl der Praxis eher angepaßt, aber rechentechnisch schwerer zu verwirklichen ist).

Nach der Art der Berechnung unterscheidet man derzeit:

1) Als „Extremum mit Nebenbedingungen“, wobei je nach (1.5.1) oder (1.5.2) Aufwand und Fehlerquadratsumme die eine oder andere Rolle spielen. ... (1.5.3)

2) Als echte Optimierung im Sinne der Unternehmensforschung gestützt auf anderweitig entwickelte Rechenverfahren und EDV-Programme. . . . (1.5.4)

Wie schon die sehr einfachen Beispiele aus [26] zeigen, ist der Rechenaufwand nach (1.5.3) groß, wenn nicht für zumindest (1.5.1) Rechenprogramme ähnlich (1.4.3) vorliegen, da die Struktur beider Probleme gleichgeartet ist. Schon die Aufstellung der Nebenbedingungen erfordert Vertrautheit mit der Materie.

Für (1.5.4) lauten die Algorithmen:

Gegeben sind Beziehungen  $f_i(x_j) \leq C_i$  (Nebenbedingungen, Konstruktionen) sowie eine Zielfunktion  $Z(x_j)$ , welche zu einem Extrem werden soll. Gesucht sind  $x_j$ , welche die beiden Bedingungen erfüllen. Sind die Nebenbedingungen und die Zielfunktionen linear:  $\mathbf{F}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}$ ;  $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ , spricht man von einem linearen, sonst von einem nichtlinearen Programmierungsproblem. Das bekannteste Linearprogramm ist das Transportproblem ([27], gut zur Einführung), worin  $\mathbf{x}$  die Anzahl der verschiedenen Transportmittel je Route,  $\mathbf{b}$  die spezifischen Kosten je Transportmittel,  $Z$  die gesamten Transportkosten,  $\mathbf{F}$  die Verteilungsmatrix, welches Fahrzeug von welchem Stand zu welchem Ziel fahren soll und  $\mathbf{c}$  die mögliche Auslastung der Stand- und Zielorte.

Im Vermessungswesen wurden bis jetzt hauptsächlich Probleme der Art (1.5.1)/(1.5.4) gerechnet ([8]). Die Zielfunktion ist meist eine minimale Spur der Kovarianzmatrix, minimaler Richtungsfehler oder ähnliches, die gesuchten  $x_j$  sind die Wiederholungszahlen der einzelnen Messungen ( $\rightarrow$  Gewichte, auf diese Art Einfluß auf Fehlerverteilung), die Nebenbedingungen die Zusammenhänge zwischen Aufwand, Messungsanordnung und a priori-Fehler. Die Ergebnisse entsprechen der Anschauung: soll der Richtungsfehler senkrecht zur Längsachse einer Streckenkette in deren Abschluß optimiert werden, sind nur die in der Längsachse gerichteten Strecken zu messen, natürlich mit den entsprechenden Wiederholungszahlen. Eine echte Lagebestimmung wäre unmöglich. Leider ist aus der überaus interessanten Arbeit [8] nicht zu ersehen, welche Genauigkeitssteigerung die jeweils optimierten Funktionen erfahren.

Ergebnisse von Optimierungen sind keinesfalls kritiklos zu übernehmen. So kommt [9] zu dem Schluß, Richtungsmessungen mit mehr als einem Satz seien unwirtschaftlich, was man auch in Kleintriangulierungsnetzen schon aus Gründen der Grobkontrolle nicht in die Praxis umsetzen dürfte, während TARCZY-HORNOCH ableitet, in kreiselgestützten Polygonzügen seien wenige, aber öfter observierte Kreiselstandpunkte zwischen relativ langen Seiten rationell, was auch der Anschauung einleuchtet, aber gegen die „ererbten“ Gewohnheiten der Bussolenmessung steht.

## 1.6 Diskussion „optimaler“ Netze

Ohne späteren Überlegungen über Netzausgleich vorgreifen zu wollen, sei kurz eine Zusammenstellung der bisher erörterten Gesichtspunkte betreffend geodätische Netze mittlerer und niederer Ordnungen gegeben. Geometrische Überlegungen stehen im Vordergrund, gemischte Richtungs-Streckennetze seien vorderhand nicht behandelt (siehe Tabelle 6).

Auf Grund dieser Überlegungen zeigt sich für Winkelnetze die fortgesetzte Netzmasche aus gleichseitigen Dreiecken ([9] und Erkenntnisse der Vergangenheit)

Tabelle 6

Gesichtspunkt	Winkelnetz (T2, Th. II)	Streckennetz (Geodimeter (DI 10))
	Fehlergesetze:	
	$\sigma = \sigma_{OR} \cdot s$	$\sigma = \sigma_{OS} \cdot (1 + s/7)$
	Fehlergesetze für Refraktion, meteorolog. Daten für beide Arten gleich (proport. Seite!)	
1.1 Minimale Punkt-lagefehler	Viele Überbestimmungen, möglichst kreisförmige Fehlerellipsen, deren Radien möglichst gleichgroß, mögl. kurze Visuren.	Viele Überbestimmungen, möglichst kreisförmige Fehlerellipsen, deren Radien möglichst gleichgroß.
1.2 Kreisförmige Fehlerellipsen	Möglichst gleichlange Visuren, gleichmäßig für jeden Punkt über Horizont verteilt, keine Refraktionsgefahr in Nähe der Punkte ( $> 5\% s$ ); gilt besonders für Innenrichtung.	Möglichst paarweise senkrechte oder gleichmäßig über Horizont verteilte Strecken, gleiche athm. Bedingungen über Horizont und Netz. Wiederholungsmessungen bei verschiedenen athm. Bedingungen.
1.3 Zuverlässigkeit	Jede Visur durch gleichwirkende Bestimmung (eine gleichlange entgegen gerichtete od. mehrere entsprech. andere) kontrolliert.  Notfalls Kontrolle durch senkrecht angreifende gleichwertige Strecke	Jede Strecke durch gleichwirkende Bestimmung (eine entgegen gerichtete, eine fast parallele oder entsprechende Kombination anderer) kontrolliert.  Bei Richtungen: Strecken senkrecht dazu. Bei Strecken: Strecken parallel dazu.
1.4 Abgeleitete Größen	Möglichst kreisförmige gleichgroße Fehlerellipsen, wenn Fehler der abgeleiteten Größe unabhängig von deren Richtung sein soll, d. h. wenn die abgeleiteten Größen nicht im vornhinein bekannt sind. Handelt es sich um eine oder höchstens wenige abgeleitete Größen, die man von vornhinein kennt, möglichst viele Messungen für die optimale Bestimmung dieser Größen (kann auch große Wiederholungszahl weniger Bestimmungen sein). Bei Strecken: Richtungen senkrecht dazu. Bei Richtungen: Richtungen parallel dazu.	Bei Richtungen: Strecken senkrecht dazu. Bei Strecken: Strecken parallel dazu.
1.5 Rationelle Messungen	Verwendung von Instrumenten hoher Leistungs- und geringer Einrichtungszeit. Auch viele Anschlußrichtungen (Orientierungen) zählen als Einrichtung! Bei Netzeinschaltung sind Orientierungen auf Altpunkten mit wachsender Netzgröße überflüssig. Kontrolle bzw. Errichtung von Signalen! Viele Standpunkte nicht einmal so ungünstig, da auch alle Anschluß-(Ziel-)punkte begangen werden müssen. Zeit-Wegplan: Standpunkte befahrbar.	Manche Geräte kompensieren die große Einrichtungszeit durch bessere Reichweite. Kosten der Erfassung meteorologischer Daten bei langen Strecken! Austeilen von Reflektoren!

und für Streckennetze das vollausgemessene Quadratnetz ([11]) vorteilhaft. Vielen Anforderungen werden auch photogrammetrisch bestimmte Netze mit signalisierten Neupunkten und großem Bildmaßstab gerecht.

## 2. Erweiterung der Aufgabenbereiche: Anforderungen steigen, Messungsgenauigkeit gleich

### 2.0 Netzausgleich statt Einzelausgleich

Gegenstand dieser Arbeit sind trigonometrische Gebrauchsnetze. Es soll daher nicht auf die großartigen Leistungen der Ausgleichsrechnung hinsichtlich Einbeziehung zusätzlicher Dimensionen, wie konsequente Behandlung räumlicher, globaler Netze ([29]) sowie der Zeit ([2], [30]) eingegangen werden.

Der Aufwand zur Bewältigung eines Normalgleichungssystems wächst annähernd mit der dritten Potenz der Anzahl der Unbekannten ([33]). . . .(2.0.1)

Dieser Umstand sowie die Undurchsichtigkeit gemeinsamer Punktbestimmung machte die Netzeinschaltung früher suspekt ([31]). Durch die Fortschritte der EDV hinsichtlich Kapazität und früher unbekanntem Methoden zur Inversion großer Matrizen bzw. schrittweiser Annäherung hat sich die Netzeinschaltung in einem Guß nunmehr voll durchgesetzt. Ihre Hauptvorteile gegen der Einzelpunkteinschaltung sind:

1) *Bessere Nachbargenauigkeit* der Neupunkte durch direkte Messung gegenseitiger Richtungen oder Strecken und Bildung der gemeinsamen Gewichtsreziprokenmatrix und Berechnung der relativen Fehlerellipsen beliebiger Punkte auch bei einfachen Ausgleichsmodellen. (Gemeinsame Gewichtsreziprokenmatrizen sind allerdings auch bei Einzelpunkteinschaltung möglich, wenn die Beobachtungen durch die Meßinstrumente oder Fehler gemeinsamer Fixpunkte korreliert sind [32]). (2.0.2)

2) Nicht nur „nulldimensionaler,“ Fortschritt Punkt für Punkt, sondern zügige „eindimensionale,“ Einschaltung (Polygonzüge) und „zweidimensionale“ Schaffung großer Festpunktfelder unter Zugrundelegung von *relativ immer weniger Fixpunkten* in Analogie zur photogrammetrischen Streifen- bzw. Blocktriangulation, doch mit viel weniger Rechenaufwand auch bei relativ anspruchsvollen Modellen der fehlertheoretischen Annahmen. . . .(2.0.3)

(Vgl. [10], Abb. 4: In der Mitte des 9 mal 9 Netzes sind die Fehlerellipsen für die Annahme  $s = 1$  km,  $\sigma_{OR} = \pm 6^{cc}4$  Kreise mit  $r = 1$  cm bei 77 Neupunkten auf 4 Altpunkte. Dieselbe Fehlerellipse unter den gleichen Genauigkeitsvoraussetzungen ergibt ein einfacher, rechtwinkliger Vorwärtsschnitt mit 1 Neupunkt auf 2 Altpunkte!).

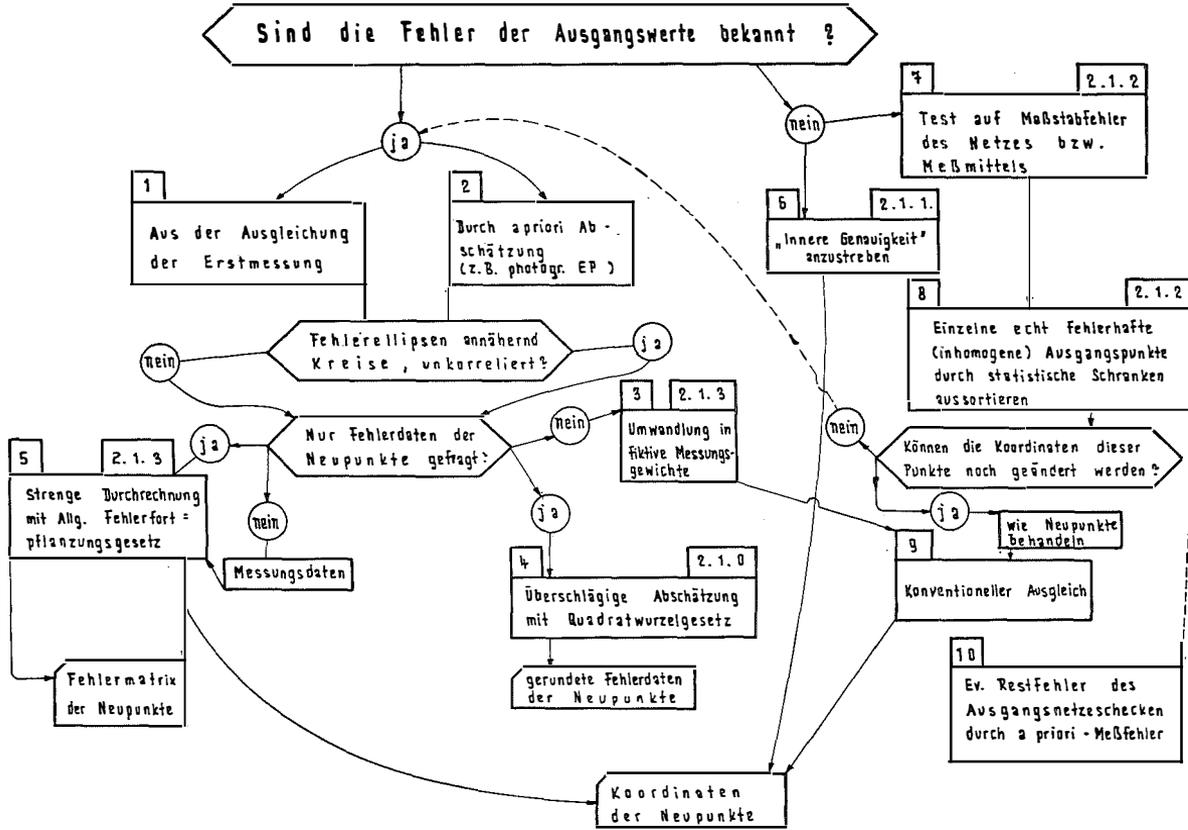
Tabelle 7 zeigt eine Interpretation von [10] als Gegenüberstellung Einzelausgleich-Netzausgleich am Beispiel quadratischer Netze (Seiten und Diagonalen gemessen) für (2.0.3):

Tabelle 7

	Winkelnetz $s_{\square} = 1$ km, $\sigma_{OR} = \pm 6^{cc}4$			Streckennetz $s_{\square} = 1$ km, $\sigma_{OS} = \pm (1\text{cm} + 0,15 \text{ cm/km})$		
Altpunkte	2	4	4	2	4	4
Neupunkte	1	5	77	1	5	77
Standpunkte	2	9	81	1	5	65
Messungen	4	48	602	2	20	321
Mittlerer Punktlagefehler* (cm)	1,4	0,9	1,5	1,4	1,3	2,0

\* der günstigst bestimmten Punkte; am Netzrand größer!

Abb. 4



Strenger Netzausgleich trägt auch zur Klärung theoretischer Probleme von Näherungsverfahren bei. Als Beispiel sei das „Kneißl'sche Paradoxon“ ([34] S. 583—585) erwähnt. In diesem geachteten und umfangreichen Band wird nicht mehr und nicht weniger nachgewiesen, als daß der Querfehler des Mittelpunktes bei einem seitigen, gestreckten Polygonzug mit beiderseitigem Richtungs- und Koordinatenanschluß durch *eine* Zwischenorientierung vergrößert würde! Daß dies unrichtig ist, ergibt sich außer der Erfahrung auch aus der Überlegung, daß in diesem Fall die angewandte Proportionalmethode einem strengen Ausgleich gleichkommt. Durch zusätzliche Beobachtungen kann aber das Ergebnis eines Ausgleichs nach der Methode der kleinsten Quadrate nicht verschlechtert werden, wenn die Anzahl der Unbekannten gleichbleibt. Der Beweis hierfür ist etwa in [12] zu finden.

Wo liegt nun die Ursache der Diskrepanz? Die formale Rechnung in [34] ist richtig. Einerseits wird dort aber bei der Zwischenvisur diese nicht als Richtung, sondern als gemeinsamer Schenkel *zweier* Winkel verwendet, weiters werden bei der Erstellung der Formel (11) auf S. 283 Vernachlässigungen gegen die Strenge hinsichtlich Weiterverwendung des Mittelpunktes begangen, welche allerdings in der Praxis auch manchmal vorkommen.

## 2.1 Fehler der Ausgangswerte

Mit der Auswirkung von Fehlern der eigentlich als fehlerfrei angenommenen Ausgangspunkte haben sich im deutschen Sprachraum vor allem ACKERL, dann GLEINSVIK und BEYER beschäftigt. Ihre Arbeiten leiten aus gegebenen Fehlerellipsen der Ausgangspunkte in klassischer Rechnung jene der Neupunkte ab, wobei nur der letztgenannte Autor zu ziffernmäßig leicht durchschaubaren Ergebnissen kommt.

Das Problem der Fehler von Ausgangswerten läßt sich wie folgt formulieren (Abb. 4).

Es ist klar, daß es sich hierbei immer um mittlere, nicht um wahre Fehler handelt. Wären die wahren Fehler a priori bekannt, wären nur die Ausgangswerte entsprechend zu verbessern. Ergeben sich wahre Fehler von Ausgangspunkten während der Rechnung (Pkt. 9 von Abb. 4), so sind diese als Neupunkte zu werten (vgl. 2.1.2 später). Können die fehlerhaften Koordinaten aus irgendwelchen meist organisatorischen Gründen oder der Netzhomogenität nicht mehr geändert werden, ist eine Zerlegung des Altpunktnetzes in Dreiecksmaschen und affine Transformation der eingeschalteten Punkte angeraten, wenn man einen strengen Ausgleich vermeiden will.

### 2.1.0 Überschlägige Berechnung der Auswirkung von Fehlern der Ausgangswerte

Sowohl durch die Weiterverwendung photogrammetrischer EP's für Katastermessungen, wobei die Meßmittel teilweise genauer als die Lage der Ausgangspunkte scheinen, wie auch von „gewöhnlichen“ staatlichen Fixpunkten für Ingenieurvermessungen hoher Genauigkeit wurde die Diskussion um die Auswirkung von Lagefehlern der Ausgangspunkte auf praktisch brauchbare Zahlenwerte gelenkt. Für das erste Problem kam [35], für das zweite [36] mit Anwendung von Differential-Fehler-

formeln für gewisse Vermessungsmethoden und quadratischer Fehleraddition zu dem Resultat, daß der Fehler des Ausgangspunktes in jenen des abgeleiteten Punktes bei einfacher Messung und Absteckung (Vorwärtsschnitt, Streckenschnitt, Rückwärtsschnitt, Polarmethode) mindestens voll eingeht, bei geometrisch ungünstiger Konfiguration aber einen noch größeren Anteil beisteuert! [32] kommt unter Anwendung des Allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes zum selben Resultat; die hier verwendete doppelte Polarmethode zeigt sich allen bisher genannten Verfahren deutlich überlegen. Während die mittleren Punktlagefehler der Neupunkte innerhalb eines Netzes natürlich nicht stark differieren, kann ihre Nachbargenauigkeit (Streckenfehler benachbarter Punkte) aber wesentlich bessere Werte annehmen als die Punkt-lagegenauigkeit.

### 2.1.1 Innere Genauigkeit

MEISSEL's Konzept der Inneren Genauigkeit ([7], [29]) eliminiert aus einem mit zufälligen Koordinatenfehlern behafteten Punktehaufen durch geeignete Matrizenoperationen gemeinsame Fehleranteile: Verschiebung, Verdrehung, Maßstab. Damit wird auch ein gemeinsamer Einfluß vom Fixpunktnetz her ausgeschaltet, und zwar mittels einer Art überbestimmter Ähnlichkeitstransformation. Das Verfahren fand Anwendung bei der Konzeption sowohl ebener Streckennetze ([8]) als auch räumlicher Netze für Satellittriangulierungen ([29]).

### 2.1.2 Aufsuchen fehlerhafter Ausgangswerte

Als erste Maßnahme möge die Untersuchung auf Maßstabfehler des Netzes gegenüber dem Aufnahmemedium gelten. Ein einschlägiges Rechenprogramm ist bekannt ([37]), Bedingung eine entsprechende Anzahl von Streckenmessungen. Das Ergebnis ist vorerst relativ und nur auf das gegenständliche Netz bzw. die einheitlich reduzierten Messungen bezogen. Rein gefühlsmäßig könnte man nun auf Grund von Messungswidersprüchen und Überschreitung von Fehlergrenzen bei kontrollierter Messung jene Altpunkte als fehlerhaft ausscheiden, auf welche diese Widersprüche, Überlegungen gemäß [35] oder Bedenken hinsichtlich Identität der Stabilisierung hinweisen. Dies ist aber höchstens bei Zwischenpunkten in Polygonzügen zulässig, welche z. B. in einer Richtung eine positive, in der anderen eine negative Überschreitung der Längsfehlergrenze bewirken würden, deren Nichtbeachtung den gesamten Zug aber nachweislich und kontrolliert innerhalb der erwarteten Schranken abschließen lassen.

Bei irgendwelchen höheren Genauigkeitsansprüchen ist aber folgende, von MEISSEL vorgeschlagene Methode ratsam, welche allerdings der technischen Verantwortung entsprechende Überbestimmungen verlangt ([38]):

Das gesamte Netz mit vorerst allen Fixpunkten wird durchgerechnet und ausgeglichen. Überschreitet der mittlere Fehler  $\hat{\sigma}$  der Gewichtseinheit aus dem Ausgleich signifikant (F-Test, siehe Abschnitt 4.1) jenen a priori ( $\sigma_0$ , aus Erfahrung und Vergleichsmessungen), so liegt offensichtlich ein Modellfehler vor, der hier als Annahme eines fehlerhaften Punktes als fehlerfrei interpretiert wird. Nun werden auf Grund der Messungswidersprüche gefühlsmäßig jene Festpunkte ausgesucht, welche diesen Modellfehler bewirkt haben könnten. Diese werden einzeln als Neupunkte  $k$  gesetzt,

$\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_{-k}^2$  gegen  $\hat{\sigma}^2$  auf Signifikanz geprüft. Welches Fixpunktes Ausscheidung eine statistisch nachweisbare Verbesserung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit aus dem Ausgleich ergibt, wird als Neupunkt endgültig berechnet, d. h. man setzt das Verfahren entweder Punkt um Punkt fort, bis die Weglassung eines Fixpunktes keine signifikanten Restsummenverbesserungen ergibt, oder aber  $\hat{\sigma}$  sich von  $\sigma_0$  nicht mehr signifikant unterscheidet. Dies bleibt dem jeweiligen Problem überlassen.

### 2.1.3 Ausgleich von Messungen mit fehlerhaften Ausgangswerten

Trifft die Bedingung gemäß Pkt. 3 aus Abb. 4 zu, kann man bei Richtungsmessungen, wie in [17] und [34] beschrieben, die Beobachtungsgewichte ansetzen zu

$$p_R = \text{const.} * (\sigma_{OR} + \rho^2 \frac{\sigma_{OP}^2}{2s^2})^{-1}, \text{ wenn in der Visur 1 Altpunkt,}$$

$$p_R = \text{const.} * (\sigma_{OR}^2 + \rho^2 \frac{\sigma_{OP}^2}{s^2})^{-1}, \text{ wenn in der Visur 2 Altpunkte vorkommen (2.1.3.1)}$$

wobei  $\sigma_{OR}$  der mittlere Richtungsfehler a priori,  $\sigma_{OP}$  die mittleren Punktlagefehler a priori der Altpunkte (bei kreisförmigen unkorrelierten Fehlerellipsen, die aber verschieden groß sein können, Achtung beim Einsetzen) und  $s$  die Visurlängen sind.

Analog dazu kann man bei Streckenmessungen zu Altpunkten setzen:

$$p_S = \text{const.} * (\sigma_{OS}^2 + \sigma_{OP}^2/2)^{-1} \quad \dots (2.1.3.2)$$

Mit diesen Gewichten kann konventionell ausgeglichen werden. Das Verfahren ist einfach, doch nicht streng: die relativen Fehlerdaten der Neupunkte gegeneinander (Kovarianzen) werden falsch bestimmt, da nicht mitgeführt wird, ob verschiedene Neupunkte nicht von ein und denselben Altpunkten bestimmt wurden!

Falls also aus dem Ausgleichsergebnis Fehler abgeleiteter Funktionen berechnet werden sollen (vgl. 1.4) oder gar die restlichen Voraussetzungen nicht zutreffen, ist eigentlich ungefähr von Fehlerbeträgen der Ausgangspunkte an, welche in ihrer Dimension der Genauigkeit der abgeleiteten Größen gleichen, ein strenger Ausgleich auf Grund des Allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes (1.4.1) durchzuführen; dies wird meist auf Grund mangelnder Informationen über die Fehlerdaten der Ausgangspunkte und mangels Rechenprogrammen unterlassen.

Gemäß [39], welche Arbeit leider auf das Cholesky-Reduktionsschema zugeschnitten ist, ist dieser Ausgleich gemäß folgendem Ansatz durchzuführen:

Sei  $\mathbf{A}$  die Koeffizientenmatrix der Unbekannten  $\mathbf{x}$ , so ist  $\mathbf{B}$  die auf dieselbe Art wie  $\mathbf{A}$  gebildete Koeffizientenmatrix der Fixpunkte  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{M}_y$  die gegebene Kovarianzmatrix (Fehlermatrix) der Fixpunkte (aus vorangegangenem Ausgleich oder Abschätzung), so lauten die vollständigen Verbesserungsgleichungen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{By} - \mathbf{l} \quad \dots (2.1.3.3)$$

Gesucht ist nun die echte Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  der Beobachtungen, welche die allgemeine Minimumsbedingung nach der Methode der kleinsten Quadrate  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$  (2.1.3.4)

vermitteln (analog zu  $[p_{vv}] = \min$ ).  $\mathbf{P}$  ist hier voll besetzt!

In (2.1.3.4) wird (2.1.3.3) eingesetzt, nach den  $x$  abgeleitet und Null gesetzt. ( $y$  sind keine Variable). Dies ergibt

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} x = \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{1} - \mathbf{B} y) \quad \dots(2.1.3.5)$$

Die Kovarianzmatrix der Messungen wird gemäß dem Allgemeinen Fehlerforpflanzungsgesetz für den Vektor

$$\mathbf{1} - \mathbf{B} y \text{ zu } \mathbf{H} = \mathbf{G} + \mathbf{B} \mathbf{M}_y \mathbf{B}^T \quad \dots(2.1.3.6)$$

$$\text{mit } \mathbf{P} = \mathbf{H}^{-1} \quad \dots(2.1.3.7)$$

$$\text{werden die Normalgleichungen } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} x = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \quad \dots(2.1.3.8)$$

wie 2.1.3.5), nur ist  $y$  eigentlich der Nullvektor, er wurde nur für die Ableitungen benötigt.

Die Formeln (2.1.3.6) bis (2.1.3.8) geben mit den vorausgesetzten Vereinfachungen auch (2.1.3.1) und (2.1.3.2), wieder mit den späteren Einschränkungen über Kovarianzen – in den strengen Formeln sind diese durch die volle Besetzung von  $\mathbf{P}$  aus (2.1.3.6) her enthalten.  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  sind quadratische Matrizen mit soviel Zeilen und Spalten wie Beobachtungen.  $\mathbf{B}$  hat so viele Zeilen wie Beobachtungen und so viele Spalten wie Fixpunktskoordinaten (vgl. Abb. 5).

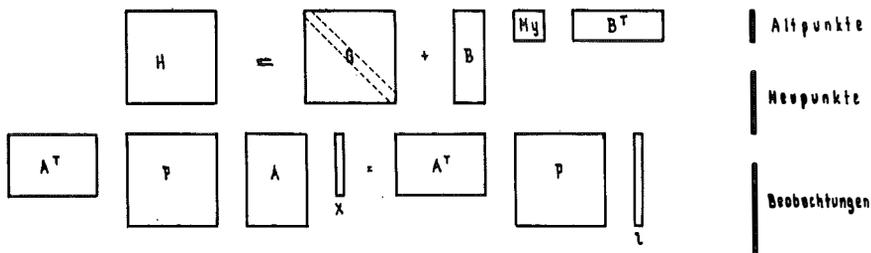


Abb. 5

Durch die vorliegenden Formeln (2.1.3.6), (2.1.3.7) sind die gesuchten strengen Fehlerberechnungen gegeben, durch (2.1.3.8) die Neupunktskoordinaten.

Wann welcher der in Abbildung 4 gezeigten Algorithmen anzuwenden ist, haben die Möglichkeiten, die Genauigkeitsanforderungen bzw. ein gemäß Abb. 4 zu erstellendes Vorprogramm zu entscheiden.

(wird fortgesetzt)

### Verzeichnis der wichtigsten Formelgrößen

- B** Koeffizientenmatrix bezüglich der Fixpunkte, gebildet auf dieselbe Art wie die Koeffizientenmatrix bezüglich der Neupunkte (Gauß'sche Richtungskoeffizienten usw.)
- const konstante Größe
- f Funktion der Ergebnisse einer Ausgleichung (Vektor)

<b>F</b>	Koeffizientenmatrix von $x$ in $f = Fx$ . Die Linearität ist gegeben oder durch Taylorentwicklung erreicht.
<b>H</b>	Kovarianzmatrix der Beobachtungen einschließlich der Fixpunkte ( $G$ ist jene der Messungen für sich, vgl. ÖZfV Jg. 1970, S. 153).
<b>k</b>	Vektor der Lagrange'schen Multiplikatoren
<b><math>M_y</math></b>	Kovarianzmatrix der Fixpunkte
$p_R$	Richtungsgewicht
$p_S$	Streckengewicht
<b><math>Q(f)</math></b>	Gewichtskoeffizientenmatrix von $f$
$\sigma_{OP}$	mittlerer Punktlagefehler der Fixpunkte a priori
$\sigma_{OR}$	mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung a priori
$\sigma_{OS}$	mittlerer Fehler einer beobachteten Strecke a priori
<b>y</b>	Vektor der (fehlerbehafteten) Fixpunkte

#### Literatur

- [22] *Reissmann*: Die Ausgleichsrechnung. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1968.
- [23] *Kovarik*: Wird die Genauigkeit von Einzelmodellauswertungen durch die rechnerische Transformation der Maschinenkoordinaten beeinträchtigt? ÖZfV 1966, S. 146ff.
- [24] *Gotthardt*: Einführung in die Ausgleichsrechnung. Wichmann 1968.
- [25] *Kubik*: Unabhängigkeit und schwache Abhängigkeit der Funktionen ausgeglichener Größen von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen. ÖZfV 1966, Hefte 3 und 4.
- [26] *Köhr*: Über die optimale Programmierung von Messungen. ZfV 1966, S. 105–116.
- [27] *Vajda*: Theorie der Spiele und Linearprogrammierung. De Gruyter 1962.
- [28] *Köhr*: Optimierung von Messungen auf Kostengrundlage. ZfV 1967, S. 92–97.
- [29] *Rinner, Killian, Meissl*: Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum. DGK Reihe A, Heft 61.
- [30] *Aeschlimann*: Zur Genauigkeit von Invardraht- und Mekometermessungen . . . Vortrag, gehalten an der TH Graz, April 1970.
- [31] Äußerung des k. k. Triangulierungs- und Calculbureaus zu den . . . Gutachten, betreffend die Neutriangulierung des Gebietes der im Reichsrat vertretenen Königreiche und Länder. Wien 1909.
- [32] *Peters*: Nachbargenauigkeit und Kataster. Dissertation an der TH Wien, 1969.
- [33] *Zurmühl*: Praktische Mathematik . . . 4. Aufl., Springer 1963.
- [34] *Jordan, Eggert, Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, Band II: Feld- und Landvermessung, 10. Auflage, Stuttgart 1963.
- [35] *Smetana*: Studie über terrestrische Reambulierung photogrammetrisch bestimmter Einschaltpunktfelder. ÖZfV Heft 1, 2/1970.
- [36] *Vosika*: Genauigkeit der Detailabsteckung. Vortrag auf der Internationalen Konferenz über Netzverdichtung, Budapest 1970.
- [37] *Zeger*: Gemeinsame Ausgleichungen von Richtungs- und Streckennetzen. ÖZfV Heft 1/1964.
- [38] *Meissl*: Ausgleichsrechnung und Mathematische Statistik. Vortrag, gehalten am 14. 1. 1969 an der TH Wien.
- [39] *Ussisoo*: Berechnung mit Fehlervektoren. AVN 1970, Heft 6, S. 224–236.

## Studie über Distomatmessungen

Von *Josef Spindler*, Ried im Innkreis

In der Folge wird in einem Testnetz nächst der Ortschaft Pattigham im Bezirk Ried im Innkreis, OÖ, die Genauigkeit des INFRAROTDISTANZMESSERS