

Paper-ID: VGI_197004



Zur Wahrscheinlichkeitstheorie des Helmertschen Punktfehlers

Erik W. Grafarend ¹

¹ *Bonn, Nussallee 17*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **58** (2), S. 33–41

1970

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Grafarend_VGI_197004,  
Title = {Zur Wahrscheinlichkeitstheorie des Helmertschen Punktfehlers},  
Author = {Grafarend, Erik W.},  
Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{{\"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {33--41},  
Number = {2},  
Year = {1970},  
Volume = {58}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 2

Baden bei Wien, Ende April 1970

58. Jg.

Zur Wahrscheinlichkeitstheorie des Helmertschen Punktfehlers

Von Erik Grafarend, Bonn

Summary:

The probability to find an error vector in multiples α of the *Helmert* point error, the trace of the error tensor of rank two, is calculated. Basis are three different values of the error tensor, representing a lot of practical measurements. Their principal axis proportions in two dimensional space are 1:1, 1:2 and 1:10, in three dimensional space 1:1:1, 1:1:2 and $1:\sqrt{10}:10$. It is found that the probability is for $\alpha = 1$ average 63%, for $\alpha = 2$ average 95%, for $\alpha = 3$ average 99% in two dimensions and for $\alpha = 1$ average 60%, for $\alpha = 2$ average 94%, for $\alpha = 3$ average 99% in three dimensions. The maximum difference of probability in the three examples is 13%. Detailed tables are given.

1. Einleitung

Die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine räumliche Meßgröße in den Bereich des *Helmertschen* Punktfehlers fällt, steht im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen. Mit der Antwort auf diese Frage soll dem Praktiker eine wahr-scheinlichkeitstheoretische Vorstellung vermittelt werden, die er für die Arbeit mit dem *Helmertschen* Punktfehler benötigt. Unser Ergebnis soll demjenigen äquivalent sein, daß etwa 68% der Meßfehler in den Bereich des mittleren Fehlers fallen [2, 3, 7].

Die wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse wird ergeben, daß zahlenmäßige Aussagen nur bei vorgegebenem Meßmaterial möglich sind. Wir diskutieren deshalb an drei Beispielen, die eine Vielzahl praktischer Messungen repräsentieren, Fehler-situationen, die durch folgende mittlere Fehlertensoren (mittlere Fehlerquadrate

und -rechtecke, Varianzen und Kovarianzen) σ_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$; bzw. $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) charakterisiert sind:

1. $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$
2. $\sigma_{ij} = \text{diag}(1, 4)$ bzw. $\sigma_{ij} = \text{diag}(1, 1, 4)$
3. $\sigma_{ij} = \text{diag}(1, 100)$ bzw. $\sigma_{ij} = \text{diag}(1, 10, 100)$

Die dazugehörigen Achsenverhältnisse der mittleren Fehler in Hauptachsenrichtung lauten bei 1. 1:1 bzw. 1:1:1, 2. 1:2 bzw. 1:1:2 und 3. 1:10 bzw. 1: $\sqrt{10}$:10.

2. Das Konzept des Helmertschen Punktfehlers

Werden im *Euklidischen* Raum rechtwinkelige Koordinaten mit zufälligen Fehlern gemessen oder aus anderen zufällig fehlerhaften Beobachtungen berechnet, so unterliegen die Beobachtungswerte einer Statistik mit Normalverteilung. Eine derartige räumliche normale Wahrscheinlichkeitsdichte wird mit dem Mittelwertvektor μ_i und dem mittleren Fehlertensor σ_{ij} eindeutig bestimmt. Mittlere Fehlerquadrate und mittlere Fehlerrechtecke in beliebiger Raumrichtung können aus dem Transformationsverhalten des mittleren Fehlertensors einfach berechnet werden. Kennt man beispielsweise die mittleren Fehler im Koordinatensystem X_i , so hängen sie mit den mittleren Fehlern im bezüglich X_i um die *Eulerschen* Winkel ψ, ϑ, φ (Abb. 1) räumlich gedrehten Koordinatensystem X_i^* linear zusammen.

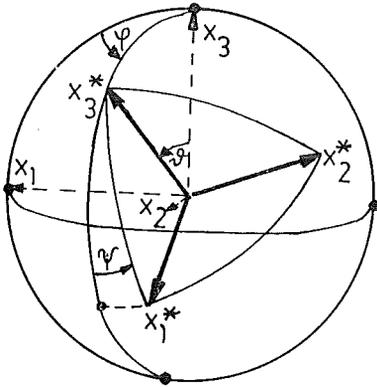


Abb. 1

Abb. 1: Eulersche Winkel auf der Einheitskugel

$$\sigma_{ij}^* = \sum_{k,l}^n a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl} \quad \dots (2.1)$$

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}, \quad a_{jl} = \frac{\partial x_j^*}{\partial x_l} \quad \dots (2.2)$$

Folgend lassen wir die Summenzeichen fort und addieren automatisch über zwei gleichlaufende Indices (*Einsteinsche* Summenkonvention). Alle Indices laufen von 1 bis zur Dimensionszahl $n \leq 3$.

$$a_{ik} = d_{ih}(\psi) d_{hl}(\vartheta) d_{lk}(\varphi) \quad \dots (2.3)$$

$$d_{ih}(\psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_{hl}(\vartheta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad \dots (2.4)$$

$$d_{lk}(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{vmatrix} \dots (2.5)$$

Wir haben die räumliche Drehung deshalb so ausführlich behandelt, weil wir eine Durchschnittsaussage der Abhängigkeit des mittleren Fehlertensors von den Raumrichtungen anstreben. Wir mitteln dazu den mittleren Fehlertensor bei gleicher einheitlicher Gewichtsfunktion über die einzelnen Richtungen der *Eulerschen Winkel*.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi d\vartheta \sin \vartheta d\varphi a_{ik}(\psi, \vartheta, \varphi) a_{jl}(\psi, \vartheta, \varphi) \sigma_{kl} \dots (2.6)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{n} (\text{tr } \sigma_{kl}) \delta_{ij}, M^2 = \frac{1}{n} \text{tr } \sigma_{kl} \dots (2.7)$$

Das Mittel führt also auf den um den Faktor $1/n$ modifizierten *Helmertschen Punktfehler* $\frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$ für $n = 2$ [4] bzw. $\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ für $n = 3$. Als *Helmertschen Punktfehler* bezeichnen wir die invariante Spur des mittleren Fehlertensors $\text{tr } \sigma_{kl}$.

3. Normale Verteilungsfunktion zum *Helmertschen Punktfehler*

Die Wahrscheinlichkeit, einen räumlichen Fehler in dem Bereich $\mu_i - a_i < X_i \leq \mu_i + a_i$ anzutreffen, läßt sich für eine *Gaußsche Fehlerdichte* unmittelbar angeben. Man integriert dazu innerhalb der Intervallgrenzen über die n -dimensionale Fehlerdichte, transformiert linear mittels $\bar{X}_i = a_{ij} X_j$ den mittleren Fehlertensor auf Hauptachsen – Funktionaldeterminante $+1$ – und teilt das Mehrfachintegral in voneinander unabhängige Einzelintegrale.

$$P(\bar{\mu}_x - \bar{a}_x < \bar{X} \leq \bar{\mu}_x + \bar{a}_x, \bar{\mu}_y - \bar{a}_y < \bar{Y} \leq \bar{\mu}_y + \bar{a}_y, \dots) \\ = [2 F\left(\frac{\bar{a}_x}{\sigma_x}\right) - 1] [2 F\left(\frac{\bar{a}_y}{\sigma_y}\right) - 1] \dots \dots (3.1)$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^X dZ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z^2}{2} \dots (3.2)$$

Der Fehlerbereich des modifizierten *Helmertschen Punktfehlers* beträgt πM^2 ($n = 2$) bzw. $\frac{4}{3} \pi M^3$ ($n = 3$). Darauf werden die Integrationsgrenzen abgestimmt.

$$\bar{a}_x = \bar{a}_y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha M \text{ bzw. } \bar{a}_x = \bar{a}_y = \bar{a}_z = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M \dots (3.3)$$

Wesentliches Ergebnis der Analyse ist somit, daß die Wahrscheinlichkeit, mit der ein räumlicher Fehler in den Kreis bzw. in die Kugel vom Radius αM (α beliebiges Vielfache) fällt, von σ_{ij} abhängt. Geordnet nach drei Beispielgruppen der Einleitung, geben Tab. 1 und Tab. 2 einen Überblick über die Wahrscheinlichkeit $P()$.

<p style="text-align: center;">Fehlerquadrat</p> $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mu}_x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha M < \bar{x} \leq \bar{\mu}_x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha M, \\ \bar{\mu}_y - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha M < \bar{y} \leq \bar{\mu}_y + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha M \end{array} \right\}$	<p style="text-align: center;">Wahrscheinlichkeit</p> $P \{ \}$ $= P (0 < \varepsilon \leq \alpha M)$ <p style="text-align: center;">(Rechenschiebergengenauigkeit)</p>	<p style="text-align: center;">komplementäre Wahrscheinlichkeit</p> $1 - P \{ \}$ $= 1 - P (0 < \varepsilon \leq \alpha M)$ <p style="text-align: center;">(Rechenschiebergengenauigkeit)</p>
$\alpha = 1$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 39,3% 2. 43,3% 3. 47,1% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 60,7% 2. 56,7% 3. 52,9%
$\alpha = \sqrt{2}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 62,3% 2. 64,5% 3. 62,6% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 37,7% 2. 35,5% 3. 47,4%
$\alpha = 2$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 86,5% 2. 83,5% 3. 79,2% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 13,5% 2. 16,5% 3. 20,8%
$\alpha = 2\sqrt{2}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 97,6% 2. 95,2% 3. 92,3% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2,4% 2. 4,8% 3. 7,7%
$\alpha = 3$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 98,9% 2. 96,4% 3. 94,1% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 1,1% 2. 3,6% 3. 5,9%
$\alpha = 3\sqrt{2}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 99,9% 2. 99,7% 3. 99,2% 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 0,1% 2. 0,3% 3. 0,8%

Tab. 1: Zweidimensionale Fehlerwahrscheinlichkeiten

Fehlerwürfel $\left\{ \begin{aligned} \bar{\mu}_x - \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M < \bar{x} \leq \bar{\mu}_x + \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M, \\ \bar{\mu}_y - \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M < \bar{y} \leq \bar{\mu}_y + \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M, \\ \bar{\mu}_z - \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M < \bar{z} \leq \bar{\mu}_z + \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \alpha M \end{aligned} \right\}$	Wahrscheinlichkeit $P \{ \}$ $= P(0 < \varepsilon \leq \alpha M)$ (Rechenschiebergenauigkeit)	komplementäre Wahrscheinlichkeit $1 - P \{ \}$ $= 1 - P(0 < \varepsilon \leq \alpha M)$ (Rechenschiebergenauigkeit)
$\alpha = 1$	1. 19,9% 2. 31,8% 3. 33,0%	1. 80,1% 2. 68,2% 3. 67,0%
$\alpha = \sqrt{3}$	1. 58,5% 2. 61,5% 3. 60,0%	1. 41,5% 2. 38,5% 3. 40,0%
$\alpha = 2$	1. 73,9% 2. 71,2% 3. 67,2%	1. 26,1% 2. 28,8% 3. 32,8%
$\alpha = 3$	1. 97,1% 2. 91,1% 3. 85,7%	1. 2,9% 2. 8,9% 3. 14,3%
$\alpha = 2\sqrt{3}$	1. 98,8% 2. 95,0% 3. 90,9%	1. 1,2% 2. 5,0% 3. 9,1%
$\alpha = 3\sqrt{3}$	1. 99,9% 2. 99,7% 3. 98,9%	1. < 0,1% 2. 0,3% 3. 1,1%

Tab. 2: Dreidimensionale Fehlerwahrscheinlichkeiten

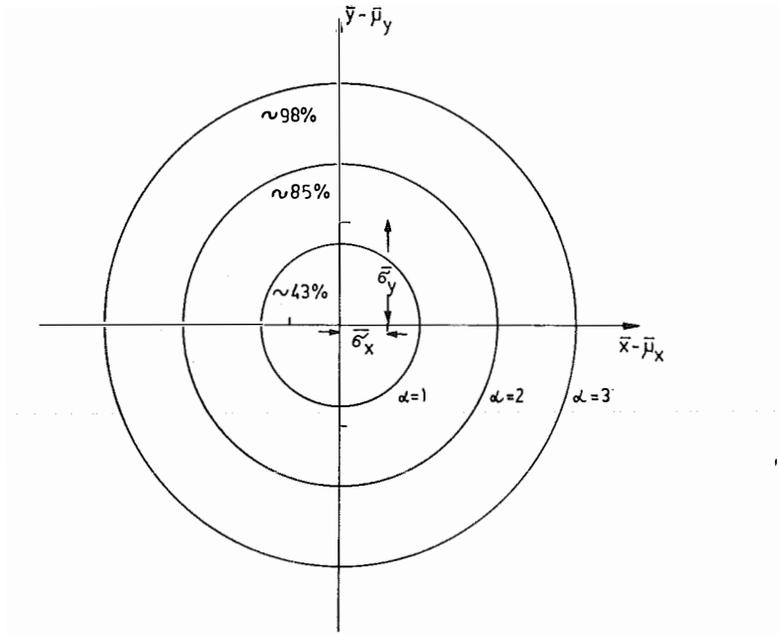


Abb. 2: Fehlerkreise und Fehlerwahrscheinlichkeiten zum modifizierten *Helmertschen* Punktfehler

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}, \text{ Achsenverhältnis } \bar{\sigma}_x : \bar{\sigma}_y = 1:2$$

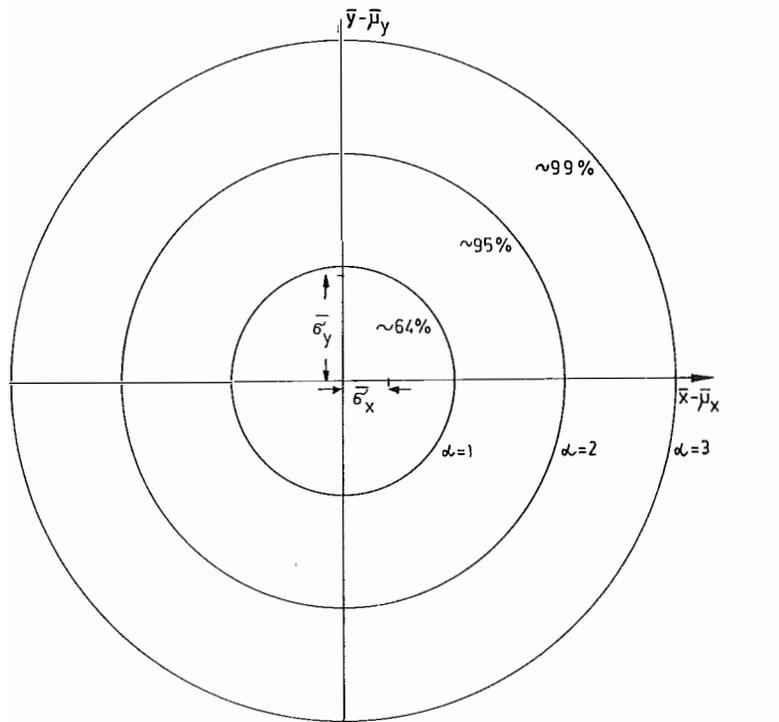


Abb. 3: Fehlerkreise und Fehlerwahrscheinlichkeiten zum *Helmertschen* Punktfehler $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
Achsenverhältnis $\bar{\sigma}_x : \bar{\sigma}_y = 1:2$

Wir erläutern die Ergebnisse anhand Abb. 2 und Abb. 3. Für das Achsenverhältnis $\overline{\sigma_x} : \overline{\sigma_y} = 1:2$ sind die Fehlerkreise zum modifizierten und zum *Helmertschen* Punktfehler eingetragen. Abb. 2 entnimmt man, daß etwa 43% (außerhalb etwa 67%) der räumlichen Fehler in den Kreis vom Radius M fallen, etwa 85% (außerhalb etwa 15%) in den Kreis vom Radius $2M$ und schließlich etwa 98% (außerhalb etwa 2%) in den Kreis vom Radius $3M$. Nach Abb. 3 fallen jedoch schon etwa 64% (außerhalb etwa 36%) in den Kreis des einfachen, etwa 95% (außerhalb etwa 5%) in denjenigen des doppelten und etwa 99% (außerhalb etwa 1%) in denjenigen des dreifachen *Helmertschen* Punktfehlers.

4. Isotrope Verteilungsfunktion zum *Helmertschen* Punktfehler

Zu einer isotropen modifizierten *Gaußschen* Normalverteilung gelangt man, wenn man die gewöhnliche räumliche Normalverteilung $f(X_i - \mu_i)$ auf Kugelkoordinaten transformiert und zur winkelunabhängigen Randverteilung übergeht. Ein derartiger Ansatz findet sich bereits bei *Czuber* [1] und *Kozak* [5]. In Erweiterung dieser Arbeiten lösen wir hier die komplizierten Integrationen auf, um zu qualitativen und quantitativen Aussagen zu gelangen.

$$f(\varepsilon_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \sigma_{ij})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j\right) \quad \dots (4.1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_r \sin \varepsilon_\vartheta \cos \varepsilon_\varphi, \varepsilon_2 = \varepsilon_r \sin \varepsilon_\vartheta \sin \varepsilon_\varphi, \varepsilon_3 = \varepsilon_r \cos \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon_r^2 = \varepsilon^2 \quad \dots (4.2)$$

$$f_2(\varepsilon) = \varepsilon \int_0^\pi d\varepsilon_\varphi f(\varepsilon_i), \quad f_3(\varepsilon) = \varepsilon^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\varepsilon_\vartheta \sin \varepsilon_\vartheta d\varepsilon_\varphi f(\varepsilon_i) \quad \dots (4.3)$$

In der radialen Randverteilung $f_2(\varepsilon)$ bzw. $f_3(\varepsilon)$ tritt ε bzw. ε^2 deshalb auf, weil das zweidimensionale Flächenelement $d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 = \varepsilon_r d\varepsilon_r d\varepsilon_\varphi$ bzw. das dreidimensionale Volumenelement $d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 = \varepsilon_r^2 d\varepsilon_r d\varepsilon_\vartheta \sin \varepsilon_\vartheta d\varepsilon_\varphi$ lautet. Die Integration von (4.3) läßt sich nicht mehr geschlossen ausführen, wir zerlegen deshalb die Normalverteilung in eine *Taylorreihe* und integrieren gliedweise.

$n = 2$:

$$f_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{J_2}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{J_1}{J_2} + \frac{\varepsilon^4}{64} \frac{3J_1^2 - 4J_2}{J_2^2} - \frac{\varepsilon^6}{768} \frac{5J_1^3 - 12J_1 J_2}{J_2^3} + o(\varepsilon^8) \right\} \quad \dots (4.4)$$

$n = 3$:

$$f_3(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{J_3}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{6} \frac{J_2}{J_3} + \frac{\varepsilon^4}{120} \frac{3J_2^2 - 4J_1 J_3}{J_3^2} - o(\varepsilon^6) \right\} \quad \dots (4.5)$$

Die isotrope normale Wahrscheinlichkeitsdichte (4.4), (4.5) haben wir von den Invarianten des mittleren Fehlertensors, der Spur $\text{tr } \sigma_{ij}$, der Spur des aus den algebraischen Komplementen des Fehlertensors gebildeten Kofaktors $\text{tr } \gamma^{kl}$ und der Determinanten $\det \sigma_{ij}$, abhängig geschrieben.

$$J_1 = \text{tr } \sigma_{ij}, J_2 = \text{tr } \gamma^{kl}, J_3 = \det \sigma_{ij} \quad \dots (4.6)$$

Die Summenwahrscheinlichkeit ergibt sich analog.

$$P(0 < \varepsilon \leq \alpha M) = \int_0^{\alpha M} d\varepsilon f(\varepsilon) \quad \dots (4.7)$$

$n = 2$:

$$P(0 < \varepsilon \leq \alpha M) = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ \frac{\alpha^2 J_1}{4} - \frac{\alpha^4 J_1^3}{64 J_2} + \frac{\alpha^6 J_1^3}{3072} \frac{3 J_1^2 - 4 J_2}{J_2^2} - \frac{\alpha^8 J_1^4}{98304} \frac{5 J_1^3 - 12 J_1 J_2}{J_2^3} + o(\alpha^{10}) \right\} \quad \dots (4.8)$$

$n = 3$:

$$P(0 < \varepsilon \leq \alpha M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{J_3}} \left\{ \frac{\alpha^3 J_1 \sqrt{J_1}}{9 \sqrt{3}} - \frac{\alpha^5 J_1^2 \sqrt{J_1}}{270 \sqrt{3}} \frac{J_2}{J_3} + \frac{\alpha^7 J_1^3 \sqrt{J_1}}{22680 \sqrt{3}} \frac{3 J_2^2 - 4 J_1 J_3}{6 J_3^2} - o(\alpha^9) \right\} \quad \dots (4.9)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler ε im Intervall $0 < \varepsilon \leq \alpha M$ anzutreffen, hängt somit nicht nur vom *Helmertschen* Punktfehler I_1 ab, sondern ebenso von I_2 und I_3 . Die Formeln (4.8), (4.9) entsprechen (3.1), (3.2), (3.3) und führen ebenso auf die Werte von Tab. 1 und Tab. 2. Ein wesentlicher Nachteil von (4.8), (4.9) ist jedoch, daß die Reihen bei größerem α und ungleichartigen Achsenverhältnissen schlecht konvergieren. Steht eine Tafel, beispielsweise [6], zur eindimensionalen *Gauß*-Verteilung zur Verfügung, so führt der Weg über (3.1), (3.2), (3.3) schneller zum Ziel.

5. Schlußbemerkungen

Aus den Tabellen 1 und 2 läßt sich folgender Trend ablesen: Für kleine Fehlerbereiche $f \leq \alpha \leq \sqrt{3}$ ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler in α -Vielfachen des *Helmertschen* Punktfehlers anzutreffen, für kreisförmige Fehlerellipsen *kleiner* als für stärker vom Kreis abweichende Fehlerellipsen. Dieser Trend kehrt sich für größere Zahlen α um. Für $\alpha > \sqrt{3}$ ist die Wahrscheinlichkeit im Falle einer kreisförmigen Ellipse gegenüber einer ausgeprägten Fehlerellipse *stets größer*.

Aus den drei Beispielgruppen in den beiden Tabellen liest man ferner ab, daß für *praxisnahe* Achsenverhältnisse der mittleren Fehlerellipse die Wahrscheinlichkeiten um maximal 13% differieren. Der Praktiker wird sich am besten die Wahrscheinlichkeit von etwa 63% merken (außerhalb etwa 37%), mit der ein Fehler in den Bereich des zweidimensionalen *Helmertschen* Punktfehlers fällt. Für den dreidimensionalen Raum lautet die Wahrscheinlichkeit etwa 60% (außerhalb etwa 40%). In dem Bereich des dreifachen *Helmertschen* Punktfehlers liegen etwa 99% der Meßwerte, nur etwa 1% liegt außerhalb.

Wir schließen mit einem aktuellen Hinweis. Von der NASA wurde der Landepunkt der Apollo-Mondfähre im Mare Tranquillitatis mit einer Treffwahrscheinlichkeit von 99% in einer mittleren Fehlerellipse der Achsenlänge 2,2 km und 5,2 km angegeben. Dem entspricht bei gleicher Treffwahrscheinlichkeit ein Fehlerkreis

vom Radius etwa 5,7 km, das etwa 2,8fache des zugehörigen *Helmertschen* Punktfehlers von etwa 2 km.

Literatur:

- [1] *Czuber, E.*: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891.
- [2] *Grafarend, E.*: Allgemeiner Fehlertensor bei a priori und a posteriori Korrelationen, ZfV 92 (1967) S. 157–165.
- [3] *Grafarend, E.*: Helmertsche Fußpunktkurve oder Mohrscher Kreis, AVN 76 (1969) S. 239–250.
- [4] *Helmert, F. R.*: Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie, Z. f. Mathematik und Physik 13 (1868) S. 73–120, speziell Formel (41) S. 97.
- [5] *Kozak, J.*: Grundprobleme der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2 Bände, Wien/Leipzig 1907/1910.
- [6] *Kreiszig, E.*: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1965.
- [7] *Wolf, H.*: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Bonn 1968.

Ein Beitrag zum Nachweis rezenter Bewegungen in den Hohen Tauern

Von *Erich Senftl*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Der Vergleich der Präzisionsnivellements durch den Tauerntunnel zwischen Bockstein und Mallnitz aus den Jahren 1909, 1949 und 1969 zeigt eine systematische Zunahme des Höhenunterschiedes in Richtung Nord—Süd. Aus dieser Tatsache ließe sich auf eine Bewegung des Gebirgskörpers im Sinne einer Kippung um eine Achse schließen, die etwa parallel zum Alpenhauptkamm liegen könnte.

Nachstehend wird über die drei Nivellements getrennt berichtet und eine Zusammenfassung der Meßergebnisse gegeben, die damit den Geologen zur Diskussion gestellt werden.

1. Das Nivellement von 1909

Der Bau des 8,5 km langen Eisenbahntunnels durch das Massiv der Hohen Tauern ermöglichte es dem k. u. k. Militärgeographischen Institut (MGI) in den Jahren 1906 bis 1910, eine Nivellementverbindung zwischen dem Salzachtal und dem Drautal, quer zum Verlauf des Alpenhauptkammes, herzustellen.

Die Messung dieser Linie — sie erhielt die Nummer 310 — wurde in drei zeitlich getrennten Abschnitten ausgeführt: 1906 längs der Straße von Lend nach Bad Gastein (bis zur Höhenmarke am Beamtenwohnhaus beim Bahnhof), 1909 auf der Bahntrasse von Bad Gastein durch den Tauerntunnel bis zur Höhenmarke am Bahnwärterhaus (BWH) Nr. 20 südlich von Mallnitz und schließlich 1910 ebenfalls auf dem Bahnkörper vom BWH Nr. 20 bis zur Höhenmarke an der Haltestelle Lendorf (BWH Nr. 153) der bereits bestehenden Linie Nr. 24 Spittal a. d. Drau—Lienz — Grenze.

Im Zusammenhang mit dem vorliegenden Beitrag interessiert nur das Nivellement im Bereich des Tauerntunnels selbst, auf das daher näher eingegangen werden soll.