

Paper-ID: VGI_196913



Ergänzung zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen

Wilhelm Embacher ¹

¹ *Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **57** (4), S. 105–115

1969

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_196913,  
Title = {Erg{"a}nzung zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen},  
Author = {Embacher, Wilhelm},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {105--115},  
Number = {4},  
Year = {1969},  
Volume = {57}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION :

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1969

57. Jg.

Ergänzung zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen

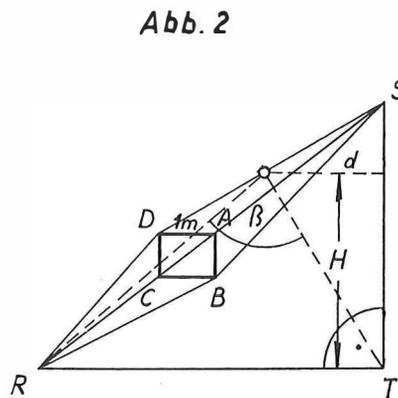
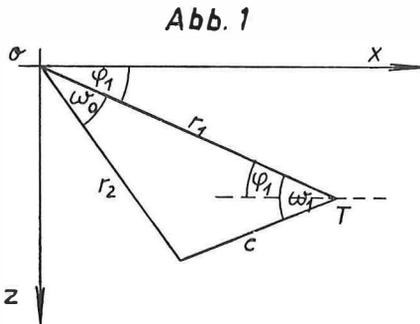
Von *Wilhelm Embacher*, Innsbruck

Zusammenfassung:

In Fortsetzung der vorangegangenen Arbeit [3] wird gezeigt, daß durch das Korrektionsglied $-\frac{\sigma}{2} \tan^2 \delta$ zur Gleichung 3,00 die mittlere Bodendichte durch Iteration gefunden wird.

In der Arbeit „Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg [2] wurde zur Berechnung der vertikalen Komponente der Anziehung eines Prismas mit dem in Abb. 1 beschriebenen Querschnitt, welches in der y -Richtung nach beiden Seiten eine wesentlich größere Ausdehnung hat, als in der x - und z -Richtung, folgende Formel von Helmert [4] verwendet:

$$P = 2k^2 \sigma r_1 \sin \omega_1 \left[\omega_0 \cos (\omega_1 - \varphi_1) - \sin (\omega_1 - \varphi_1) \ln \frac{r_1}{r_2} \right]. \dots 5,00$$



Die Formel 5,00 gibt für ein Modell, für welches c horizontal liegt und bei T ein rechter Winkel auftritt, für einen beliebigen Punkt (Abb. 2) folgende Vertikal-
komponente der Gesamtanziehung:

$$P_P = 2k^2\sigma \left(\beta H + d \ln \frac{\overline{PT}}{P\overline{S}} \right). \quad \dots 5,01$$

Bezeichnet man die Vertikal-
komponente der Anziehung des Prismas mit dem Querschnitt STR auf den Punkt A mit $(STR)_A$ und analog die Vertikal-
komponente des Prismas mit dem Querschnitt $BSTR$ auf B mit $(BSTR)_B$, mit dem Querschnitt STR auf C mit $(STR)_C$ und mit dem Querschnitt $DSTR$ auf D mit $(DSTR)_D$, so sind offenbar die Differenzen

$$(STR)_A - (DSTR)_D = (BSTR)_B - (STR)_C$$

und

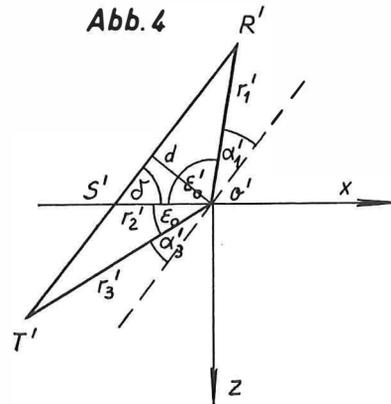
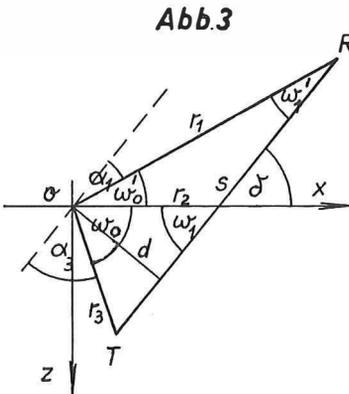
$$(STR)_C - (DSTR)_D = (BSTR)_B - (STR)_A$$

... 5,02

wenn die Entfernung der vier Punkte gegen Null konvergiert. In beiliegender Tabelle wurden für ein Modell, in welchem der Winkel bei R und S 45° beträgt, die Vertikal-
komponente der Anziehung für die Punkte A , B , C und D , für $AB = AD = 1\text{ m}$ in verschiedenen Höhen durchgerechnet und die wie in 5,02 berechneten Differenzen ausgewiesen.

Zur Berechnung der Horizontal- und Vertikalgradienten in Bezug auf unser Modell ist aber noch die Wirkung des schmalen Prismas mit dem Querschnitt DSR auf D , nach der obigen Schreibart $(DSR)_D$ und mit dem Querschnitt BSR auf B , also $(BSR)_B$ zu berücksichtigen (siehe [5]).

Die Vertikal-
komponente eines in y von $+$ bis $-$ unendlichen Prismas mit dem Querschnitt Abb. 3 kann in zwei Teile zerlegt werden:



ΔORS :

$$P_{1,0} = 2k^2\sigma d \left[\omega'_0 \cos (\omega'_1 + \omega'_0) - \sin (\omega'_1 + \omega'_0) \ln \frac{r'_1}{r'_2} \right] (\omega'_1 + \omega'_0) = \delta$$

$$P_{1,0} = 2k^2\sigma d \left[\omega'_0 \cos \delta - \sin \delta \ln \frac{r'_1}{r'_2} \right];$$

ΔOST :

$$P_{2,0} = 2k^2\sigma d \left[\omega_0 \cos \delta - \sin \delta \ln \frac{r_2}{r_3} \right];$$

also:

$$P_0 = P_{1,0} + P_{2,0} = 2k^2\sigma [(\omega_0 + \omega_0') \cos \delta + \sin \delta \ln \frac{r_3}{r_1}], \quad \dots 5,03$$

welche Formel natürlich auch direkt aus 5,00 mit $\varphi_1 = -\omega_0'$ und $(\omega_0 + \omega_0')$ als Winkel bei 0 hervorgeht.

Analog kann man die Formel für die Vertikalkomponente der Anziehungskraft auf O' (Abb. 4) anschreiben:

$$P_0' = -2k^2\sigma d [(\varepsilon_0 + \varepsilon_0') \cos \delta - \sin \delta \ln \frac{r_3'}{r_1'}]. \quad \dots 5,04$$

Zieht man in Abb. 3 die Parallele zu RT durch 0 und in Abb. 4 die Parallele zu $R'T'$ durch O' und bezeichnet die so entstandenen Winkel bei 0 bzw. O' mit α_1 , α_3 bzw. α_1' , α_3' , so ist in Abb. 3 abzulesen:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 180 - (\delta + \alpha_3) \\ \omega_0' &= \delta - \alpha_1 \\ \text{und } \omega_0 + \omega_0' &= 180 - (\alpha_1 + \alpha_3) \end{aligned}$$

Aus Abb. 4 sieht man

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \delta - \alpha_3' \\ \varepsilon_0' &= 180 - (\delta + \alpha_1') \\ \text{und } \varepsilon_0 + \varepsilon_0' &= 180 - (\alpha_1' + \alpha_3'). \end{aligned}$$

Die Formeln 5,03 und 5,04 gehen somit für $OS = O'S' = 1m$ über in

$$P_0 = 2k^2\sigma [(180 - (\alpha_1 + \alpha_3)) \sin \delta \cos \delta + \sin^2 \delta \ln \frac{r_3}{r_1}] \quad \dots 5,05$$

und

$$P_0' = -2k^2\sigma [(180 - (\alpha_1' + \alpha_3')) \sin \delta \cos \delta - \sin^2 \delta \ln \frac{r_3'}{r_1'}]. \quad \dots 5,06$$

Wieder sei das Dreieck RST der Querschnitt eines homogenen Prismas, welches sich in der y -Richtung von $-L$ bis $+L$ erstrecke; L sei wieder sehr groß gegenüber den Querschnittsdimensionen, dann ist der äußere Horizontalgradient die Differenz der Vertikalkomponente der Anziehung in A und D :

$$(STR)_A - (DSTR)_D + (DSR)_D.$$

Der innere Horizontalgradient läßt sich aus der Differenz der Wirkung auf B und auf C berechnen:

$$(BSTR)_B + (BSR)_B - (STR)_C.$$

Analog erhält man den äußeren Vertikalgradienten aus der Differenz der Vertikalkomponenten der Anziehungskraft auf C und D

$$(STR)_C - (DSTR)_D + (DSR)_D$$

und den inneren Vertikalgradienten aus der Wirkung auf B und auf A :

$$(BSTR)_B + (BSR)_B - (STR)_A.$$

Zur Berechnung der schmalen Dreiecke DSR und BSR kann man die Winkel α_1 und α_3 , bzw. α_1' und α_3' vernachlässigen, wenn man bedenkt, daß für den Horizontalgradienten $DA = CB = 1m$ und $r_3, r_1 \gg 1$, bzw. $r_3', r_1' \gg 1$ ist. Es gehen dann die Formeln 5,05 und 5,06 über in

$$(DSR)_D = 2k^2\sigma (\pi \sin \delta \cos \delta + \sin^2 \delta \ln \frac{r_3}{r_1}) \quad \dots 5,07$$

und

$$(BSR)_B = -2k^2\sigma (\pi \sin \delta \cos \delta + \sin^2 \delta \ln \frac{r_1'}{r_3'}) . \quad \dots 5,08$$

Setzt man ebenso $AB = CD = 1 m$, so gehen die Formeln 5,05 und 5,06 unter obiger Voraussetzung über in

$$(DSR)_{D'} = 2k^2\sigma (\pi \cos^2 \delta + \sin \delta \cos \delta \ln \frac{r_3}{r_1}) \quad \dots 5,09$$

und

$$(BSR)_{B'} = -2k^2\sigma (\pi \cos^2 \delta + \sin \delta \cos \delta \ln \frac{r_1'}{r_3'}) . \quad \dots 5,10$$

In Tab. 1 sind die Berechnungsergebnisse u. zw. die Vertikalkomponenten der Anziehung auf jeweils 4 Punkte A, B, C, D in den Höhen 900 m, 666 m, 500 m, 400 m, 333 m, 300 m, 250 m und 100 m über der Grundlinie RT in Einheiten $10^{-3}/2k^2\sigma$ mgal ausgewiesen. Jeweils in der 5. Spalte sind die Gradienten in denselben Einheiten berechnet und in Abb. 5 wurden diese graphisch dargestellt, (1 mm = 10^{-3} mgal).

Die Differenz der Vertikalgradienten setzt sich zusammen aus
 $V_i - V_a = (BSTR)_B + (BSR)_{B'} - (STR)_A - (STR)_C + (DSTR)_D - (DSR)_{D'}$
 und diese der Horizontalgradienten aus ... 5,11

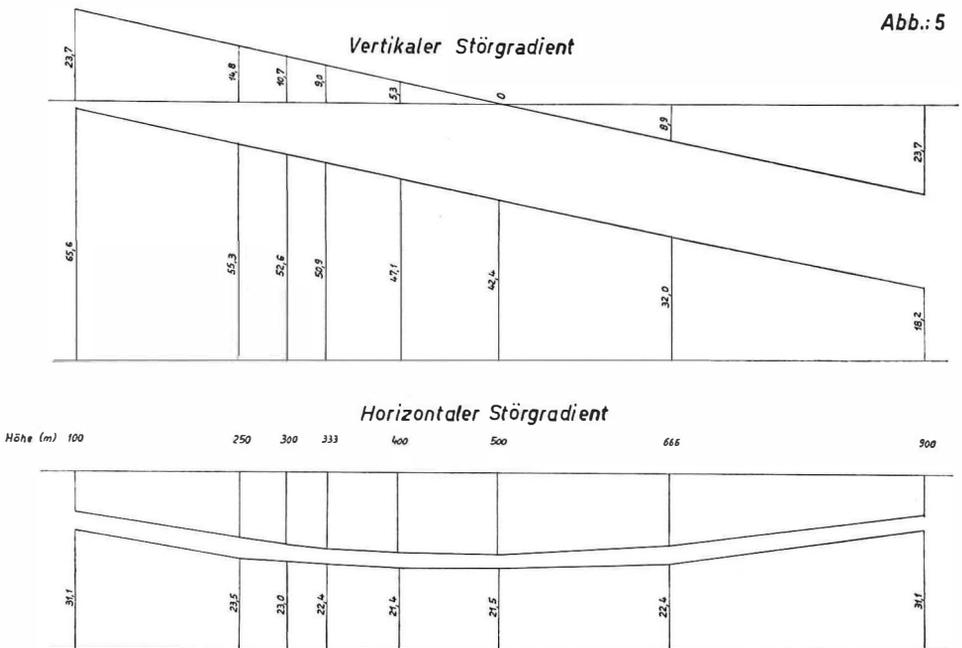
$$H_i - H_a = (BSTR)_B + (BSR)_B - (STR)_C - (STR)_A + (DSTR)_D - (DSR)_D.$$

Setzt man in 5,11 die Gleichungen 5,02 ein, so erhalten wir

$$V_i - V_a = (BSR)_{B'} - (DSR)_{D'} \quad \dots 5,12$$

und

$$H_i - H_a = (BSR)_B - (DSR)_D.$$



Um die Rechnung zu vereinfachen, wurde das 45°-Modell gewählt. Wir können aus diesem Modell einige wertvolle Erkenntnisse schöpfen:

Tabelle 1

Höhe (m)	H_a $2k \cdot \sigma \cdot 10^{-3} \text{mgal}$								
	(STR) <i>A</i>	-(DSTR) <i>D</i>	Diff.	+(DSR) <i>D</i>	(BSTR) <i>B</i>	(STR) <i>C</i>	Diff.	(BSR) <i>B</i>	I_i $2k \cdot \sigma \cdot 10^{-3} \text{mgal}$
900	991,1619	993,0241	-1,8622	+2,6694	990,2662	992,1239	-1,8627	-0,4671	-2,3298
666	985,6011	986,1331	-0,5320	+1,9158	984,4277	984,8848	-0,4571	-1,2234	-1,6805
500	786,9619	786,9675	-0,0056	+1,5703	785,3546	785,3988	-0,0362	-1,5689	-1,6051
400	611,5808	611,4158	+0,1650	+1,3680	609,8183	609,6499	+0,1684	-1,7714	-1,6030
333	475,6005	475,3653	+0,2352	+1,2238	473,7046	473,4696	+0,2350	-1,9173	-1,6823
300	404,0179	403,7571	+0,2608	+1,1472	402,0690	401,8066	+0,2624	-1,9929	-1,7305
250	290,5183	290,2236	+0,2947	+1,0244	288,3845	288,0910	+0,2935	-2,1144	-1,8209
100	-81,8403	-82,1845	+0,3442	+0,4666	-84,0896	-84,4269	+0,3373	-2,6694	-2,3321

Höhe (m)	V_a $2k \cdot \sigma \cdot 10^{-3} \text{mgal}$								
	(STR) <i>C</i>	-(DSTR) <i>D</i>	Diff.	+(DSR) <i>D</i>	(BSTR) <i>B</i>	-(STR) <i>A</i>	Diff.	(BSR) <i>B</i>	V_i $2k \cdot \sigma \cdot 10^{-3} \text{mgal}$
900	992,1289	993,0241	-0,8952	+2,6694	990,2662	991,1619	-0,8957	-0,4671	-1,3628
666	984,8848	986,1331	-1,2483	+1,9158	984,4277	985,6011	-1,1734	-1,2234	-2,3968
500	785,3988	786,9675	-1,5687	+1,5708	785,3546	786,9619	-1,6073	-1,5689	-3,1762
400	609,6499	611,4158	-1,7659	+1,3680	609,8183	611,5808	-1,7625	-1,7714	-3,5339
333	473,4696	475,3653	-1,8957	+1,2238	473,7046	475,6005	-1,8959	-1,9173	-3,8132
300	401,8066	403,7571	-1,9505	+1,1472	402,0690	404,0179	-1,9489	-1,9929	-3,9418
250	288,0910	290,2236	-2,1326	+1,0244	288,3845	290,5183	-2,1338	-2,1144	-4,2482
100	-84,4269	-82,1845	-2,2424	+0,4666	-84,0896	-81,8403	-2,2493	-2,6694	-4,9187

1. Bei der Bildung der Differenz der Gradienten kommt die Gesamtmasse nicht zum Tragen, sondern nur die Differenz der Anziehung der beiden schmalen Dreiecke SDR und SBR . Aus Abb. 5 ist ersichtlich, daß diese Differenz den gesamten Störgradienten in der vertikalen und horizontalen Richtung bildet. Für $\delta = 45^\circ$ beträgt er $2\pi k^2\sigma$ in beiden Richtungen.

2. Für die Höhe $H = 500$ m ist die Differenz aus der Vertikalkomponente der Anziehung auf Punkt A weniger der Anziehung auf Punkt C gleich $\pi k^2\sigma$. Das Gesamtmittel dieser Differenzen in allen Höhenlagen beträgt ebenfalls $\pi k^2\sigma$.

Für unser Modell lautet die Formel für die Vertikalkomponente der Anziehung auf einen Punkt, z. B. auf den Punkt C :

$$P_c/2k^2\sigma = \beta_c H_c + d \ln \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}}. \quad \dots 5,13$$

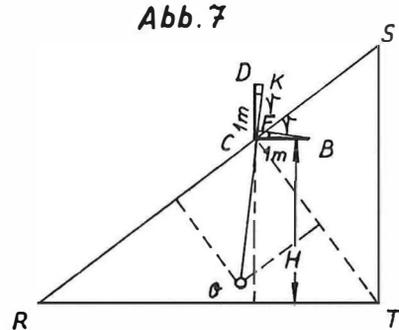
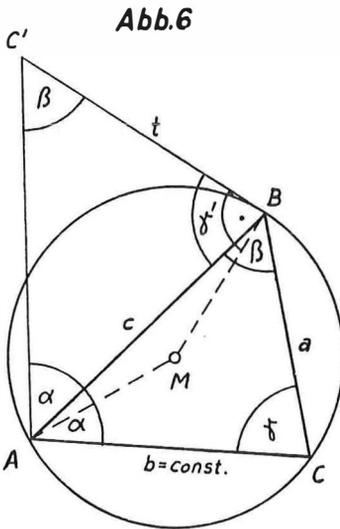
Die Änderung der Anziehung findet man demnach

$$\Delta P_c/2k^2\sigma = \Delta\beta_c H_c + \beta_c \Delta H_c + \text{Änderung des zweiten Gliedes.} \quad \dots 5,14$$

Für den Horizontalgradienten ist $\Delta H = 0$. Für den Vertikalgradienten ist

$$\Delta H = 1 \text{ m.}$$

Allgemein läßt sich die Änderung des Scheitelwinkels β aus der Änderung des Umkreisradius darstellen.



γ und γ' sind als Sehnentangentenwinkel gleich groß. Trägt man den Winkel α in A nach außen auf, so schneidet sich die so entstandene Gerade mit der Tangente in B im Punkt C' . Da die Dreiecke ABC und $AC'B$ ähnlich sind, läßt sich die Änderung von β linear als $p\beta$ wie folgt ausdrücken:

$$p\beta = t \frac{\Delta\beta''}{\rho''}.$$

Da aber

$$\frac{t}{c} = \frac{a}{b}$$

und

$$t = \frac{ac}{b}$$

ist, folgt

$$p\beta = \frac{ac}{b} \frac{\Delta\beta''}{\rho''} = \frac{ac}{b} \Delta\hat{\beta}.$$

Gehen wir wieder in Abb. 7 auf unser Modell über und ist $\Delta\beta$ die Änderung des Winkels β wegen der Verschiebung von C nach D und $\Delta\beta'$ die Änderung von β auf Grund der Verschiebung von C nach B , so gilt

$$\Delta\beta = \frac{\overline{KC} \cdot \overline{RT}}{\overline{RC} \cdot \overline{CT}}, \overline{KC} = \overline{DC} \cos \nu = \cos \nu, \Delta\beta = \frac{\overline{RT} \cos \nu}{\overline{RC} \cdot \overline{CT}}; \quad \dots 5,15$$

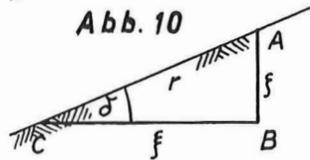
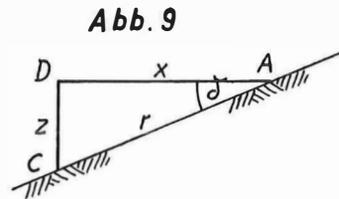
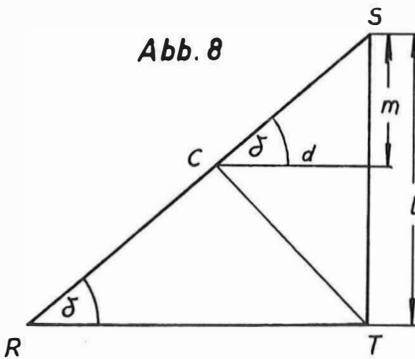
$$\Delta\beta' = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{RT}}{\overline{RC} \cdot \overline{CT}}, \overline{FC} = \sin \nu, \Delta\beta' = \frac{\overline{RT} \sin \nu}{\overline{RC} \cdot \overline{CT}}. \quad \dots 5,16$$

An Hand der Abb. 8 wird die Änderung des zweiten Gliedes der Formel 5,14 abgeleitet:

$$\overline{CS} = \sqrt{m^2 + d^2},$$

$$\overline{CT} = \sqrt{d^2 + (l - m)^2},$$

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{CS}} = \sqrt{\frac{d^2 + m^2 - 2lm + l^2}{d^2 + m^2}} = \sqrt{1 + \frac{l^2 - 2lm}{d^2 + m^2}}.$$



Zur Berechnung der Änderung des zweiten Gliedes ($d \cdot \ln \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}}$) für den Horizontalgradienten muß man m konstant halten und den Ausdruck nach d differenzieren.

$$\frac{\delta \left(d \cdot \ln \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}} \right)}{\delta d} = \ln \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}} - \frac{d^2 (l^2 - 2lm)}{\overline{CT}^2 \cdot \overline{CS}^2}. \quad \dots 5,17$$

Wenn man nach m differenziert, erhält man den Einfluß des zweiten Gliedes in Formel 5,14 auf den Vertikalgradienten.

$$\frac{\delta \left(d \cdot \ln \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}} \right)}{\delta m} = - \left(\frac{l}{\overline{CT}^2} + \frac{m(l^2 - 2lm)}{\overline{CT}^2 \cdot \overline{CS}^2} \right) d. \quad \dots 5,18$$

Wie man sieht, ist in unserem Fall für $\delta = 45^\circ$ und $H = 500 \text{ m}$ $\Delta\beta' = 0$, da der Winkel $\gamma = 0$ ist. Ebenso ist $\frac{\delta \left(d \cdot \ln \frac{\overline{CT}}{CS} \right)}{\delta d} = 0$, da $CT = CS$ und der Klammerausdruck im zweiten Glied ebenfalls Null wird. Nach Gleichung 5,15 ist

$$H \cdot \Delta\beta = \frac{\overline{RT^2}}{2 CT^2}$$

und nach Gleichung 5,18

$$\frac{\delta \left(d \cdot \ln \frac{\overline{CT}}{CS} \right)}{\delta m} = - \frac{\overline{RT^2}}{2 CT^2} .$$

Daher ist die Differenz der Vertikalkomponente der Anziehungskraft ΔP_c auf Punkt A weniger Punkt C gleich $2k^2\sigma\widehat{\beta}$ oder, da $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\Delta P_c = \pi k^2 \sigma . \quad \dots 5,19$$

Um nun den gewünschten Zusammenhang zwischen W_{xx} und W_{xz} , also der Zunahme der horizontalen Anziehungskraft in der x -Richtung und in der z -Richtung zu finden, bleiben wir weiter so wie Helmert in der xz -Ebene. Wir differenzieren die

Potentialfunktion $\frac{1}{r}$ zweimal nach x und einmal nach x und z .

$$f(x, z) = \frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + z^2} . \quad \dots 6,00$$

Dann ist

$$\frac{\delta \left(\frac{1}{r} \right)}{\delta x} = - r^{-2} \frac{\delta r}{\delta x} = - \frac{x}{r^3} , \quad \dots 6,01$$

und

$$\frac{\delta^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\delta x^2} = - \frac{r^3 - 3r^2x}{r^6} \frac{\delta r}{\delta x} = - \frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} , \quad \dots 6,02$$

während die gemischte zweite Ableitung lautet

$$\frac{\delta^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\delta x \delta z} = - \frac{- 3 r^2 x}{r^6} \frac{\delta r}{\delta z} = + \frac{3xz}{r^5} . \quad \dots 6,03$$

Dieselbe Ableitung gilt auch für beliebig viele diskrete Massenpunkte und für den Fall einer irgendeinen Raum kontinuierlich erfüllenden Masse.

Für die Schichten in der Nähe der Trennfläche können wir δ fast konstant setzen und es gilt mit großer Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos \delta \\ \frac{z}{r} &= \sin \delta \end{aligned} \right\} , \quad \dots 6,04$$

dann ist

$$\text{und } \left. \begin{aligned} \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^3} \cos^2 \delta \\ \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} &= +\frac{3}{r^3} \cos \delta \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots 6,05$$

d. h. es ist

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} \cot \delta - \frac{1}{r^3} = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}. \dots 6,06$$

Auch im Innenraum suchen wir zunächst den Zusammenhang von $\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}$ und $\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z}$.

Bekanntlich finden wir [6] die Darstellung von $\frac{\delta V}{\delta x}$ für innere Punkte als Summe zweier Potentiale

$$U = \iiint \frac{\delta \sigma}{\delta \xi} \frac{dv}{r}, \quad W = - \iiint \frac{\sigma \cos(N, \xi) do}{r}, \dots 6,07$$

und damit

$$\frac{\delta V}{\delta x} = W + U. \dots 6,08$$

Es ist

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = \frac{\delta W}{\delta x} + \frac{\delta U}{\delta x} \dots 6,09$$

also

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = - \iiint \frac{\sigma \cos(N, \xi) (\xi - x)}{r^3} do + \iiint \frac{\delta \sigma}{\delta \xi} \frac{(\xi - x)}{r^3} dv, \dots 6,10$$

und

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} = \frac{\delta W}{\delta z} + \frac{\delta V}{\delta z}, \dots 6,11$$

somit

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} = - \iiint \frac{\sigma \cos(N, \xi) (\zeta - z)}{r^3} + \iiint \frac{\delta \sigma}{\delta \xi} \frac{(\zeta - z)}{r^3} dv. \dots 6,12$$

Wieder können wir für Schichten in der Nähe der Trennfläche δ fast konstant setzen und es gilt mit großer Annäherung:

$$\begin{aligned} \xi &= x + r \cos \delta, \quad \zeta = z + r \sin \delta, \\ \frac{\delta \xi}{\delta r} &= \cos \delta = \frac{\xi - x}{r}, \quad \frac{\delta \zeta}{\delta r} = \sin \delta = \frac{\zeta - z}{r}, \end{aligned}$$

daher ist

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = - \iiint \frac{\sigma \cos(N, \xi) \cos \delta}{r^2} do + \iiint \frac{\delta \sigma}{\delta \xi} \frac{\cos \delta}{r^2} dv, \dots 6,13$$

und

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} = - \iiint \frac{\sigma \cos(N, \xi) \sin \delta}{r^2} do + \iiint \frac{\delta \sigma}{\delta \xi} \frac{\sin \delta}{r^2} dv,$$

somit ist im Innenraum

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} \cot \delta. \dots 6,14$$

Wir wollen nun wieder den Vertikalgradienten $\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}$ im Außenraum mit V_a und im Innenraum mit V_i , den Horizontalgradienten $\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z}$ im Außenraum mit H_a und im Innenraum mit H_i bezeichnen.

Setzen wir die Gleichung 6,06, welche für den Außenraum gilt, in die Laplace'sche Gleichung ein, so erhalten wir bei Vernachlässigung von $2\omega^2$:

$$H_a \cot \delta - V_a - \frac{1}{r^3} = 0. \quad \dots 6,15$$

Für den Innenraum gilt die Poisson'sche Gleichung. Wir setzen den Wert für $\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}$ aus Gleichung 6,14 in diese ein und erhalten bei Vernachlässigung von $2\omega^2$:

$$H_i \cot \delta - V_i = -4\pi k^2 \sigma, \quad \dots 6,16$$

oder für H_i die Bruns'sche Gleichung eingesetzt:

$$H_a \cot \delta - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta - V_i = -4\pi k^2 \sigma \quad \dots 6,17$$

also

$$H_a \cot \delta + 4\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = V_i. \quad \dots 6,18$$

Setzen wir nun für V_i die Bruns'sche Gleichung ein, so erhalten wir

$$H_a \cot \delta - V_a = -4\pi k^2 \sigma. \quad \dots 6,19$$

Betrachten wir Abb. 1 der vorangehenden Arbeit [3] und dazu die Gleichungen 3,02 und 3,10, so wissen wir, daß nur dann die Gleichung 3,00 gilt, wenn die Zunahme der Schwerkraft von D nach C und von C nach B gleich groß ist. Nun ist aber die Zunahme der Schwerkraft von Punkt D nach Punkt B laut Gleichung 6,18 gleich

$$2 H_a \cot \delta + 4\pi k^2 \sigma \cdot \sin^2 \delta.$$

Wir müssen also Δg um

$$2\pi k^2 \sigma \cdot \sin^2 \delta$$

verbessern, um im Mittel zwischen D und B zu liegen. Also lautet die verbesserte Gleichung 3,00, da Δg negativ ist:

$$\sigma = \frac{\Delta g + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta} = \frac{\Delta g}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta} - \frac{\sigma'}{2} \tan^2 \delta, \quad \dots 6,20$$

wenn

$$\sigma' = \frac{\Delta g}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta}. \quad \dots 6,21$$

ist.

Wir können uns die Messungsdifferenz

$$\Delta g = -4\pi k^2 \sigma + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta \quad \dots 6,22$$

auch aus der Summe $H_a \cot \delta - V_a$ vermehrt um die Differenz der Vertikal-komponenten der Anziehung des Störkörpers auf Punkt A und Punkt C entstanden denken. Wir wissen aus Tabelle 1 unseres Modells und aus Gleichung 5,16, daß diese Differenz gleich $\pi k^2 \sigma$ ist. Für unser Modell für $\delta = 45^\circ$ ist aber

$$\Delta P_c = \pi k^2 \sigma = 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta. \quad \dots 6,23$$

Der verbesserte Dichtewert für das Beispiel der vorangegangenen Arbeit [3] lautet daher $\sigma = 2,58$, für das Profil $E(S)$ (Abb. 2) sind die verbesserten Dichtewerte von oben nach unten $\sigma = 2,67$, $2,21$ und $2,05$;

und für das Profil $C(N)$, (Abb. 3) lauten die verbesserten Dichtewerte von oben nach unten $\sigma = 2,20, 2,27$ und $2,51$.

Literatur:

- [3] *W. Embacher*: Zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen. *Ö.Z.f.V.*, 57. Jahrg. Heft 2.
 [4] *F. R. Helmert*: Die mathem. u. phys. Theorien der Höheren Geodäsie.
 [5] *Jordan|Egger|Kneißl*: Handbuch der Verm.-Kunde, K. Ledersteger: Bd. V, Seite 742 ff.
 [6] *A. Wangerin*: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, I. Bd. Seite 71 ff.

180 Tonnen Beton für 4 Staatsgrenzpunkte im Neusiedler See

Von *Friedrich Meckel*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

1. Einleitung

Die Wiederherstellung der österreichisch-ungarischen Staatsgrenze im Neusiedler See stellte außergewöhnliche Aufgaben und machte außerordentliche Aufwendungen an Material und Arbeit notwendig, um die 4 Grenzbruchpunkte im See dauerhaft und deutlich sichtbar zu vermarken. Der vorliegende Artikel soll den Umfang und Aufwand an notwendigen Arbeiten zeigen und aus der, in der Kollegenschaft kaum bekannten behördlichen Tätigkeit an Staatsgrenzen berichten.

Ein kurzer allgemeiner Überblick, der die Grundlagen für die anfallenden Arbeiten und die besonderen Probleme an der 2637 km langen Staatsgrenze Österreichs aufzeigt, sei vorangestellt.

Die Vermarkung der Staatsgrenze ist nach den bestehenden Staatsverträgen mit Hilfe der beiderseitig anerkannten Grenzurkundenwerke instandzuhalten, periodisch auf ihre Lagerichtigkeit zu prüfen, erforderlichenfalls zu ändern und zu ergänzen. Die vertragschließenden Staaten haben sich auch verpflichtet, einen Streifen beiderseits der Grenzlinie sichtbar zu halten.

Vielfältig sind die zu lösenden Probleme, wenn die Staatsgrenze in einem Gewässer verläuft und dort je nach der vertraglichen Festlegung labil oder stabil ist. Allmähliche natürliche Veränderungen, plötzliche Verlagerungen durch Hochwasser und die Regulierung von Grenzgewässern müssen im Sinne des bezüglichen Staatsvertrages bearbeitet werden.

Die Delegierten, die jeweils von den an die Grenze stoßenden Staaten nominiert werden, führen die Arbeiten gemeinsam durch. Über die Verhandlungen und über die durchgeführten Arbeiten sind Protokolle in den Sprachen beider Staaten zu verfassen.

Die Aufgabe, die österreichisch-ungarische Staatsgrenze im Neusiedler See dauerhaft zu vermarken und die kilometerlangen geraden Grenzstrecken sichtbar zu machen, war besonders schwierig zu lösen. In den folgenden Abschnitten dieses Artikels sind die besonderen Verhältnisse am See geschildert, die zu einer einmaligen Art der Vermarkung mit Schutzbau führten.