



In welchem Maß können affine Transformationen durch die Auswahl der Paßpunkte beeinflußt werden?

Josef Kovarik ¹

¹ 1110 Wien, Neugebäudestraße 18, St. 10, T. 7

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **57** (5, 6), S. 154–160, 191–198

1969

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Kovarik_VGI_196917,  
  Title = {In welchem Ma{\ss} k{\"}nnen affine Transformationen durch die  
    Auswahl der Pa{\ss}punkte beeinflu{\ss}t werden?},  
  Author = {Kovarik, Josef},  
  Journal = {{\"}sterreichische Zeitschrift f{\"}r Vermessungswesen},  
  Pages = {154--160, 191--198},  
  Number = {5, 6},  
  Year = {1969},  
  Volume = {57}  
}
```



[3] *Strasser, G.*: Ein moderner Distanzmesser für kurze Strecken. ZfV, 93 (1968), Heft 9, S. 377–381.

[4] *Strasser, G.*: Der Infrarot-Distanzmesser Wild Distomat DI 10. AVN, 76 (1969), Heft 2, S. 65–72.

[5] *Jordan/Eggert/Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde. 10. Ausgabe, Bd. VI, Stuttgart 1966.

[6] *Fa. WILD/Heerbrugg*, News Letter. Geo. 2/69.

In welchem Maß können affine Transformationen durch die Auswahl der Paßpunkte beeinflusst werden?

Von *Josef Kovarik*, Wien

Liegt eine gewisse Anzahl von Punkten koordinatenmäßig in zwei verschiedenen Systemen vor, dann kann man das eine System bekanntlich rechnerisch in das andere überführen. Sind dabei nur die Verdrehung und der Maßstabsfaktor sowie die beiden Komponenten der Ursprungsverschiebung zu ermitteln, genügen dazu schon 2 gemeinsame Punkte. Sind aber mehr als 2 Punkte in beiden Systemen zu berücksichtigen, dann können die Elemente für eine sogenannte Helmert-Transformation nur solcherart bestimmt werden, daß die Differenzen zwischen den Soll-Werten und den transformierten Größen in ihrer Quadratsumme ein Minimum geben. Untersucht man die Genauigkeit, mit der sodann die nur im Ausgangs-System gegebenen Punkte in das Soll-System übergeführt werden können, dann findet man, daß der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte der Mittelpunkt von Kreisen mit gleicher mittlerer, aus der Transformation folgender Punktlageunsicherheit ist. Ihr kleinster Wert, also das Minimum, tritt im Schwerpunkt selbst auf, der größte an dem davon am weitesten entfernten Gebietsrand.

Die diesbezüglichen Zusammenhänge sind, über die Funktionsgewichte abgeleitet, fallweise mit anderen Fragen gekoppelt, bei mehreren Autoren zu finden¹⁾, siehe [1], [2], [3]. Der Verfasser selbst hat in dieser Zeitschrift ([4]) einen etwas anderen Weg zur Ableitung der betreffenden Formeln beschritten und im Anschluß daran die Bedeutung der Erkenntnis vor allem für die Transformation photogrammetrischer Maschinenkoordinaten in Landeswerte demonstriert.

Hat man jedoch Ursache anzunehmen, daß bei den Einpassungen der Maßstab etwa in zwei aufeinander senkrechten Richtungen unterschiedlich ist, dann wird man mit den Formeln der *affinen* Transformation

$$Y = ay + by + c \text{ und } X = dx + ex + f \quad \dots (1)$$

eine bessere Anpassung an die Soll-Werte der gemeinsamen Punkte erreichen, als mit der maßstabseinheitlichen Helmert-Umrechnung.

Die sechs Unbekannten in den beiden Formeln (1) lassen sich mit Hilfe von drei, beiden Systemen gemeinsamen Punkten bestimmen²⁾. Man kann sich nun auch

¹⁾ Prof. Dr. Ackermann (T. U. Stuttgart) hat dem Verfasser in freundlicher Weise mitgeteilt, daß auch er im Zuge einer Untersuchung zu denselben Ergebnissen gekommen ist, sie aber nicht veröffentlicht hat.

²⁾ Dieser Fall, also ohne Überbestimmung, wird von Lehmann in [3] auch kurz behandelt.

hier, ebenso wie in [4], die Frage stellen, mit welcher Genauigkeit (bei 3 *und mehr* Paßpunkten) eine solche *affine* Umrechnung eines an beliebiger Stelle liegenden Punktes vorgenommen werden kann, beziehungsweise wie die Punkte mit gleich großer Transformationsunsicherheit diesmal zu liegen kommen.

Bezeichnet man die laufenden Koordinaten, aus dem Maschinen-System etwa, mit ξ und η , die Koordinaten der Paßpunkte aus dem Maschinen-System mit x und y , die gegebenen Koordinaten der Paßpunkte (im Landes-System) mit X und Y , sowie die ins Landes-System umgerechneten Maschinen-Werte der Paßpunkte mit X' und Y' , dann ist

$$\begin{aligned} Y_1' &= a y_1 + b x_1 + c & X_1' &= d y_1 + e x_1 + f \\ Y_2' &= a y_2 + b x_2 + c & X_2' &= d y_2 + e x_2 + f \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} v_1^y &= Y_1 - Y_1' & v_1^x &= X_1 - X_1' \\ v_2^y &= Y_2 - Y_2' & v_2^x &= X_2 - X_2' \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Aus der grundlegenden Forderung nach dem Minimum der Summe der Verbesserungsquadrate ergeben sich 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten a, b, c, d, e, f der Transformationsformeln:

$$\left. \begin{aligned} a [yy] + b [yx] + c [y] &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - [yY] = 0 \\ a [yx] + b [xx] + c [x] &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - [xY] = 0 \\ a [y] + b [x] + c \cdot n &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - [Y] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d [yy] + e [yx] + f [y] &- [yX] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d [yx] + e [xx] + f [x] &- [xX] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d [y] + e [x] + f \cdot n &- [X] = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten der Umrechnungsgleichungen bekanntlich bestimmen mit:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{[y_r Y_r] [x_r x_r] - [x_r Y_r] [y_r x_r]}{[x_r x_r] [y_r y_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} \\ b &= \frac{[x_r Y_r] [y_r y_r] - [y_r x_r] [y_r Y_r]}{[x_r x_r] [y_r y_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} \\ d &= \frac{[y_r X_r] [x_r x_r] - [y_r x_r] [x_r X_r]}{[x_r x_r] [y_r y_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} \\ e &= \frac{[x_r X_r] [y_r y_r] - [y_r x_r] [y_r X_r]}{[x_r x_r] [y_r y_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} \end{aligned} \right\} \dots (3a)$$

Zur Berechnung dieser 4 Multiplikationskonstanten verwendet man vorteilhafterweise in beiden Systemen die auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte reduzierten Koordinaten y_r, x_r, Y_r, X_r .

Die Additionskonstanten c und f ergeben sich aus den Verschiebungen mit

$$c = + \frac{[Y]}{n} - a \frac{[y]}{n} - b \frac{[x]}{n} \quad f = + \frac{[X]}{n} - d \frac{[y]}{n} - e \frac{[x]}{n} \quad \dots (3b)$$

Für die nun folgenden Genauigkeitsüberlegungen geht man von einer allgemeinen Funktion F der 6 Unbekannten $a \dots f$ aus:

$$F = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e + \zeta f. \text{ Dann ist (symbolisch) } Q_{FF} = \frac{\delta F}{\delta a} Q_a + \frac{\delta F}{\delta b} Q_b + \frac{\delta F}{\delta c} Q_c + \frac{\delta F}{\delta d} Q_d + \frac{\delta F}{\delta e} Q_e + \frac{\delta F}{\delta f} Q_f.$$

Mit Hilfe der Tienstra'schen Merkregel ergibt sich damit der Gewichtsreziprokwert

$$\begin{aligned} Q_{FF} = & \left(\frac{\delta F}{\delta a}\right)^2 Q_{aa} + \left(\frac{\delta F}{\delta b}\right)^2 Q_{bb} + \left(\frac{\delta F}{\delta c}\right)^2 Q_{cc} + \left(\frac{\delta F}{\delta d}\right)^2 Q_{dd} + \left(\frac{\delta F}{\delta e}\right)^2 Q_{ee} + \left(\frac{\delta F}{\delta f}\right)^2 Q_{ff} \\ & + 2 \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\delta F}{\delta b} Q_{ab} + 2 \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\delta F}{\delta c} Q_{ac} + 2 \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\delta F}{\delta d} Q_{ad} + 2 \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\delta F}{\delta e} Q_{ae} + 2 \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\delta F}{\delta f} Q_{af} \\ & + 2 \frac{\delta F}{\delta b} \frac{\delta F}{\delta c} Q_{bc} + 2 \frac{\delta F}{\delta b} \frac{\delta F}{\delta d} Q_{bd} + 2 \frac{\delta F}{\delta b} \frac{\delta F}{\delta e} Q_{be} + 2 \frac{\delta F}{\delta b} \frac{\delta F}{\delta f} Q_{bf} + 2 \frac{\delta F}{\delta c} \frac{\delta F}{\delta d} Q_{cd} \\ & + 2 \frac{\delta F}{\delta c} \frac{\delta F}{\delta e} Q_{ce} + 2 \frac{\delta F}{\delta c} \frac{\delta F}{\delta f} Q_{cf} + 2 \frac{\delta F}{\delta d} \frac{\delta F}{\delta e} Q_{de} + 2 \frac{\delta F}{\delta d} \frac{\delta F}{\delta f} Q_{df} + 2 \frac{\delta F}{\delta e} \frac{\delta F}{\delta f} Q_{ef} \end{aligned}$$

und für die mittleren Fehler der beiden Koordinaten erhält man, entsprechend der allgemeinen Form $m_F = m_0 \sqrt{Q_{FF}}$

$$m_Y = m_1 \sqrt{Q_{YY}} \text{ und } m_X = m_2 \sqrt{Q_{XX}} \quad \dots (4)$$

wobei m_1 beziehungsweise m_2 die mittleren Restfehler in den beiden Koordinatenrichtungen bedeuten, getrennt wegen der schon zu Beginn festgelegten Möglichkeit verschiedener Genauigkeiten.

$$\text{Für } Y \text{ ist } \dots \frac{\delta F}{\delta a} = + y \quad \frac{\delta F}{\delta b} = + x \quad \frac{\delta F}{\delta c} = + 1 \quad \frac{\delta F}{\delta d} = \frac{\delta F}{\delta e} = \frac{\delta F}{\delta f} = 0,$$

$$\text{für } X \text{ ist } \dots \frac{\delta F}{\delta a} = \frac{\delta F}{\delta b} = \frac{\delta F}{\delta c} = 0 \quad \frac{\delta F}{\delta d} = + y \quad \frac{\delta F}{\delta e} = + x \quad \frac{\delta F}{\delta f} = + 1$$

und damit wird

$$\begin{aligned} Q_{YY} &= y^2 Q_{aa} + x^2 Q_{bb} + Q_{cc} + 2yx Q_{ab} + 2y Q_{ac} + 2x Q_{bc} \text{ sowie} \\ Q_{XX} &= y^2 Q_{dd} + x^2 Q_{ee} + Q_{ff} + 2yx Q_{de} + 2y Q_{df} + 2x Q_{ef}. \end{aligned}$$

Löst man das Normalgleichungsschema (2) in seiner allgemeinen Form auf, so kann man die Werte für $Q_{aa}, Q_{ab}, \dots, Q_{ff}$ übersichtlich bestimmen, Man erhält

$$\text{etwa für } Q_{aa} = \frac{1}{[yy]} + \frac{[yx]^2}{[yy]^2} \frac{[yy]}{[xx] - [yx]^2} + \frac{([xx \cdot 1][y] - [yx \cdot 1][yx])^2}{[yy]^2 [xx \cdot 1]^2 [n \cdot 2]}$$

und kann diese Formeln nach mehr oder weniger langen Umformungen und Zusammenfassungen in der folgenden übersichtlichen Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned} Q_{aa} &= \frac{[x_r x_r]}{[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} & Q_{ab} &= - \frac{[x_r y_r]}{[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} \\ Q_{ac} &= - \frac{[x_r x_r] [y] - [x_r y_r] [x]}{n \cdot ([y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r])} & Q_{ad} &= 0 \quad Q_{ae} = 0 \quad Q_{af} = 0 \\ Q_{bb} &= \frac{[y_r y_r]}{[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} & Q_{bc} &= - \frac{[y_r y_r] [x] - [x_r y_r] [y]}{n \cdot ([y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r])} \end{aligned}$$

$$Q_{bd} = 0 \qquad Q_{bc} = 0 \qquad Q_{bf} = 0$$

$$Q_{cc} = \frac{[y\ y][x\ x] - [x\ y][x\ y]}{n \cdot ([y_r\ y_r][x_r\ x_r] - [x_r\ y_r][x_r\ y_r])} \qquad Q_{cd} = 0 \qquad Q_{ce} = 0 \qquad Q_{cf} = 0.$$

(Dabei haben die auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte reduzierten Produktsummen die bekannte Bedeutung: $[y_r\ y_r] = [y\ y] - \frac{[y][y]}{n}, \dots$)

Da die Gleichungen 4, 5 und 6 des Schemas (2) denselben Bau haben wie die Gleichungen 1 bis 3, erhält man natürlich

$$Q_{dd} = Q_{aa} \qquad Q_{de} = Q_{ab} \qquad Q_{df} = Q_{ac} \qquad Q_{ee} = Q_{bb} \qquad Q_{ef} = Q_{bc} \qquad Q_{ff} = Q_{cc}.$$

Setzt man dann die so ermittelten Koeffizienten in die Gleichungen (4) ein, erhält man für den totalen mittleren Punktlagefehler $M = \pm \sqrt{m_y^2 + m_x^2} = \pm \sqrt{m_1^2 (y^2 Q_{aa} + x^2 Q_{bb} + Q_{cc} + 2\ y\ x\ Q_{ab} + 2\ y\ Q_{ac} + 2\ x\ Q_{bc}) + m_2^2 (y^2 Q_{aa} + x^2 Q_{bb} + Q_{cc} + 2\ y\ x\ Q_{ab} + 2\ y\ Q_{ac} + 2\ x\ Q_{bc})} = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \cdot \sqrt{\dots}$

was nach längeren Umformungen schließlich zu folgender Formel führt:

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{[x_r\ x_r] y_r^2 - 2 [x_r\ y_r] y_r\ x_r + [y_r\ y_r] x_r^2}{[y_r\ y_r][x_r\ x_r] - [x_r\ y_r][x_r\ y_r]}} \dots (5)$$

Da $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ den mittleren Einheitsfehler gibt und für jede Umformung konstant ist, ebenso wie die Anzahl der gemeinsamen Punkte n und der Nenner des zweiten Summanden der zweiten Wurzel, so erhält man den geometrischen Ort aller Punkte, für die $M = \text{const}$ ist, wenn man den Zähler des zweiten Summanden $[x_r\ x_r] y_r^2 - 2 [x_r\ y_r] y_r\ x_r + [y_r\ y_r] x_r^2 = \text{const}$ setzt.

Diese Funktion ist aber bekanntlich die Mittelpunktsform einer Kegelschnittsgleichung. Will man jenen Winkel α bestimmen, um den die Hauptachsen des Kegelschnittes gegen das gegebene System verdreht sind sowie die Größen der beiden Hauptachsen A und B , dann muß man die Koordinaten y und x allgemein durch die Koordinaten des Kegelschnittshauptachsensystems ξ und η ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cdot \cos \alpha - \eta \cdot \sin \alpha \\ y &= \eta \cdot \cos \alpha + \xi \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Aus der Forderung $[x_r\ x_r] y_r^2 - 2 [x_r\ y_r] y_r\ x_r + [y_r\ y_r] x_r^2 = A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2$ ergeben sich nach Einführung der Beziehungen (6) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} t g\ 2\alpha &= \frac{2 [x_r\ y_r]}{[x_r\ x_r] - [y_r\ y_r]} \\ A^2 &= [x_r\ x_r] \sin^2 \alpha - 2 [x_r\ y_r] \sin \alpha \cos \alpha + [y_r\ y_r] \cos^2 \alpha \\ B^2 &= [x_r\ x_r] \cos^2 \alpha + 2 [x_r\ y_r] \sin \alpha \cos \alpha + [y_r\ y_r] \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Die Antwort auf die zu Beginn der Betrachtungen gestellte Frage lautet daher: *Bei einer ebenen, affinen Transformation ergeben sich — schon allein aus der Unsicherheit in den Umrechnungselementen — Fehlereinflüsse in der Form, daß alle Punkte, die den gleichen totalen, mittleren Punktlagefehler zu erwarten haben, auf Ellipsen liegen, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte zusammenfällt, und die, auf die Hauptachsen der Ellipsen bezogen, die Form haben*

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \sqrt{\frac{1}{i} + \frac{A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2}{[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]}} \dots (5a)$$

wobei die Halbachsenwerte A und B sowie der Winkel α , unter dem die $+$ ξ -Achse gegen die $+$ x -Achse des Ausgangs-Systemes verdreht ist, nach den Formeln (7) zu berechnen sind.

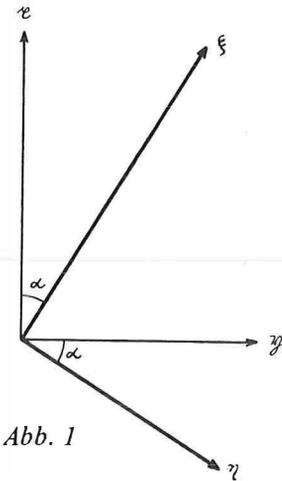


Abb. 1

Den Nenner des 2. Summanden kann man durch geeignete Zusammenfassung auch in der Form schreiben

$$[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r]^2 = [y_r^2 \cdot 1 + y_r^2 \cdot 2 + \dots] [x_r^2 \cdot 1 + x_r^2 \cdot 2 + \dots] - [x_{r1} y_{r1} + x_{r2} y_{r2} + \dots]^2 = \dots = [(y_{r1} x_{r2} - x_{r1} y_{r2})^2 + (y_{r1} x_{r3} - x_{r1} y_{r3})^2 + \dots].$$

Das heißt, der Nenner besteht aus einer Summe von Quadraten, kann also niemals eine negative Größe sein!

Versucht man nun noch die letztgenannte Form mit Hilfe der Gleichungen (6) in das ξ, η -System zu drehen, dann findet man, daß $[(y_{r1} x_{r2} - x_{r1} y_{r2})^2 + \dots] = \{(\xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha)(\eta_2 \cos \alpha + \xi_2 \sin \alpha) - (\xi_2 \cos \alpha - \eta_2 \sin \alpha)$

$(\eta_1 \cos \alpha + \xi_1 \sin \alpha)\}^2 + \dots = \dots = (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 \eta_3 - \eta_1 \xi_3)^2 + \dots$ ist, das heißt, daß der Nenner des 2. Summanden auch von der jeweiligen Verdrehung des lokalen Koordinatensystems unabhängig ist!

Faßt man Zähler und Nenner des Quotienten für $\tan 2\alpha$ (1. Gleichung (7)) als Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes auf, dann ist die Hypotenuse

$$W = \sqrt{([x_r x_r] - [y_r y_r])^2 + 4 [x_r y_r]^2} \dots (8)$$

Bildet man nun die Differenz der Quadrate der beiden Ellipsenhalbachsen $B^2 - A^2 = ([x_r x_r] - [y_r y_r]) \cdot \cos 2\alpha + 2 [x_r y_r] \sin 2\alpha$ und bedenkt, daß $\sin 2\alpha = \frac{2 [x_r y_r]}{W}$ und $\cos 2\alpha = \frac{[x_r x_r] - [y_r y_r]}{W}$ ist, dann wird $B^2 - A^2 = W \dots (9a)$

Die Summe der Quadrate der beiden Ellipsenhalbachsen (siehe (7), zweite plus dritte Gleichung) ist $B^2 + A^2 = [x_r x_r] + [y_r y_r] \dots (9b)$

so daß

$$\left. \begin{aligned} 2 B^2 &= [\overline{s_r s_r}] + W \\ \text{und } 2 A^2 &= [\overline{s_r s_r}] - W \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ist, da ja $[x_r x_r] + [y_r y_r] = [\overline{s_r s_r}]$, also gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen der einzelnen Paßpunkte vom Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte ist.

Setzt man aus Gleichung (8) $\dots [y_r x_r]^2 = \frac{W^2 - [x_r x_r - y_r y_r]^2}{4}$ in $[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r]^2$ ein, dann kann man den schon oben untersuchten Nenner des 2. Summanden

in einer Form schreiben, die nach Ansicht des Verfassers für die Praxis die günstigste ist $\dots ([\overline{s_r s_r}] - W)([\overline{s_r s_r}] + W) : 4$.

Damit geht die allgemeine Form (5) schließlich in

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2 \{([\bar{s}_r \bar{s}_r] - W) \xi^2 + ([\bar{s}_r \bar{s}_r] + W) \eta^2\}}{([\bar{s}_r \bar{s}_r] - W) ([\bar{s}_r \bar{s}_r] + W)}} \quad \dots (5b)$$

über, die sich für $\xi = \eta$ (also für die Punkte, die auf den Winkelhalbierenden zwischen den ξ - und η -Achsen liegen) weiter vereinfacht

$$M_{\xi = \eta} = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2 [\bar{s}_r \bar{s}_r] s_r^2}{([\bar{s}_r \bar{s}_r] - W) ([\bar{s}_r \bar{s}_r] + W)}} \quad \dots (5c),$$

wobei \bar{s}_r die Abstände der gemeinsamen Paßpunkte von deren Schwerpunkt und s_r nichts anderes als die Schwerpunktsentfernung des jeweils umzuformenden Punktes darstellen.

Wäre man nun versucht, die hier betrachtete Transformation mit der in [4] dargelegten zu vergleichen, dann müßte man zuerst jene Paßpunktverteilung voraussetzen, die auch bei der Affinumrechnung zu Kreisen führt. Das wäre nur dann der Fall, wenn $A = B$, also — entsprechend (9a) — $W = 0$ gäbe. Die einfachste derartige Paßpunktverteilung zeigt Abb. 2.

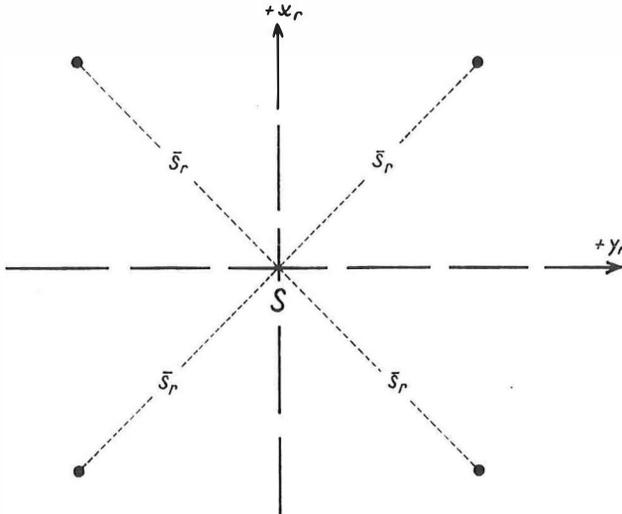


Abb. 2

Hier ist $[x_r, x_r] = [y_r, y_r]$ und $[x_r, y_r] = 0$, daher ... $W = 0$. Damit wird bei der Affintransformation (für einen mittleren *Punktlagefehler* = 1)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 s_r^2}{[\bar{s}_r \bar{s}_r]}}, \quad \text{während sich}$$

bei der Helmert-Transformation $\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s_r^2}{[\bar{s}_r \bar{s}_r]}}$ ergibt, wenn man die Formel (3) von [4]*) in der hier üblichen Bezeichnungsweise schreibt.

Vergleicht man nun die entsprechenden μ -Werte miteinander, dann würde man eigentlich erwarten, daß die beiden Ausdrücke genau gleich wären. Man hat

*) In [4] sind die Gleichungen alle auf einen mittleren *Koordinaten-Fehler* bezogen, so daß man, um auch dort auf den mittleren *Punktlage-Fehler* zu kommen, den Faktor 2 unter der Wurzel nach vorne nehmen und daher die Formel (3) dann dort heißen muß

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{s_r^2}{[y_r, y_r] + [x_r, x_r]}}$$

im ersten Moment den Verdacht, daß sich in den Formeln ein Fehler eingeschlichen haben müßte. Dem ist aber nicht so! Stellt man nämlich die entsprechenden Gewichtskoeffizienten der Helmert- denen der Affintransformation gegenüber, dann sieht man, daß *diese* schon den doppelten Wert geben:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Helmert:} & \text{affin:} \\
 Q_{aa} = \frac{1}{[y_r y_r + x_r x_r]} = \frac{1}{2 [y_r y_r]} & Q_{aa} = \frac{1}{[y_r y_r] [x_r x_r] - [x_r y_r] [x_r y_r]} = \frac{1}{[y_r y_r]} \\
 Q_{ab} = 0 & Q_{ab} = 0 \\
 Q_{ac} = \frac{[y]}{2n [y_r y_r]} & Q_{ac} = \frac{[y]}{n [y_r y_r]} \\
 Q_{bb} = \frac{1}{2 [x_r x_r]} & Q_{bb} = \frac{1}{[x_r x_r]} \\
 Q_{bc} = \frac{[x]}{2n [x_r x_r]} & Q_{bc} = \frac{[x]}{n [x_r x_r]} \\
 Q_{cy} = \frac{1}{n} + \frac{[y]^2 + [x]^2}{2n^2 [y_r y_r]} & Q_{cc} = \frac{1}{n} + \frac{[y]^2 + [x]^2}{n^2 [y_r y_r]}
 \end{array}$$

Es sind also ausschließlich in den quadratischen Gewichtskoeffizienten der Ursprungsverschiebungen und dort auch nur die Anteile der Punktzahlen n bei Helmert- und Affintransformation gleich, nämlich $1/n$. Der Einfluß der Punktlagen aber ist bei diesen Koeffizienten, ebenso wie bei allen anderen (quadratischen und gemischten) Q -Werten in der Helmert-Umrechnung nur halb so groß wie in der affinen! Das heißt aber, daß die Punktlage der Paßpunkte bei der affinen Umrechnung viel mehr ins Gewicht fällt, daß diese gewissermaßen einen anderen Maßstab anlegt, als die Helmert'sche. Und diese Erkenntnis wird bei der Diskussion der Beispiele noch besonders augenfällig werden. (Schluß folgt)

Moderne physikalische Orientierungsmethoden

Von *Kornelius Peters*, Wien

(Veröffentlichungen des Institutes für Landes- und Katastervermessung der Technischen Hochschule Wien)

(Schluß)

Aus (18) berechnet man Tabelle 1:

1	2	3	4	5	6	7	8		9	10
2*)	3,5	14	3,0*)	3,0*)	0,9*)	2,5*)
3	7,0	17	2,4	2,4	2,4	.	.	.	1,0	2,5
5	14,0	24	2,4	2,0	1,4	1,8	2,0	3,2	1,0	2
7	21,0	31	2,4	1,7	1,1	1,5	2,0	3,2	3,5	3,5
16	52,5	62	2,4	1,0	0,6	—	2,0	3,2	3,5	... 3,5
									1,2	1,5

*) siehe Kapitel I. 1.4.5!

Ramsayer, K.: Vorschlag für eine Schwerekarte für Hügelland und Mittelgebirge ohne Berechnung der topographischen Reduktion, DGK, Reihe B, 104, 1963.

Uotila, U. A.: Physical Geodesy, U. S. National Report 1963–1967, IUGG ass. 1967, Transactions, AGU, 48 (2), 358–363, 1967.

Wolf, H.: Die Sitzungen der Sektion V – Physikalische Geodäsie, Sonderheft der Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 13, Berichte zur XIV. Generalversammlung der IUGG – Assoziation für Geodäsie – im September/Oktober 1967 in Luzern, Stuttgart 1968.

Kartenmaterial

Schleusener, A.: Karte der mittleren Höhen von Zentraleuropa, DGK, Reihe B, 60, 1959.

Senftl, E.: Karte der mittleren Höhen von Österreich. Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1966.

Carta quadrettata delle altitudini medie dell'Italia e delle regioni limitrofe . . . , Commissione Geodetica della Repubblica Italiana, Istituto Geografico Militare, 1960.

Österreichische Karte, 1:25000 und 1:50000.

In welchem Maß können affine Transformationen durch die Auswahl der Paßpunkte beeinflusst werden?

Von *Josef Kovarik*, Wien

(Schluß)

Schließlich sei noch kurz auf die Dimension des sich ergebenden Punktlagefehlers eingegangen. Sie wird bestimmt durch die Einheit des *Punktlageeinheitsfehlers* (dm oder cm). Der 2. Summand unter der 2. Wurzel enthält im Nenner ebenso wie im Zähler die 4. Potenz von Längen. Man wird daher die Paßpunkte vorteilhafterweise in einem solchen Maßstab (auf Millimeterpapier etwa) kartieren, daß man handlich damit arbeiten, also die Entfernungen der Paßpunkte von ihrem Schwerpunkt, z. B. in cm-Einheiten, leicht ablesen kann.

Zuerst seien die Verhältnisse an einer Affintransformation mit 3 Punkten dargestellt. Diese läßt, da sie keine Überbestimmungen enthält, keinen Einheitsfehler aus den Restfehlern der Einpassung rechnen. Nichtsdestoweniger enthält aber auch sie die Einflüsse der unvermeidlichen Fehler und man wird i. a. entweder aus der Erfahrung oder aus anderen Überlegungen heraus zumindest einen Näherungswert für die Einheit bestimmen können (Genauigkeit der terrestrischen Einmessungen bzw. Genauigkeit der maschinellen Auswertungen).

In Abb. 3 wurden im Original die Punkte 1, 2, 3 mit Hilfe ihrer Landeswerte im Maßstab 1:10000 kartiert**). Den Schwerpunkt S der 3 Punkte bildet man leicht und mißt sodann die auf S reduzierten Koordinaten der Punkte . .

1	$y_r = -6,8 \text{ cm}$	$x_r = +7,1 \text{ cm}$
2	+ 3,2	+ 6,8
3	+ 3,6	- 13,9

Mit dem Rechenschieber bildet man $[y_r, y_r] = 69,6$ $[x_r, x_r] = 290,5$ $[x_r, y_r] = -76,8$

und kann damit rechnen $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \cdot 76,8}{290,5 - 69,6} = -0,695 \dots \alpha = 180,7^\circ$.

***) Für den Druck wurden die Abbildungen 3, 4 und 5 auf $1/3$ verkleinert.

Da $[\bar{s}_r \bar{s}_r] = [x_r \ x_r + y_r \ y_r] = 360$ und $W = \sqrt{220,92 + 153,6^2} = 269$ ist, wird der aus der Transformation zu erwartende Punktlagefehler (für einen mittleren Punktlageeinheitsfehler = 1) nach (5b)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2 \{ (360 - 269) \xi^2 + (360 + 269) \eta^2 \}}{(360 - 269)(360 + 269)}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2(91\xi^2 + 629\eta^2)}{91 \cdot 629}}$$

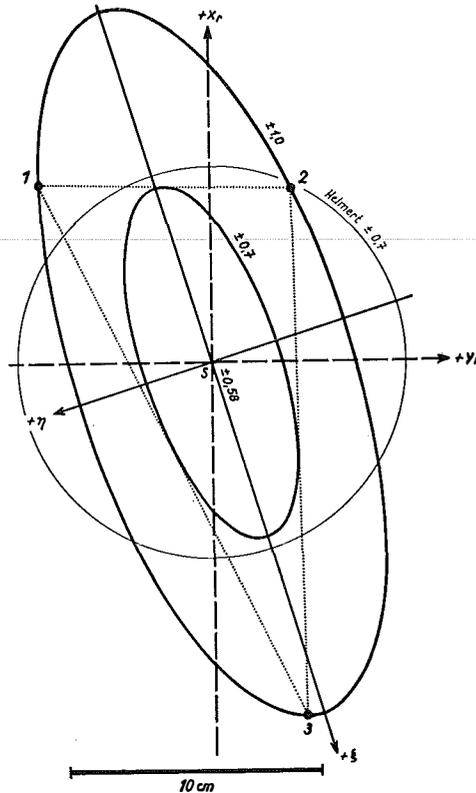


Abb. 3

Für $\mu = \pm 1$ (natürlich muß man jetzt auch ξ und η in cm eingeben) und
 $\eta = 0$ ergibt sich $\xi^2 = 210 \dots \xi = \pm 14,5$ cm,
 bzw. $\xi = 0$ ergibt sich $\eta^2 = 30,3 \dots \eta = \pm 5,5$ cm.
 Für $\mu = \pm 0,7$ und $\eta = 0$ wird $\xi^2 = 52,6 \dots \xi = \pm 7,2$ cm,
 $\xi = 0$ wird $\eta^2 = 7,6 \dots \eta = \pm 2,7$ cm.

Konstruiert man mit den so gewonnenen Werten die beiden Ellipsen (in dem, unter dem Winkel α gegen das x , y -geneigten ξ , η -System), dann sieht man 1. daß die Ellipse für $\mu = \pm 0,7$ die Verbindungslinien der 3 gegebenen Punkte jeweils in der Mitte berührt (was $\pm 1/\sqrt{2}$ entspricht), 2. daß die Ellipse für $\mu = \pm 1$ durch die 3 gegebenen Punkte hindurch geht, was auch verständlich ist, wenn man bedenkt, daß keine Überbestimmung vorhanden ist, also die Punkte, die zur Berechnung der Transformationselemente herangezogen werden, den Einheitsfehler haben müssen.

Das Gesamtbild aber zeigt die wesentlich bessere Anpassung an die gegebenen Punkte im Vergleich zu den entsprechenden Größen für eine Helmert-Umrechnung. Trotzdem die y -Erstreckung der Figur nicht einmal die Hälfte der x -Ausdehnung aufweist, gibt Helmert in beiden Koordinatenrichtungen *dieselbe* (größere) Genauigkeit. Es genügt daher bei Helmert schon eine gewisse Anzahl identer Punkte, die alle mehr oder weniger nur *eine* Richtung der zu bearbeitenden Fläche gut erfassen, um etwa den Maßstab scheinbar genau zu bekommen. Daß aber die Voraussetzung dafür, also dieselbe Maßstabsgenauigkeit in *beiden* Modellerstreckungen, etwa bei der Verwendung von Film, im allgemeinen angezweifelt werden muß, ist bekannt (Siehe z. B. [5]).

Im nächsten Beispiel (Abb. 4) wurde ein 4. Punkt zu den 3 Punkten des ersten Beispiels hinzugefügt, so daß jetzt eine einfache Überbestimmung vorliegt. Aus der Kartierung entnimmt man wieder die auf den Schwerpunkt der 4 gemeinsamen Punkte reduzierten Koordinaten und bildet

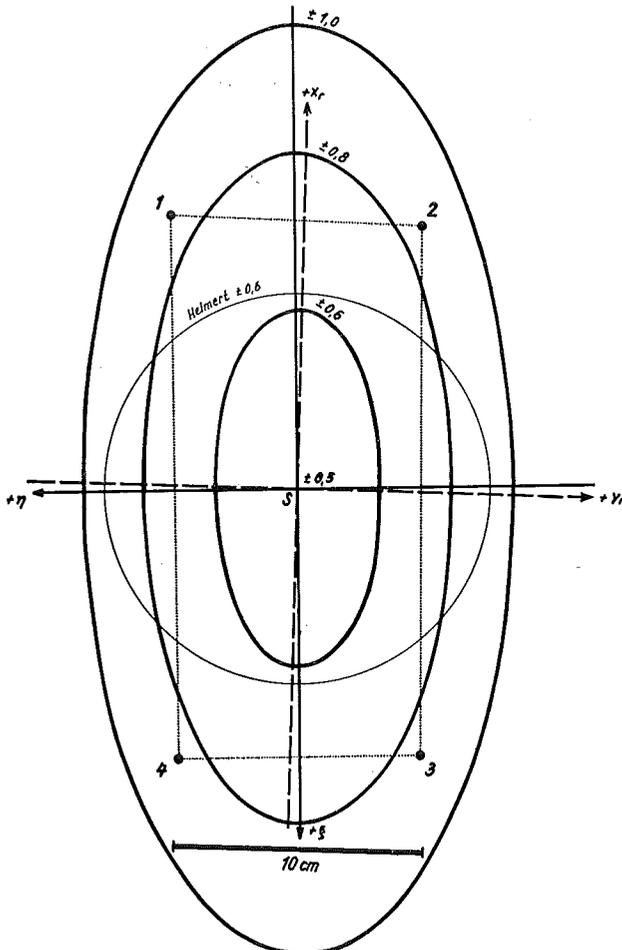


Abb. 4

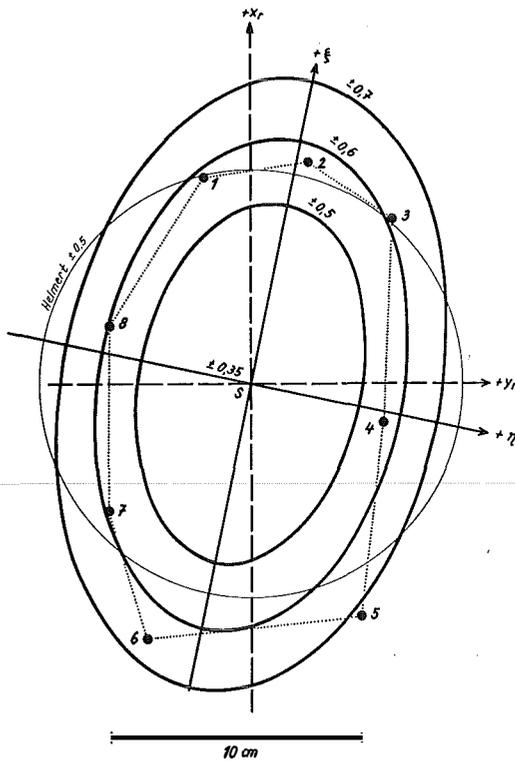


Abb. 5

y_r -Differenzen, dann wird $[y_r, y_r] > [x_r, x_r]$. Da in beiden Fällen $[y_r, x_r]$ ein mehr oder weniger kleiner, positiver oder negativer Wert sein wird, erhält man im ersten Fall 2α im 1. oder 4. Quadranten, im zweiten Fall im 2. oder 3. Quadranten. Daher wird die große Halbachse bei $[x_r, x_r] > [y_r, y_r]$ in S um die x_r -Achse pendeln, bei $[y_r, y_r] > [x_r, x_r]$ um die y_r -Achse. Je kleiner die Differenz zwischen $[x_r, x_r]$ und $[y_r, y_r]$ wird, umso weniger läßt sich die Lage der großen Halbachse voraussagen, umso geringer wird aber i. a. auch der Unterschied der beiden Halbachsenlängen. Im Grenzfall schließlich, wenn $\operatorname{tg} 2\alpha \rightarrow \frac{0}{0}$ geht, wird α unbestimmt, was mit $W \rightarrow 0$ zu $A \rightarrow B$ führt, die Ellipse also in einen Kreis übergeht. Andererseits, je mehr die Paßpunkte in einer Koordinatenrichtung zusammenrücken, umso größer wird die Differenz $[x_r, x_r - y_r, y_r]$, umso größer wird dann auch W und damit der Unterschied zwischen der großen und der kleinen Halbachse! Sind schließlich die Paßpunkte im 1. und 3. (bzw. 2. und 4.) Quadranten zusammengedrängt, dann wird $[y_r, x_r]$ einen im Verhältnis zu $[x_r, x_r - y_r, y_r]$ großen, positiven (bzw. negativen) Wert erreichen, so daß die ξ -Achse etwa in der Winkelhalbierenden der x_r - und y_r -Achsen zu liegen kommen wird.

Ein Faktor, der bisher immer nur am Rande Erwähnung gefunden hat, ist der Einheitsfehler. Ist man davon überzeugt, daß die Helmert-Transformation jede systematische Beeinflussung der Umrechnungsdaten erfaßt (oder bleibt einem auf Grund der Paßpunktlagen nichts anderes übrig) dann ist man gezwungen die übrig-

bleibenden Fehler der gemeinsamen Punkte als rein zufällige anzusehen. Hat man aber die oben genannte Überzeugung *nicht*, dann wird man die in Frage kommende Umrechnung der gemeinsamen Punkte auch affin versuchen. Sind dann die übrigbleibenden Fehler in beiden Fällen von derselben Größenordnung, so wird man mit einer gewissen Sicherheit sagen können, daß auch die Helmert-Transformation genügend genau ist — wenn nur die Verteilung der gemeinsamen Punkte eine gewisse Flächenhaftigkeit aufweist!

Sind aber wesentliche Unterschiede zwischen beiden Restfehlersystemen, dann ist i. a. die einfachere auch die unsichere Berechnungsart.

Ein Beispiel aus der Praxis soll das deutlich machen. Gegeben waren 4 Paßpunkte eines Modelles in Form eines stehenden Rechteckes³⁾ (ca. 1 km × 2 km Ausdehnung), Restfehler nach einer

<p><i>Helmert-Umrechnung</i></p> <p>– 23 cm – 2 cm</p> <p>+ 12 cm + 17 cm</p> <p>– 10 cm – 20 cm</p> <p>+ 20 cm + 5 cm</p> <p>$[v_y v_y + v_x v_x]_{He} = 1891$</p>	<p>hingegen nach <i>Affintransformation</i></p> <p>+ 2 cm – 1 cm</p> <p>– 2 cm + 1 cm</p> <p>– 2 cm + 1 cm</p> <p>+ 2 cm – 1 cm</p> <p>$[v_y v_y + v_x v_x]_{Af} = 20$</p>
--	---

Rechnet man dann in beiden Fällen (nach den klassischen Formeln) einen mittleren Punktlagefehler, ergibt sich im ersten Fall ± 31 cm, im zweiten $\pm 4,5$ cm. Daß in solchen Fällen nicht nur der Unterschied in der Umrechnungsart, sondern auch der ermittelte Einheitsfehler von großer Bedeutung ist, liegt auf der Hand. (Schließlich muß man sich noch vergegenwärtigen, daß auch der Wert des Einheitsfehlers bei minimalster Überbestimmung nur wenig Sicherheit bietet⁴⁾ und daher auch aus diesem Grund eine größere Anzahl von Paßpunkten vorteilhafter ist.)

Die vom Verfasser in [4] aufgezeigten Möglichkeiten durch Flächenunterteilung bzw. teilweise Überdeckungen im gesamten Raum die verschiedenen großen Transformationseinflüsse auszugleichen, gelten natürlich sinngemäß auch hier nach affinen Umrechnungen.

Zum Schluß soll noch kurz auf das Zusammenwirken der verschiedenen Fehlerinflüsse hingewiesen werden. Stellt man sich in Abb. 6 einen Schnitt durch den Schwerpunkt S der gemeinsamen Punkte vom 3. Beispiel (Abb. 5) vor und trägt die mittleren Punktlagefehler als Ordinaten auf, so wird, bei einem gegebenen mittleren Einpaßeinheitsfehler von ± 30 cm, mit zunehmender Entfernung von S die mittlere, aus der Transformation zu erwartende Lageunsicherheit, entsprechend den eingezeichneten Kurven zunehmen. Wären die Paßpunkte, im Landes-System etwa, nur mit geringer Genauigkeit bestimmt worden (z. B. tachymetrisch), dann würde der in der Bestimmung der Maschinenwerte enthaltene verhältnismäßig kleine Fehler von den in diesem Fall großen Transformationsfehlerinflüssen überdeckt werden. An Hand der Formeln (5) könnte man aber jetzt feststellen, wieviele Paßpunkte von der genannten geringen Genauigkeit vonnöten wären, wollte man doch eine derartige Sicherheit

³⁾ Cronarfilm-Aufnahmen 23 cm × 23 cm.

⁴⁾ Die mittlere Unsicherheit der oben genannten Punktlageeinheitsfehler ist näherungsweise ± 16 cm beziehungsweise ± 3 cm.

in den Umrechnungsgrößen erhalten, daß die Fehler in den Ausgangs-Werten die entscheidenden, im Endergebnis bestimmenden, sein sollten. Man findet dann für etwa 20 Punkte (in der durchschnittlichen Entfernung der Punkte 1 bis 8) die in Abb. 6 strichlierte Linie. Die Genauigkeit würde somit — zumindest in der Mitte des Arbeitsraumes — nicht mehr wesentlich durch die Umrechnungsunsicherheit verfälscht werden. Das überhaupt mögliche Maximum aber ist dann zu erreichen, wenn man von *allen* umzuformenden Punkten Näherungswerte mit einem gewissen Punktlagefehler m_0 hat. An Hand der Formeln kann man ja leicht den — jetzt kleinsten — Einfluß der Umrechnung ermitteln und beurteilen, ob die Genauigkeit der Ausgangs-Werte durch die Transformation überhaupt noch beeinflusst wird.

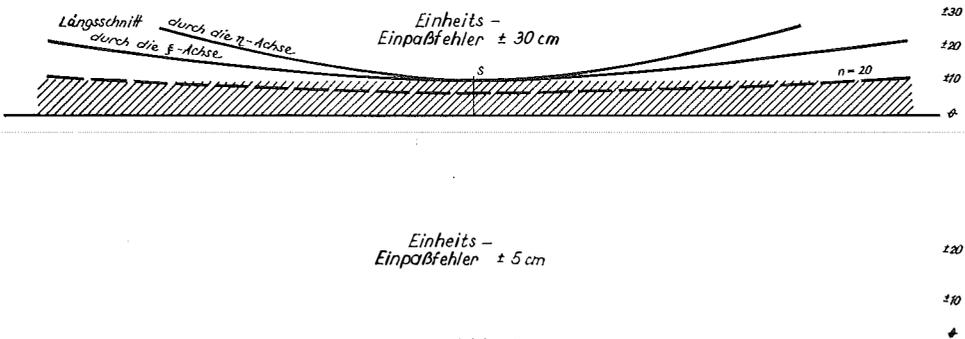


Abb. 6

Liegt aber ein mittlerer Einpaßfehler von nur ± 5 cm vor, dann wird die mittlere, aus der Transformation zu erwartende Lageunsicherheit *schon mit den 8 identen Punkten des Beispiels* von den Meßgenauigkeiten — einer photogrammetrischen Auswertung etwa⁵⁾ — überdeckt und kann sich selbst daher nicht mehr störend bemerkbar machen! An den beiden Bändern der Abb. 6 ist gut zu ersehen, wie der Einfluß der Umrechnungsunsicherheit in den Ungenauigkeiten der Ausgangswerte untergeht.

Eine affine Transformation ist daher umso besser, je tiefer ihre Unsicherheitskurven in den Bereich der Meßgenauigkeit einsinken!

Zusammenfassung

Liegt eine Anzahl koordinatenmäßig gegebener Punkte in zwei verschiedenen Systemen vor, so gehen sie i. a. jeweils auf verschiedene Messungen zurück. Sie werden daher i. a. auch mit zwei verschiedenen, spezifischen Punktlageeinheitsfehlern behaftet sein, die ihren Ursprung in den jeweiligen zufälligen Messungsfehlern haben. Mit einer Auswahl solcher Punkte kann man jene Elemente rechnen, die die Punkte des Systems 1 in das System 2 affin umzurechnen gestatten. Diese Transformationsgrößen haben dann natürlich auch nur eine gewisse begrenzte Genauigkeit, die allerdings nicht zu verwechseln ist mit der Stellenanzahl, mit der man die einzelnen Werte bestimmen kann. Rechnet man danach die zwischen den gemeinsamen Punkten liegenden anderen Punkte in das System 2 um, so transformiert man damit nicht nur den mit einem zufälligen Messungsfehler behafteten System 1-Wert, sondern kann automatisch (schon allein durch die Umrechnung) eine weitere, zusätzliche Ungenauigkeit in den System 2-Wert hineinbringen! In welcher Art und Größe sich diese Unsicherheit der Transformationskonstanten bei affinen Umrechnungen in den umge-

5) Die hier mit ± 10 cm angenommen wurde.

formten Werten auswirken können, wird theoretisch (und an Hand von Beispielen auch praktisch) gezeigt. Es ergibt sich daraus die Erkenntnis, daß es nicht genügt, im lokalen Ausgangs-System 1 Koordinaten mit höchster Genauigkeit zu ermitteln, wenn sie in Punkte eines anderen Gebrauchssystems 2 eingepaßt werden müssen, kann doch die Präzision der Ausgangswerte durch die Umrechnung unter Umständen vollständig verloren gehen.

Es gilt also die Präzision der Ausgangswerte, die Unsicherheit der Transformation und die gewünschte Genauigkeit des Gebrauchssystems aufeinander abzustimmen. Dabei ist einerseits sowohl die *Anzahl* der Paßpunkte, als auch ihre *Lage* von Bedeutung, andererseits aber auch die Größe des mittleren Einheitseinpaßfehlers.

Literatur

- [1] *Rohrer*: Vorlesungen zur Technik des Katasterwesens, Wien 1941.
- [2] *Hallert*: Contribution to theory of errors for double point intersection in space, Transactions of the Royal Institute of Technology Nr. 35, Stockholm 1950.
- [3] *Lehmann*: Zur Transformation photogrammetrischer Maschinenkoordinaten in Landeskoordinaten, ZfV 1956/6.
- [4] *Kovarik*: Wird die Genauigkeit von Einzelmodellauswertungen durch die rechnerische Transformation der Maschinenkoordinaten beeinträchtigt? ÖZfV 1966/5.
- [5] *Kovarik*, Erfahrungen mit Cronarfilm bei einer großmaßstäblichen numerischen Punktbestimmung, ÖZfV 1967/6.

Einige vergleichende Betrachtungen zur Erfassung des Meßwerkes im Grundkataster in Österreich und in der CSSR

Von *Oldřich Válka*, Praha, CSSR

Der moderne Schritt des österreichischen Vermessungsdienstes zu der zahlenmäßigen Erfassung des Meßwerkes im Grundkataster wurde auch in der CSSR als Grundlage eines neuen Konzeptes angenommen.

Obwohl der österreichische Kataster, besonders nach Inkrafttreten des neuen Vermessungsgesetzes, BGBl. Nr. 306/1968, und der dazu gehörenden Vermessungsverordnung verschieden ist gegenüber den gegenwärtigen tschechischen und slowakischen Karten- und Bodenevidenzoperaten, lassen sich dennoch einige gemeinsame Ziele finden. Diese Ziele sind in dem Bestreben beider Vermessungsdienste zu suchen, ein möglichst gutes, modernes, genügend genaues und der Gesellschaft nützlichstes Werk zu bilden.

Nach dem genannten österreichischen Gesetz soll, außer den anderen Aufgaben des Vermessungsdienstes, der Grenzkataster „teilweise“ oder „allgemein“ angelegt werden. Im Grenzkataster sollen nur die Eigentumsgrenzpunkte genauer (numerisch und koordinatenmäßig) aufgenommen werden, während die Abgrenzungen der Benützungsarten (Bauwerke, Kulturen) sowohl numerisch als auch graphisch aufgenommen werden können.

Die Vermessung der Eigentumsgrenzpunkte muß an das Festpunktfeld angeschlossen werden. Man kann diese Punkte dann als Detailpunkte erster Ordnung auffassen. Die anderen Detailpunkte können von diesen Punkten erster Ordnung aus bestimmt werden und sind dann als Detailpunkte zweiter Ordnung zu betrachten.

Das tschechische und slowakische Meß- und Kartenwerk soll nach dem Vermessungsgesetz und dem Regierungserlaß (43/62) ein Werk werden, welches tech-