Paper-ID: VGI_197010

Dichte und Schwere in Zweischalenmodellen der Erde

Kurt Bretterbauer [1]

[1] *Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **58** (4), S. 105–111

1970

BibTEX:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_197010,
Title = {Dichte und Schwere in Zweischalenmodellen der Erde},
Author = {Bretterbauer, Kurt},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {105--111},
Number = {4},
Year = {1970},
Volume = {58}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 4 Baden bei Wien, Ende August 1970 58. Jg.

Dichte und Schwere in Zweischalenmodellen der Erde*

Von *Kurt Bretterbauer*, Wien

Abstract:

The variation of density and gravity in the interior of bipartite models of the Earth consisting of a homogeneous mantle and a homogeneous core is discussed in dependence of the radius of the core. Though the core's density increases to infinity when the radius of the core reaches zero, its mass has a definite value which indicates that the core's radius must have a minimum as the density never can reach infinity. The density discontinuity between mantle and core also has a minimum for a particular radius of the core. It turns out that the ratio of that particular radius to the radius of the whole body is constant for all bipartite models. The gravity shows quite different behaviour as compared with heterogeneous figures with continuous density law. The vertical gradient of gravity at the surface of the figure vanishes for a particular value of the core's radius.

Zweischalenmodelle einer vorgegebenen Masse E sind Figuren, die aus einem homogenen Sphäroid von der Teilmasse E_1 mit der Dichte ρ_1 und der zusätzlich homogen in einem Kern verteilten Restmasse $E_2 = E - E_1$ der Dichte ρ_2 bestehen. Dabei wird die Kernoberfläche a priori als exaktes Ellipsoid vorausgesetzt. Sind nun die Oberfläche der Gesamtfigur und die Kernoberfläche gleichzeitig auch Niveauflächen, so haben wir es mit zweiparametrigen Gleichgewichtsfiguren, sogenannten Wiechert-Modellen, zu tun [1]. Diese spielen in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren eine große Rolle, weil sie heterogene Figuren mit exakt bekanntem Dichtegesetz repräsentieren. Bei vorgegebener Masse E ist ein solches Wiechert-Modell durch die halbe Äquatorachse a, die Abplattung e und die beiden Formparameter

*) Vorliegende Arbeit ist im Rahmen des Forschungsprojektes 886 des Herrn Hofrat Prof. Dr. Dr. h. c. Karl Ledersteger entstanden und wurde in dankenswerter Weise vom österreichischen Fonds zur Förderung wissenschaftlicher Forschung unterstützt.

f_4 und f_6 eindeutig bestimmt. Man sieht leicht ein, daß ein Wiechert-Modell auch durch $[E, a, \rho_1, a_k, \rho_2]$ definiert werden kann, wenn a_k die halbe Äquatorachse des Kerns bezeichnet [2]. Es scheint also von einigem Interesse zu sein, für eine Masse E von gegebenem Äquatorradius a die Wechselbeziehungen zwischen ρ_1, a_k und ρ_2 zu untersuchen. Eine solche Untersuchung erweist sich als sehr einfach, wenn man aus den ∞^4 möglichen Wiechert-Modellen die dreifach-unendliche Mannigfaltigkeit $[E, a, \omega, C]$ herausgreift, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit und C das Trägheitsmoment um die Rotationsachse bedeuten.

In Näherung 4. Ordnung gilt [2]:

$$C = \frac{2}{5} E_1 a^2 \left(1 + \frac{6}{35} f_4\right) + \frac{2}{5} E_2 a_k^2, \qquad \ldots (1)$$

und mit den Bezeichnungen ρ_m = mittlere Dichte der Gesamtfigur, e_k = Kernabplattung ist:

$$E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_m \left(1 - e + \frac{2}{5} f_4\right), \quad E_1 = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_1 \left(1 - e + \frac{2}{5} f_4\right),$$
$$E_2 = \frac{4\pi}{3} a_k^3 \rho_2 (1 - e_k), \quad E = E_1 + E_2. \qquad \ldots (2)$$

Da ρ_2 die Dichte der zusätzlich im Kern verteilten Masse darstellt, repräsentiert diese Größe zugleich den Dichtesprung zwischen Mantel und Kern. Man weiß aus der numerischen Berechnung von Wiechert-Modellen einer Reihe $[E, a, \omega, C]$, daß der Formparameter f_4 zwischen Null und etwa 300.10^{-8} variiert, sein Einfluß in (1) also höchstens 50.10^{-8}, in (2) 120.10^{-8} ist. Es erscheint demnach vertretbar, f_4 in den vorstehenden Gleichungen zu unterdrücken. Dann folgt aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2):

$$\frac{15\,C}{8\pi a^5} = \alpha = \rho_1 (1 - e) + \left(\frac{a_k}{a}\right)^5 (1 - e_k)\, \rho_2,$$

oder:

$$\rho_1 = \frac{\alpha}{1 - e} - \left(\frac{a_k}{a}\right)^5 \cdot \frac{1 - e_k}{1 - e} \rho_2. \qquad \ldots (3)$$

Aus $E = E_1 + E_2$ gewinnt man mit Hilfe von (2):

$$\rho_1 = \rho_m - \left(\frac{a_k}{a}\right)^3 \cdot \frac{1 - e_k}{1 - e} \rho_2, \qquad \ldots (4)$$

und aus (3) und (4) schließlich:

$$\rho_2 = \frac{(1 - e)\, \rho_m - \alpha}{(1 - e_k) \left[\left(\frac{a_k}{a}\right)^3 - \left(\frac{a_k}{a}\right)^5\right]}. \qquad \ldots (5)$$

Der Verlauf der Dichten ρ_1 und ρ_2 in Abhängigkeit vom Kernradius bzw. vom Verhältnis a_k/a ist in Abb. 1 dargestellt, und zwar auf Grundlage der Daten der sogenannten „Festerde" [2]:

$E = 5974{,}6951 \,.\, 10^{24} g, \quad a = 6375{,}793$ km,

$\omega^2 = 5{,}3174\ 9543 \,.\, 10^{-9}\,\text{sec}^{-2}$, $C = 80383{,}7466 \,.\, 10^{40} g\ \text{cm}^2$,

$\alpha = 4{,}5535 g\ \text{cm}^{-3}$; $\rho_m = 5{,}5217 g\ \text{cm}^{-3}$.

In der Abb. 1 ist außerdem die Kerndichte $\rho_k = \rho_1 + \rho_2$ ausgewiesen. Man erkennt klar aus der Figur die schon in [1] diskutierten Verhältnisse: der Kernradius

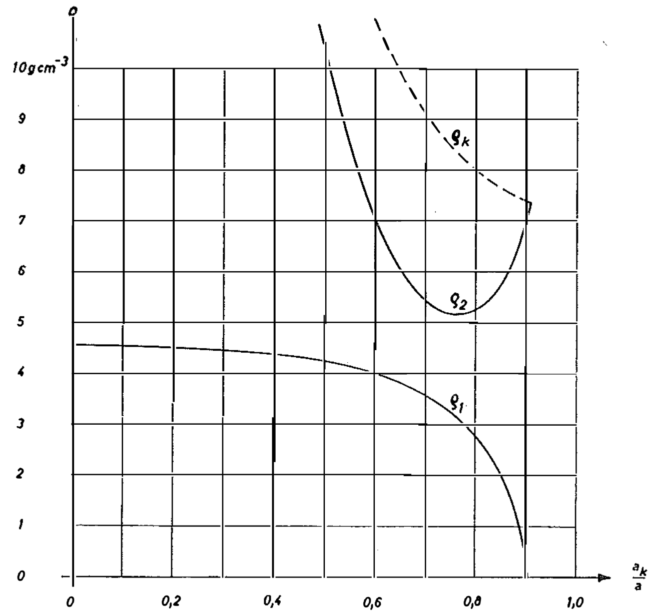

Abb. 1

kann nur bis zu einer bestimmten Größe anwachsen und zwar so lange, bis die gesamte Masse im Kern vereinigt ist. Die gegebene Figur ist dann äußere Niveaufläche eines homogenen Ellipsoides. Dieser Fall tritt ein für $\rho_1 = 0$, $E_1 = 0$. Aus (1) folgt:

$$\frac{5\,C}{2\,a^2} = E_0 = E_1\left(1 + \frac{6}{35} f_4\right) + (E - E_1)\left(\frac{a_k}{a}\right)^2 .$$

Wenn nun $E_1 = 0$, dann wird: $\left(\frac{a_k}{a}\right)^2 = \frac{E_0}{E}$.

Mit den gegebenen Daten ist $E_0 = 4943{,}5603 \,.\, 10^{24} g$ und $(a_k/a) = 0{,}909624$ oder $a_k = 5799{,}6$ km. An dieser Stelle hat ρ_2 einen größten Wert, nämlich $\rho_2 = 7{,}3358 g\ \text{cm}^{-3}$. Die Berechnung dieses Wertes setzt die Kenntnis der Abplattung des genannten homogenen Ellipsoides voraus, die leicht aus der MacLaurinschen Bedingung zu $e' = 324\ 532 \,.\, 10^{-8}$ resultiert.

Mit abnehmendem Kernradius tritt sodann Materie in den Mantel über, ρ_1 nimmt zuerst rasch, dann immer langsamer zu, während ρ_2 zunächst ebenso rasch abnimmt. An einer bestimmten Stelle, die noch näher untersucht werden soll, erreicht der Dichtesprung ein Minimum, um dann wieder stark anzuwachsen. Für

$a_k \succ 0$, geht $\rho_2 \succ \infty$, während ρ_1 und damit E_1, aber auch E_2, ganz bestimmten Grenzwerten zustreben: $\rho_1 = 4{,}5688 g\ \mathrm{cm}^{-3}$, $E_1 = 4943{,}5603.10^{24} g$, $E_2 = 1031{,}1348.10^{24} g$. Da die Kerndichte natürlich nicht unendlich groß werden kann, hat man hier einen Hinweis auf die Tatsache, daß der Kernradius offenbar einen minimalen Wert nicht unterschreiten kann. Tatsächlich ist es K. Ledersteger gelungen, diesen minimalen Kernradius zu definieren [2].

Eine besondere Betrachtung verdient das Minimum des Dichtesprunges. Um dieses aufzusuchen, wäre Gleichung (5) zu extremieren. In (5) sind e und e_k mit a_k variabel, was bei der Differentiation zu berücksichtigen wäre. Nun ist aber die Änderung von e verschwindend klein, die von e_k ebenfalls klein. Man darf also annehmen, daß beide Werte in der Umgebung des Extremwertes nahezu konstant sind. Da für eine gegebene Figur der Reihe $[E, \omega, a, C]$ ρ_m und α überhaupt konstant sind, ist es mithin gleichgültig, ob man Gleichung (5) oder den Ausdruck

$$f(a_k) = \frac{(1-e_k)\,\rho_2}{(1-e)\,\rho_m - \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{a_k}{a}\right)^3 - \left(\frac{a_k}{a}\right)^5}$$

zu einem Minimum macht. Differentiation gibt:

$$\frac{df(a_k)}{da_k} = \frac{-\frac{3a_k^2}{a^3} + \frac{5a_k^4}{a^5}}{\left[\left(\frac{a_k}{a}\right)^3 - \left(\frac{a_k}{a}\right)^5\right]^2} = 0,$$

daraus: $$\boxed{a_k^2 : a^2 = 3 : 5}\ . \qquad \ldots (6)$$

Dieselbe Überlegung kann man ebenso für eine andere Reihe mit geändertem Trägheitsmoment anstellen und da außerdem kein Gebrauch von der Gleichgewichtsbedingung gemacht wurde, gilt die einfache Beziehung (6) für sämtliche Zweischalenmodelle. Für gegebenes E und a ist der Kernradius für den minimalen Dichtesprung in allen Figuren eine Konstante. Daraus folgt, daß in dem von K. Ledersteger er-

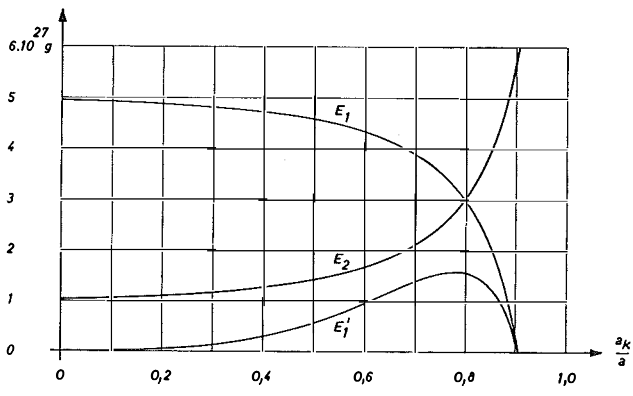

Abb. 2

sonnenen x, χ-Diagramm [2] die Kurve der Kernradien mit minimalem Dichtesprung eine Hyperbel darstellt. Mit den Daten der Festerde folgt für diesen Kernradius

$a_k = 4938{,}6$ km und $(\rho_2)_{min} = 5{,}1246 g$ cm^{-3}. Eine empirische Berechnung mit strengen Wiechert-Modellen führt auf nahezu übereinstimmende Werte.

Abb. 2 zeigt den Verlauf der Massen E_1 und E_2 in Abhängigkeit von a_k/a. Der Verlauf bietet keine Besonderheiten und bedarf keiner Diskussionen. Es sei nur festgestellt, daß an der Stelle $a_k/a = 0{,}80922$, $a_k = 5159{,}4$ km Gleichheit zwischen den beiden Massen eintritt: $E_1 = E_2 = E/2$.

Interessant jedoch ist das Verhalten des Anteiles der Mantelmasse am Kern E_1'. Dieser Anteil errechnet sich aus:

$$E_1' = (a_k : a)^3 \left[(1 - e_k) : (1 - e + \frac{2}{5} f_4)\right] E_1.$$

Die entsprechende Kurve in Abb. 2 zeigt ein Maximum und einen Wendepunkt. Im Falle der Festerde tritt das Maximum bei etwa $a_k = 5064$ km mit $(E_1')_{max} = 1594.10^{24} g$ auf, der Wendepunkt bei $a_k = 3874$ km.

Es ist nun nicht schwierig, auch den Schwereverlauf im Inneren von Zweischalenmodellen anzugeben. Dieser zeigt ein grundsätzlich anderes Verhalten als der bereits von Helmert [3, Seite 492] und neuerdings von K. Ledersteger [1, Seite 545] untersuchte Schwereverlauf in Figuren mit stetigem Dichtegesetz. Bei letzteren Figuren liegt das Schweremaximum an der Oberfläche und die Schwere nimmt monoton nach innen ab, solange die Oberflächendichte größer als $\frac{2}{3}\rho_m$ ist. Sinkt

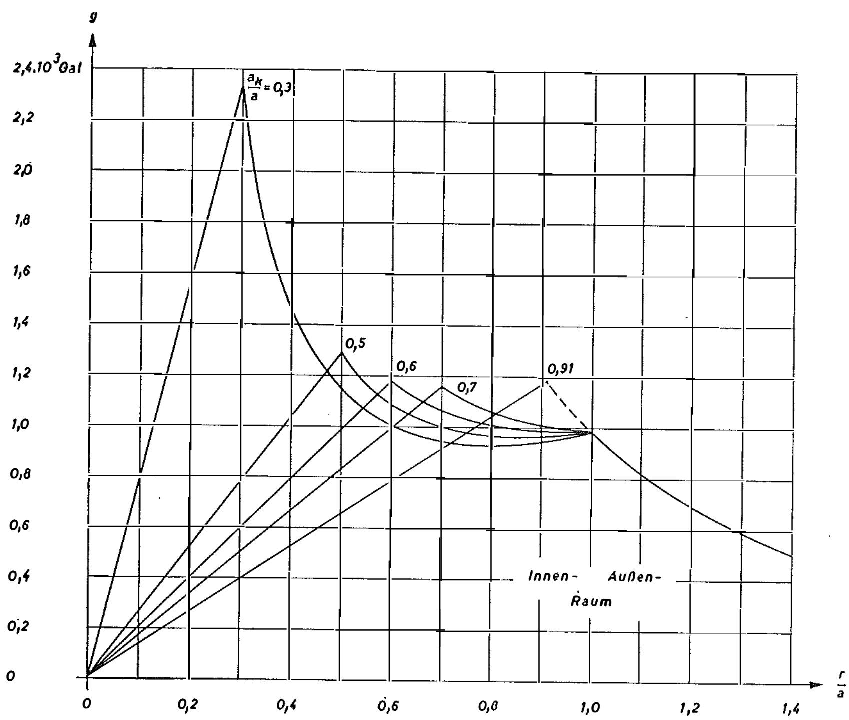

Abb. 3

die Oberflächendichte unter $^2/_3$ der mittleren Dichte, dann rückt das Schweremaximum in die Tiefe (Theorem von Saigey). Nach Überschreitung des Maximums nimmt die Schwere dann stetig zum Zentrum ab. Bei den Wiechert-Modellen dagegen verhält sich die Schwere ganz anders. Solange die Manteldichte kleiner als $^2/_3$ der mittleren Dichte ist, wächst die Schwere von der Oberfläche weg stetig bis zur Kernoberfläche an, um von dort linear abzunehmen. Ist dagegen ρ_1 größer als $^2/_3$ der mittleren Dichte, dann hat die Schwere an der Oberfläche einen ersten größten Wert, nimmt mit zunehmender Tiefe zunächst ab, erreicht ein Minimum, um dann wieder bis zur Kernoberfläche anzuwachsen und einen zweiten, im allgemeinen größeren Maximalwert zu erreichen. Wenn $\rho_1 \sim \frac{2}{3}\rho_m$ ist der Vertikalgradient der Schwere an der Oberfläche gleich Null. Die Verhältnisse zeigt Abb. 3. Dort ist der Schwereverlauf für die 5 Modelle $(a_k/a) = 0{,}9096; 0{,}7; 0{,}6; 0{,}5$ und $0{,}3$ dargestellt. Für die Berechnung der graphischen Darstellung konnte die Rotation vernachlässigt, also Kugelgestalt vorausgesetzt werden. Allerdings, zur Feststellung jener Figur, bei der der vertikale Schweregradient an der Oberfläche verschwindet, mußten strenge Wiechert-Modelle herangezogen werden. Ihre Berechnung geschah nach den in [2] angegebenen Richtlinien. Zur Bestimmung des Schweregradienten wurde dann jeweils eine 1-km-Schicht von der Figur abgehoben. Dabei mußte, nicht ganz korrekt aber doch genügend genau, vorausgesetzt werden, daß diese Schicht von ähnlichen Ellipsoiden begrenzt ist. Sodann wurden die äquatorialen Schwerewerte auf dem Wiechert-Modell (γ_0) und auf der reduzierten Figur (γ_0') nach der Helmertschen Formel für die Äquatorschwere auf Niveausphäroiden berechnet:

$$\gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}\left(1 + e - \frac{3}{2}\bar{\varepsilon} - e^2 + e\,\bar{\varepsilon} - \frac{5}{2} J_4\right).$$

Da der Verlauf von e, f_4 und J_4 im Inneren von Wiechert-Modellen nicht bekannt ist, wurde eine lineare Abnahme dieser Größen angenommen und die Entblätterung mit mittleren Werten vorgenommen. In der folgenden Tabelle sind die Daten jener 2 Wiechert-Modelle angegeben, die das gesuchte Modell offenbar knapp einschließen. Es handelt sich dabei um Figuren der Reihe $[E, a, \omega, J_2]$.

	Modell 1	Modell 2
a_k	= 4460,0 km	4465,0 km
e	= 335 185,3648.10^{-8}	e = 335 185,4480.10^{-8}
J_2	= 108 324,2280.10^{-8}	108 324,2280.10^{-8}
$\bar{\varepsilon}$	= 345 834,3827.10^{-8}	345 834,3827.10^{-8}
J_4	= – 291,9594.10^{-8}	– 291,8267.10^{-8}
f_4	= – 243,0648.10^{-8}	– 242,4830.10^{-8}
E_1	= 3994,1416.10^{24} g	3989,8991.10^{24} g
ρ_1	= 3,691 397 g cm^{-3}	3,687 476 g cm^{-3}
e_k	= 290 718,0254.10^{-8}	290 908,2420.10^{-8}
C	= 80 704,4430.10^{40} g cm^2	80 704,6439.10^{40} g cm^2
γ_0	= 978 539,91 mGal	978 539,91 mGal
γ_0'	= 978 539,76 mGal	978 540,09 mGal
$\Delta\gamma_0$	= – 0,15 mGal	+ 0,18 mGal

Beiden Figuren gemeinsam ist natürlich die Gesamtmasse $E = 5974{,}6951.10^{24}\,g$, aber auch die mittlere Dichte, da beide Modelle sehr nahe beisammen liegen:

$$\rho_m = 5{,}521830\ g\ cm^{-3},\quad \frac{2}{3}\,\rho_m = 3{,}681220\ g\ cm^{-3}.$$

Wie man sieht, nimmt beim Modell mit $a_k = 4460{,}0$ km die Schwere in 1 km Tiefe noch um 0,15 mGal ab, während sie beim Modell $a_k = 4465{,}0$ km bereits um 0,18 mGal zunimmt. Eine genaue Bestimmung des gesuchten Kernradius mit verschwindendem Schweregradienten an der Oberfläche der Gesamtfigur wäre mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Die Bedingung $\rho_1 = \frac{2}{3}\,\rho_m$ ist in sehr guter Annäherung erfüllt. Eine strenge Erfüllung ist nicht möglich, weil Saigey bei der Herleitung dieser Beziehung von kugelig geschichteten Figuren ausgegangen ist.

Literatur

[1] *K. Ledersteger:* Astronomische und physikalische Geodäsie, Band V des Handbuches der Vermessungskunde, Stuttgart 1969.

[2] *K. Ledersteger:* Ein- und zweiparametrige Gleichgewichtsfiguren. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Sonderheft: Festschrift Gigas.

[3] *F. R. Helmert:* Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II. Band.

Zur elektronischen Berechnung von ähnlichen Transformationen

Von *Hans Biach*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen)

Die bei der Abteilung Lochkartentechnik des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen eingebrachten Anträge zur ähnlichen Umformung (mit Drucksorte Nr. 1435) sind oft von der Art, daß Grenzpunkte von Handrissen und Teilungsplänen von lokalen Systemen in das konforme Gauß-Krüger-System transformiert werden sollen. Zu diesem Zweck sind die Koordinaten von vermutlich identen Punkten in beiden Systemen anzugeben und auch eine zulässige Abweichung der Koordinaten der identen Punkte; die mittels der zu bestimmenden Transformationselemente aus den gegebenen lokalen Koordinaten abgeleiteten transformierten Koordinaten sollen also von den gegebenen konformen Koordinaten der identen Punkte um nicht mehr als die angegebene Schranke abweichen. Die Programmierung dieser Aufgabe ist nun bei der Abteilung Lochkartentechnik so erstellt worden, daß aus den lokalen und konformen Koordinaten von maximal 99 identen Punkten die Transformationselemente durch strengen Ausgleich ermittelt werden. Die lokalen Koordinaten aller identen Punkte werden mittels dieser Transformationselemente umgeformt; überschreiten die sich hiebei ergebenden Widersprüche bei allen identen Punkten nicht die vorgegebene Schranke, ist die Bestimmung der endgültigen Transformationselemente beendet. Im entgegengesetzten Falle wird der Punkt mit dem größten Widerspruch eliminiert und eine neuerliche Bestimmung der Transformationselemente mit den n-1 verbliebenen identen Punkten wiederholt. Wieder wird nach einer neuerlichen Transformation jener Punkt mit dem größten Widerspruch aus-