

Paper-ID: VGI\_197014



## Dreidimensionale Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid

Karl Ramsayer <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Stuttgart, Technische Hochschule, Keplerstraße 1 1*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **58** (5), S. 137–145

1970

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ramsayer_VGI_197014,  
  Title = {Dreidimensionale Koordinaten{"u}bertragung auf dem Ellipsoid},  
  Author = {Ramsayer, Karl},  
  Journal = {"0sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {137--145},  
  Number = {5},  
  Year = {1970},  
  Volume = {58}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN  
Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

## REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,  
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und  
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende Oktober 1970

58. Jg.

---

## Dreidimensionale Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid

Von *Karl Ramsayer*, Stuttgart

### *Summary:*

For the rigorous determination of the spheroidal coordinates (latitude, longitude and altitude) of a set of reference points the methods of three dimensional geodesy should be applied. These methods can be simplified essentially, if — as it is usually done — the influence of the deflections of the verticals is neglected. For this case rigorous formulae are derived for the transfer of spheroidal coordinates and azimuth, if slant range, azimuth and vertical angle in the initial point are given, resp. for the calculation of slant range, azimuth and vertical angle from the spheroidal coordinates of two points. The new formulae are tested by a numerical example.

### 1. *Einleitung*

Zur strengen Koordinierung eines Festpunktfeldes auf einem Referenzellipsoid sind die Methoden der dreidimensionalen Geodäsie [1, 2, 3, 4, 5] anzuwenden, d. h. es sind außer den üblichen Horizontalwinkel- und Streckenmessungen noch zusätzlich Höhenwinkelmessungen und astronomische Breiten-, Längen- und Azimutbestimmungen auszuführen. Der praktischen Anwendung dieser Methoden steht hauptsächlich der wesentlich erhöhte Meßaufwand entgegen, der insbesondere durch die große Zahl der erforderlichen astronomischen Beobachtungen bedingt ist. Die geringe Genauigkeit der Höhenwinkelmessungen ist kein entscheidender Hinderungsgrund, da die Lagegenauigkeit der Netzkpunkte dadurch nur unwesentlich beeinflusst wird, und die Bestimmung ellipsoidischer Höhen aus Höhenwinkeln und astronomischen Beobachtungen immer noch wesentlich genauer ist, als die Ableitung aus Nivellements und Geoidbestimmungen.

Verzichten wir auf die Berücksichtigung der Lotabweichungen oder, anders ausgedrückt, unterstellen wir, daß die wahren Lotrichtungen Normalen des Bezugs-

ellipsoids sind, so können wir die astronomischen Beobachtungen wie bisher üblich auf den Zentralpunkt und etwaige Laplacepunkte beschränken. Dadurch wird eine vereinfachte dreidimensionale Berechnung möglich. Diese liefert zwar im Vergleich zur klassischen zweidimensionalen Netzberechnung auf dem Ellipsoid keine größere Genauigkeit, hat jedoch den Vorteil, daß Netzteile mit großen Lotabweichungen (Gebirge) ohne Übergangsschwierigkeiten durch zusätzliche astronomische Beobachtungen streng dreidimensional koordiniert werden können. Weitere Vorteile sind, daß gemessene Raumstrecken und Horizontalwinkel unmittelbar, also ohne Reduktion auf das Ellipsoid, verwendet werden können und daß, wenn wir von der Vernachlässigung der Lotabweichungen absehen, eine strenge Koordinatenübertragung möglich wird.

Da im Rahmen dieser Veröffentlichung alle aus der dreidimensionalen Berechnung auf dem Ellipsoid sich ergebenden Möglichkeiten nicht behandelt werden können, soll nachstehend nur auf die beiden Hauptaufgaben der dreidimensionalen Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid eingegangen werden.

## 2. Die erste Hauptaufgabe der dreidimensionalen Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid mit Hilfe von Breiten- und Längswinkel

Gegeben sind die ellipsoidischen Raumkoordinaten eines Punktes  $P_1$ , nämlich die geographische Breite  $B_1$ , die geographische Länge  $L_1$  und die ellipsoidische Höhe  $H_1$ , ferner das ellipsoidische Azimut  $A_{10}$  einer Anschlußrichtung  $P_1P_0$ . Gemessen wurden die räumliche Entfernung  $\bar{d}_{12}$  von  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$ , der Höhenwinkel  $\beta_{12}$  der Strecke  $P_1P_2$  und der Horizontalwinkel  $\gamma_1$  zwischen den Strecken  $P_1P_0$  und  $P_1P_2$ . Gesucht werden die Koordinaten  $B_2, L_2, H_2$  von  $P_2$  und das Gegenazimut  $A_{21}$ . Der Einfluß der Lotabweichungen darf vernachlässigt werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe berechnen wir die Koordinaten von  $P_1$  und die Richtung von  $P_1P_2$  im geozentrischen Koordinatensystem. Dann berechnen wir die geozentrischen Koordinaten von  $P_2$  und das Azimut  $A_{21}$  der Raumstrecke  $P_2P_1$ . Schließlich werden die geozentrischen Koordinaten von  $P_2$  in ellipsoidische Koordinaten umgerechnet.

Im einzelnen ergibt sich folgender Rechengang:

Die geozentrischen Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  von  $P_1$  ergeben sich streng aus

$$\begin{aligned} x_1 &= (N_1 + H_1) \cdot \cos B_1 \cdot \cos L_1, & y_1 &= (N_1 + H_1) \cdot \cos B_1 \cdot \sin L_1, \\ z_1 &= (N_1 (1 - e^2) + H_1) \cdot \sin B_1, \\ N_1 &= \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cdot \cos^2 B_1}}, & \dots & (2.1) \end{aligned}$$

$N_1$  = Querkrümmungsradius in der Breite  $B_1$ ,  $c$  = Polarradius,  $e$  bzw.  $e'$  = erste bzw. zweite numerische Exzentrizität des Referenzellipsoids.

Die „geozentrischen Richtungen“ der Raumstrecke  $P_1P_2$  lassen sich an Hand von Bild 1 berechnen. Hier ist die Himmelskugel dargestellt, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt 0 des Referenzellipsoids zusammenfällt. Ihr Radius wird gleich unendlich gesetzt, damit die terrestrischen Exzentrizitäten der verschiedenen Rich-

tungen keinen Einfluß haben.  $P_n$  ist der Schnittpunkt des verlängerten Nordzweiger der Rotationsachse des Ellipsoids mit der Himmelskugel, also der Himmelsnordpol.  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_{Gr}$  sind die ellipsoidischen Zenitpunkte, d. h. die Schnittpunkte des Ellipsoidnormalen der Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und der Greenwicher Sternwarte mit der Himmelskugel.  $T_1$  und  $T_2$  sind die Schnittpunkte der verlängerten Geraden  $P_1P_2$  mit der Himmelskugel.

In Bild 1 sind auch die Achsen des geozentrischen Koordinatensystems eingezeichnet. Der Ursprung fällt mit  $O$  zusammen. Die positive  $z$ -Achse entspricht dem Nordzweig der Rotationsachse des Ellipsoids. Die  $x$ -Achse ist durch den Schnitt der Greenwicher Meridianebene mit der Äquatorebene festgelegt. Die positive  $y$ -Achse weist nach Osten.

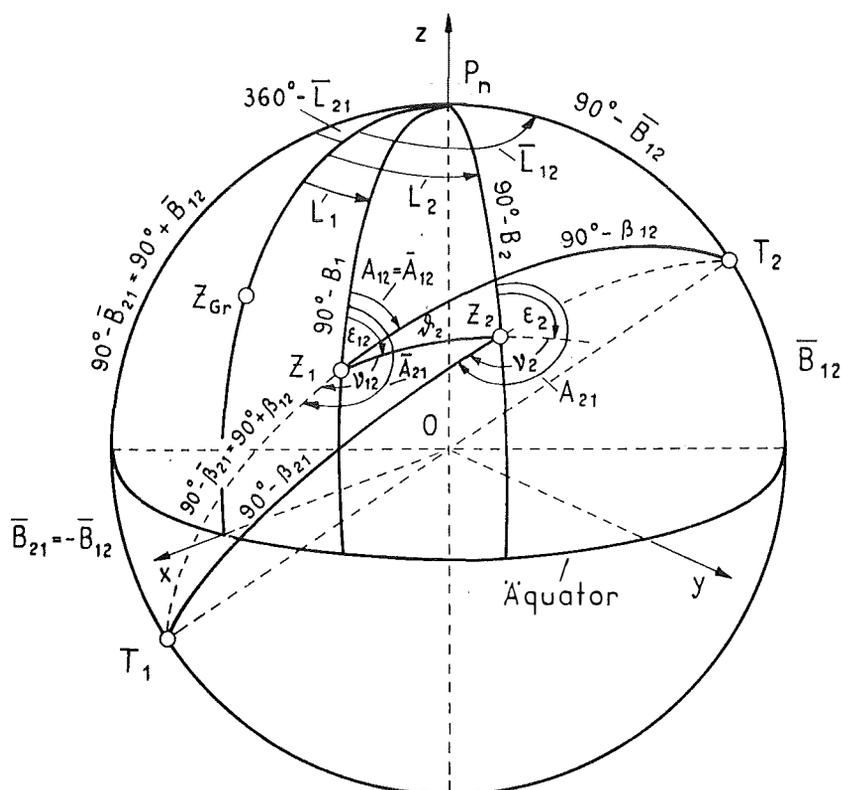


Abb. 1

Die Zenitpunkte  $Z_1$  und  $Z_2$  haben die Poldistanzen  $(90^\circ - B_1)$  und  $(90^\circ - B_2)$  und die geographischen Längen  $L_1$  und  $L_2$ .  $T_2$  hat bezogen auf den Zenit  $Z_1$  die Zenitdistanz  $(90^\circ - \beta_{12})$  und das Azimut  $A_{12}$ . Diese Werte entsprechen der auf die Ellipsoidnormale bezogenen Zenitdistanz bzw. dem auf den ellipsoidischen Horizont von  $P_1$  bezogenen Höhenwinkel  $\beta_{12}$  und dem ellipsoidischen Azimut der Geraden von  $P_1$  nach  $P_2$ .  $T_1$  hat bezogen auf den Zenit  $Z_2$  die Zenitdistanz  $(90^\circ - \beta_{21})$  und das Azimut  $A_{21}$ . Diese Werte entsprechen der Zenitdistanz bzw. dem Azimut der Geraden von  $P_2$  nach  $P_1$ .

Im geozentrischen Bezugssystem legen wir die Richtung der Geraden  $P_1P_2$  bzw. ihrer Verlängerung  $T_1T_2$  durch ihren „Breitenwinkel“  $\bar{B}_{12}$  und ihren „Längenwinkel“  $\bar{L}_{12}$  fest. Dabei verstehen wir unter dem Breitenwinkel  $\bar{B}_{12}$  den Winkel zwischen der Geraden  $P_1P_2$  bzw.  $T_1T_2$  und der Äquatorebene.  $\bar{B}_{12}$  ist positiv, wenn der von  $P_1$  aus auf die Himmelskugel projizierte Punkt  $P_2$ , also  $T_2$ , auf der Nordhälfte der Himmelskugel liegt. Die Poldistanz von  $T_2$  ist demnach  $(90^\circ - \bar{B}_{12})$ . Der Längenwinkel  $\bar{L}_{12}$  entspricht dem Winkel zwischen der Greenwicher Meridianebene und der Ebene durch die Gerade  $P_1P_2$  bzw.  $T_1T_2$ , die parallel zur Rotationsachse des Ellipsoids verläuft. Schneiden wir diese Ebene mit der Himmelskugel, so erhalten wir den Großkreis  $T_1P_nT_2$ .  $T_2$  hat demnach die Länge  $\bar{L}_{12}$ , die wir vom Greenwicher Meridian aus nach Osten von  $0^\circ \dots 360^\circ$  durchzählen. Der Projektionspunkt  $T_1$  (Projektion von  $P_1$  auf die Himmelskugel von  $P_2$  aus) hat die geographische Breite  $\bar{B}_{21}$  und die geographische Länge  $\bar{L}_{21}$ . Diese Werte entsprechen dem Breiten- bzw. Längenwinkel der Geraden  $P_2P_1$ . Da die Projektionspunkte  $T_1$  und  $T_2$  sich diametral gegenüberliegen, gelten die Beziehungen

$$\bar{B}_{21} = -\bar{B}_{12}, \quad \bar{L}_{21} = \bar{L}_{12} \pm 180^\circ. \quad \dots (2.2)$$

In dem Dreieck  $Z_1P_nT_2$  sind bekannt die beiden Seiten  $(90^\circ - B_1)$  und  $(90^\circ - \beta_{12})$  sowie das Azimut

$$A_{12} = A_{10} + \gamma_1. \quad \dots (2.3)$$

Damit können wir die Breite  $\bar{B}_{12}$  und die Länge  $\bar{L}_{12}$  von  $T_2$  berechnen aus

$$\sin \bar{B}_{12} = \sin B_1 \cdot \sin \beta_{12} + \cos B_1 \cdot \cos \beta_{12} \cdot \cos A_{12}, \quad \dots (2.4)$$

$$\operatorname{tg}(\bar{L}_{12} - L_1) = \frac{\sin A_{12}}{\cos B_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_{12} - \sin B_1 \cdot \cos A_{12}}, \quad \dots (2.5)$$

$$\bar{L}_{12} = L_1 + (\bar{L}_{12} - L_1). \quad \dots (2.6)$$

Nunmehr lassen sich die geozentrischen Koordinaten von  $P_2$  leicht berechnen aus

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \bar{d}_{12} \cdot \cos \bar{B}_{12} \cdot \cos \bar{L}_{12}, \\ y_2 &= y_1 + \bar{d}_{12} \cdot \cos \bar{B}_{12} \cdot \sin \bar{L}_{12}, \\ z_2 &= z_1 + \bar{d}_{12} \cdot \sin \bar{B}_{12}. \end{aligned} \quad \dots (2.7)$$

Anschließend berechnen wir aus  $x_2, y_2, z_2$  nach einem der bekannten Verfahren (vgl. z. B. [6] S. 535/36) die ellipsoidischen Koordinaten  $B_2, L_2, H_2$ .

Nach der Berechnung von  $B_2$  und  $L_2$  sind im Dreieck  $T_1P_nZ_2$  die Seiten  $P_nT_1 = 90^\circ - \bar{B}_{21} = 90^\circ + \bar{B}_{12}$ ,  $P_nZ_2 = 90^\circ - B_2$  und der eingeschlossene Winkel

$$T_1P_nZ_2 = L_2 + (360^\circ - \bar{L}_{21}) = L_2 - \bar{L}_{12} + 180^\circ$$

bekannt. Dabei ist zu beachten, daß in Bild 1  $\bar{B}_{21}$  negativ ist. Damit können wir das Gegenazimut  $A_{21}$  berechnen aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A_{21} &= \frac{\sin(\bar{L}_{21} - L_2)}{\cos B_2 \cdot \operatorname{tg} \bar{B}_{21} - \sin B_2 \cdot \cos(\bar{L}_{21} - L_2)} = \\ &= \frac{\sin(L_2 - \bar{L}_{12})}{-\cos B_2 \cdot \operatorname{tg} \bar{B}_{12} + \sin B_2 \cdot \cos(L_2 - \bar{L}_{12})}. \end{aligned} \quad \dots (2.8)$$

### 3. Die erste Hauptaufgabe der dreidimensionalen Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid mit Hilfe von lokalen kartesischen Koordinaten

Die erste Hauptaufgabe läßt sich auch dadurch lösen, daß wir ein lokales kartesisches Koordinatensystem einführen, die lokalen Koordinaten von  $P_2$  berechnen und diese anschließend in geozentrische und dann in ellipsoidische Koordinaten umrechnen. Die dazu notwendigen Rechenformeln können wir aus den Formeln zur Berechnung eines dreidimensionalen Polygonzugs in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem [7] leicht ableiten, indem wir die astronomischen Breiten, Längen und Azimute durch die entsprechenden ellipsoidischen Größen ersetzen.

Im einzelnen gestaltet sich die Berechnung wie folgt: Wir führen ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $(x', y', z')$  mit dem Ursprung in  $P_1$  ein, dessen  $z'$ -Achse mit der ellipsoidischen Zenitrichtung in  $P_1$ , d. h. mit der Ellipsoidnormalen in  $P_1$  mit den Richtungswinkeln  $B_1, L_1$  zusammenfällt. Die in der Tangentialebene an das Ellipsoid in  $P_1$  liegende positive  $x'$ -Achse weise nach Norden, die positive  $y'$ -Achse nach Osten. Hier bestehen zwischen dem auf das lokale System reduzierten Azimut  $\bar{A}_{12}$  und dem reduzierten Höhenwinkel  $\bar{\beta}_{12}$  der Strecke  $P_1P_2$  und den entsprechenden ellipsoidischen Größen  $A_{12}, \beta_{12}$  die trivialen Beziehungen

$$\bar{A}_{12} = A_{12}, \quad \bar{\beta}_{12} = \beta_{12}. \quad \dots (3.1)$$

Die lokalen Koordinaten von  $P_2$  ergeben sich demnach aus

$$x_2' = \bar{d}_{12} \cdot \cos \beta_{12} \cdot \cos A_{12}, \quad y_2' = \bar{d}_{12} \cdot \cos \beta_{12} \cdot \sin A_{12}, \quad z_2' = \bar{d}_{12} \cdot \sin \beta_{12}. \quad \dots (3.2)$$

Diese Koordinaten lassen sich entsprechend [4] S. 22 in geozentrische Koordinaten  $x_2, y_2, z_2$  umrechnen mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - (x_2' \cdot \sin B_1 - z_2' \cdot \cos B_1) \cdot \cos L_1 - y_2' \cdot \sin L_1, \\ y_2 &= y_1 - (x_2' \cdot \sin B_1 - z_2' \cdot \cos B_1) \cdot \sin L_1 + y_2' \cdot \cos L_1, \\ z_2 &= z_1 + x_2' \cdot \cos B_1 + z_2' \cdot \sin B_1. \end{aligned} \quad \dots (3.3)$$

Die geozentrischen Koordinaten werden dann wieder in ellipsoidische Koordinaten  $B_2, L_2, H_2$  umgerechnet.

Das Gegenazimut  $A_{21}$  kann entsprechend den Ausführungen zur Berechnung des astronomischen Azimuts bei gegebenem reduziertem Azimut in [7] und nach Bild 1 wie folgt berechnet werden: Wir berechnen zunächst im Dreieck  $Z_1P_nZ_2$  aus  $(90^\circ - B_1), (90^\circ - B_2)$  und  $(L_2 - L_1)$  die Größen  $\vartheta_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_2$  mit Hilfe der Gleichungen

$$\cos \vartheta_2 = \sin B_1 \cdot \sin B_2 + \cos B_1 \cdot \cos B_2 \cdot \cos (L_2 - L_1) \quad \dots (3.4)$$

oder für kleine  $\vartheta_2$

$$\vartheta_2 \approx \sqrt{(B_2 - B_1)^2 + (L_2 - L_1)^2 \cdot \cos B_1 \cdot \cos B_2}, \quad \dots (3.4a)$$

$$\operatorname{ctg} \varepsilon_{12} = \frac{\cos B_1 \cdot \operatorname{tg} B_2 - \sin B_1 \cdot \cos (L_2 - L_1)}{\sin (L_2 - L_1)}, \quad \dots (3.5)$$

$$\operatorname{ctg} \varepsilon_2 = \frac{\sin B_2 \cdot \cos (L_2 - L_1) - \cos B_2 \cdot \operatorname{tg} B_1}{\sin (L_2 - L_1)}. \quad \dots (3.6)$$

Dann berechnen wir

$$\nu_{12} = \bar{A}_{21} - \varepsilon_{12} = A_{12} \pm 180^\circ - \varepsilon_{12}. \quad \dots (3.7)$$

Damit sind im Dreieck  $T_1Z_1Z_2$  die Seite  $Z_1Z_2 = \vartheta_2$  und der Winkel  $\nu_{12}$  bekannt. Beachten wir, daß auch die Seite

$$T_1Z_1 = 90^\circ - \bar{\beta}_{21} = 90^\circ + \beta_{12},$$

die der auf den Zenit  $Z_1$  reduzierten Zenitdistanz der Richtung von  $P_2$  nach  $P_1$  entspricht, aus dem gemessenen Höhenwinkel  $\beta_{12}$  leicht berechnet werden kann, so sind wir in der Lage, auch den Winkel  $\nu_2$  aus

$$\operatorname{ctg} \nu_2 = \frac{\cos \vartheta_2 \cdot \cos \nu_{12} + \sin \vartheta_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_{12}}{\sin \nu_{12}} \quad \dots (3.8)$$

zu berechnen. Das Gegenazimut  $A_{21}$  ergibt sich dann aus

$$A_{21} = \varepsilon_2 + \nu_2. \quad \dots (3.9)$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Azimute  $A_{12}$  und  $A_{21}$  der Raumstrecke  $P_1P_2$  den Azimuten der Normalschnitte entsprechen, die von den Normalebene in  $P_1$  durch  $P_2$  bzw. in  $P_2$  durch  $P_1$  aus dem Ellipsoid ausgeschnitten werden.

#### 4. Die zweite Hauptaufgabe der dreidimensionalen Koordinatenübertragung auf dem Ellipsoid

Bei der zweiten Hauptaufgabe sind aus den gegebenen ellipsoidischen Koordinaten  $B_1, L_1, H_1$ , und  $B_2, L_2, H_2$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  die Raumstrecke  $\bar{d}_{12}$  und die Azimute  $A_{12}$  und  $A_{21}$  zu berechnen. Zur Ermittlung der Strecke  $\bar{d}_{12}$  berechnen wir zunächst die geozentrischen Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  von  $P_1$  und  $P_2$  entsprechend (2.1). Dann ergibt sich die gesuchte Strecke aus

$$\bar{d}_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad \dots (4.1)$$

Anschließend berechnen wir den Breitenwinkel  $\bar{B}_{12}$  und den Längenwinkel  $\bar{L}_{12}$  von  $P_1P_2$  entsprechend (2.7) aus

$$\operatorname{tg} \bar{L}_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \operatorname{tg} \bar{B}_{12} = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} \cdot \sin \bar{L}_{12} \quad \text{oder} \quad \sin \bar{B}_{12} = \frac{z_2 - z_1}{\bar{d}_{12}}. \quad \dots (4.2)$$

Damit sind im Dreieck  $Z_1P_nT_2$ , Bild 1, die Seiten  $(90^\circ - B_1)$ ,  $(90^\circ - \bar{B}_{12})$  und der eingeschlossene Winkel  $(\bar{L}_{12} - L_1)$  bekannt. Das Azimut  $A_{12}$  läßt sich also berechnen aus

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{\cos B_1 \cdot \operatorname{tg} \bar{B}_{12} - \sin B_1 \cdot \cos(\bar{L}_{12} - L_1)}{\sin(\bar{L}_{12} - L_1)}. \quad \dots (4.3)$$

Das Gegenazimut  $A_{21}$  kann wieder aus (2.8) berechnet werden.

Wir können auch noch die Höhenwinkel  $\beta_{12}$  und  $\beta_{21}$  der Richtung  $P_1P_2$  bzw.  $P_2P_1$  berechnen. Wir erhalten aus Dreieck  $Z_1P_nT_2$ , Bild 1,

$$\sin \beta_{12} = \sin B_1 \cdot \sin \bar{B}_{12} + \cos B_1 \cdot \cos \bar{B}_{12} \cdot \cos(\bar{L}_{12} - L_1) \quad \dots (4.4)$$

und aus Dreieck  $Z_2T_1P_n$

$$\sin \beta_{21} = \sin B_2 \cdot \sin \bar{B}_{21} + \cos B_2 \cdot \cos \bar{B}_{21} \cdot \cos(\bar{L}_{21} - L_2). \quad \dots (4.5)$$

Dabei ist nach (2.2)

$$\bar{B}_{21} = -\bar{B}_{12}, \quad \bar{L}_{21} = \bar{L}_{12} \pm 180^\circ. \quad \dots (4.6)$$

Die Formeln zur Berechnung der Azimute und Höhenwinkel der Raumstrecke  $P_1P_2$  lassen sich auch aus den von Wolf [2], S. 226 angegebenen Beziehungen zwischen dem astronomischen Azimut bzw. dem wahren Höhenwinkel, den geozentrischen Koordinaten der Endpunkte der Strecke und der astronomischen Länge und Breite von  $P_1$  ableiten, wenn wir die astronomischen Größen durch die entsprechenden ellipsoidischen Größen ersetzen. Gehen wir außerdem auf die hier verwendeten Bezeichnungen über und beseitigen den Vorzeichenfehler in [2], Gleichung (4), so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\operatorname{tg} A_{12} = \frac{(y_2 - y_1) \cdot \cos L_1 - (x_2 - x_1) \cdot \sin L_1}{(z_2 - z_1) \cdot \cos B_1 - (x_2 - x_1) \cdot \sin B_1 \cdot \cos L_1 - (y_2 - y_1) \cdot \sin B_1 \cdot \sin L_1}, \quad \dots (4.7)$$

$$\sin \beta_{12} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot \cos B_1 \cdot \cos L_1 + (y_2 - y_1) \cdot \cos B_1 \cdot \sin L_1 + (z_2 - z_1) \cdot \sin B_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Nun ist nach (2.7) und (4.1)

$$x_2 - x_1 = \bar{d}_{12} \cdot \cos \bar{B}_{12} \cdot \cos \bar{L}_{12}, \quad y_2 - y_1 = \bar{d}_{12} \cdot \cos \bar{B}_{12} \cdot \sin \bar{L}_{12}, \quad z_2 - z_1 = \bar{d}_{12} \cdot \sin \bar{B}_{12},$$

$$\bar{d}_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Hiermit erhalten wir aus (4.7) und (4.8) nach einigen einfachen Umformungen wieder die Gleichungen (4.3) und (4.4).

### 5. Numerische Erprobung

Zur numerischen Erprobung der abgeleiteten Formeln verwenden wir die von Andersen [9] S. 20ff. berechneten Zahlenbeispiele zur Übertragung geographischer Koordinaten auf dem internationalen Erdellipsoid.

#### Zweite Hauptaufgabe

$$\text{Gegeben: } B_1 = 55^\circ 00' 00'', 0000, \quad L_1 = 0^\circ 00' 00'', 0000, \quad H_1 = 0,000 \text{ m,} \\ B_2 = 60^\circ 56' 25'', 0910, \quad L_2 = 13^\circ 38' 01'', 0328, \quad H_2 = 0,000 \text{ m.}$$

$$\text{Gesucht: } \bar{d}_{12}, A_{12}, A_{21}, \beta_{12}, \beta_{21}.$$

Da die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  im vorliegenden Fall auf dem Ellipsoid liegen, entsprechen die Höhenwinkel  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{21}$  den Depressionswinkeln der Sehne  $P_1P_2$ .

1. Berechnung der geozentrischen Koordinaten nach (2.1):

$$x_1 = 3\ 666\ 772,774, \quad y_1 = 0,000, \quad z_1 = 5\ 201\ 489,661, \\ x_2 = 3\ 018\ 581,262, \quad y_2 = 732\ 146,851, \quad z_2 = 5\ 552\ 235,324.$$

2. Berechnung von  $\bar{d}_{12}$  nach (4.1):

$$\bar{d}_{12} = 1\ 038\ 825,139 \text{ m.}$$

3. Berechnung von  $\bar{L}_{12}$ ,  $\bar{B}_{12}$  nach (4.2):

$$\bar{L}_{12} = 131^{\circ}31'09,9381, \quad \bar{B}_{12} = 19^{\circ}43'56,7486.$$

4. Berechnung von  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{21}$  nach (4.4) und (4.5):

$$\beta_{12} = -4^{\circ}39'50,7800, \quad \beta_{21} = -4^{\circ}39'45,4913.$$

5. Berechnung von  $A_{12}$  und  $A_{21}$  nach (4.3) und (2.8):

$$A_{12} = 45^{\circ}00'00,0002, \quad A_{21} = 236^{\circ}35'20,3847, \\ \text{nach [9]} \quad A_{12} = 45^{\circ}00'00,0001, \quad A_{21} = 236^{\circ}35'20,3846.$$

### *Erste Hauptaufgabe*

Gegeben:  $B_1 = 55^{\circ}00'00,0000$ ,  $L_1 = 0^{\circ}00'00,0000$ ,  $H_1 = 0,000\text{m}$ ,  
 $A_{12} = 45^{\circ}00'00,0000$ ,  $\beta_{12} = -4^{\circ}39'50,7800$ ,  $\bar{d}_{12} = 1\ 038\ 825,139\text{m}$ .

Gesucht:  $B_2, L_2, H_2, A_{21}$ .

#### a) Lösung mit geozentrischen Richtungen

1. Berechnung von  $x_1, y_1, z_1$  aus  $B_1, L_1, H_1$  nach (2.1):

$$x_1 = 3\ 666\ 772,774, \quad y_1 = 0,000, \quad z_1 = 5\ 201\ 489,661.$$

2. Berechnung von  $\bar{B}_{12}, \bar{L}_{12}$  aus  $B_1, L_1, A_{12}, \beta_{12}$  nach (2.4) bis (2.6):

$$\bar{B}_{12} = 10^{\circ}43'56,7487, \quad \bar{L}_{12} = 131^{\circ}31'09,9383.$$

3. Berechnung von  $x_2, y_2, z_2$  nach (2.7):

$$x_2 = 3\ 018\ 581,261, \quad y_2 = 732\ 146,850, \quad z_2 = 5\ 552\ 235,324.$$

4. Umrechnung von  $x_2, y_2, z_2$  in  $B_2, L_2, H_2$  nach [6] S. 535/36:

$$B_2 = 60^{\circ}56'25,0910, \quad L_2 = 13^{\circ}38'01,0327, \quad H_2 = 0,000\text{m}, \\ \text{nach [9]:} \dots 25, 0910 \qquad \qquad \qquad 01, 0328 \qquad \qquad \qquad 0,000 \dots$$

5. Berechnung von  $A_{21}$  nach (2.8):

$$A_{21} = 236^{\circ}35'20,3845, \text{ nach [9]:} \dots 20,3845.$$

#### b) Lösung mit lokalen kartesischen Koordinaten

1. Berechnung von  $x_2', y_2', z_2'$  aus  $\bar{d}_{12}, A_{12}, \beta_{12}$  nach (3.2):

$$x_2' = 732\ 146,850, \quad y_2' = 732\ 146,850, \quad z_2' = -84\ 473,351.$$

2. Berechnung von  $x_1, y_1, z_1$  aus  $B_1, L_1, H_1$  wie a1.

3. Berechnung von  $x_2, y_2, z_2$  nach (3.3):

$$x_2 = 3\ 018\ 581,261, \quad y_2 = 732\ 146,850, \quad z_2 = 5\ 552\ 235,324.$$

4. Umrechnung von  $x_2, y_2, z_2$  in  $B_2, L_2, H_2$  wie a4:

$$B_2 = 60^{\circ}56'25,0910, \quad L_2 = 13^{\circ}38'01,0327, \quad H_2 = 0,000\text{m}.$$

5. Berechnung von  $A_{21}$  nach (3.4) bis (3.9):

$$\vartheta_2 = 9^{\circ}19'36,2859, \quad \varepsilon_{12} = 44^{\circ}56'48,3768, \quad \varepsilon_2 = 56^{\circ}32'08,7617, \\ \nu_{12} = 180^{\circ}03'11,6232, \quad \nu_2 = 180^{\circ}03'11,6229, \quad A_{21} = 236^{\circ}35'20,3845, \\ \text{nach [9]:} \qquad \qquad \qquad \dots \dots \dots 20,3845.$$

Die Ergebnisse stimmen innerhalb der Rechenschärfe (0,0002 bzw. 0,002 m) mit den Werten von Andersen überein. Dabei ist zu beachten, daß die dreidimensionalen Formeln streng sind und für beliebige Entfernungen gelten, während bei den zweidimensionalen Näherungsformeln von Andersen bei Entfernungen über 1000 km ein merklicher Genauigkeitsabfall zu erwarten ist.

#### Literatur:

- [1] *Hotine, M.*: A Primer of Non-Classical Geodesy, London 1959.
- [2] *Wolf, H.*: Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. Zeitschr. f. Verm. 1963, S. 225.
- [3] *Ramsayer, K.*: Raumtriangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Zeitschr. f. Verm. 1965, S. 15.
- [4] *Ramsayer, K.*: Erprobung und Erweiterung des Verfahrens der räumlichen Triangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. (Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A: Höhere Geodäsie, Heft Nr. 60, 1968).
- [5] *Ramsayer, K.*: Spatial triangulation in a local, astronomical oriented Cartesian coordinate system. Bull. Géod. 1969, S. 123.
- [6] *Jordan/Eggert/Kneißl*: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Band VI.
- [7] *Ramsayer, K.*: Dreidimensionaler Polygonzug in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. (In Vorbereitung).
- [8] *Ramsayer, K.*: Dreidimensionaler Polygonzug im geozentrischen Koordinatensystem. (In Vorbereitung.)
- [9] *Andersen, E.*: Practical formulas for accurate calculation by relative long distances of geographical coordinates or distances and azimuths on the international ellipsoid of rotation. Mémoires de l'Institut Géodésique de Danemark. Troisième Série. Tome Seizième. Kopenhagen 1953.

## Tendenzen der Ausgleichsrechnung

(Gezeigt am Beispiel eines Winkel-Streckennetzes)

Von *Kornelius Peters*, Wien

### 0. Ist die Ausgleichsrechnung uninteressant geworden?

Elektronische Längenmeßgeräte, welche Kilometerstrecken zentimetergenau messen, Kreisetheodolite mit automatischer Nachführung, welche mit Triangulierungsgenauigkeit orientieren, im täglichen Einsatz — Mekometer, handliche Ringlaser, Lasergeodimeter ante portas — Tischcomputer, welche die tägliche Routinearbeit, Groß-EDV-Anlagen, die anonym alles, was darüber hinausgeht, bewältigen — in unserer Praxis scheint kein Platz mehr für die so intensiv studierte und allgegenwärtige Ausgleichsrechnung. Sie scheint sich in den Bereich der Satellitennetze und Blocktriangulationen abgesetzt zu haben.

Mißt man die Aktualität von Themengruppen an ihrem Anteil an der wissenschaftlichen Literatur, ergibt sich jedoch ein völlig unerwartetes Bild. Als Quelle diente die jährliche Übersicht in der ZfV, welche seit 1951 eine äußerst instruktive, nach Themen gegliederte Auflistung praktisch aller in Europa erschienenen Artikel bietet, welche in irgend einem Zusammenhang mit dem Vermessungswesen stehen. Ausgezählt wurden die Gebiete: 13. Ausgleichsrechnung und zum Vergleich die instrumentbezogenen Bereiche 4. Längenmessung, 5. Winkelmessung und 7. Höhen- und Tiefenmessung.