Paper-ID: VGI_196906

Zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen

Wilhelm Embacher [1]

[1] *Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **57** (2), S. 37–43

1969

BibTEX:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_196906,
Title =  {Zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen},
Author =  {Embacher, Wilhelm},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {37--43},
Number =  {2},
Year =  {1969},
Volume =  {57}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 2 Baden bei Wien, Ende April 1969 57. Jg.

Zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen

Von *Wilhelm Embacher*, Innsbruck

Es wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Differenz von inneren und äußeren Vertikalgradienten an der Grenzfläche zweier Räume gravimetrisch bestimmt werden kann, um daraus den Dichteunterschied σ dieser beiden Räume zu erhalten.

In einer früheren Arbeit „Ein Vergleich von Methoden zur Bestimmung der Bodendichte" [1] wurde gezeigt, daß die Methoden von Nettleton, Steiner, Jung und Parasnis auf den Bouguer-Ansatz zurückgeführt werden können. Will man mit diesen Methoden brauchbare Resultate erzielen, muß man den Topographieeinfluß berechnen. Das bringt aber eine wesentliche Mehrarbeit und ist im Hochgebirge exakt fast nicht möglich. In der Arbeit „Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg" [2], welche im Rahmen des Institutes für Höhere Geodäsie der Technischen Hochschule Wien durchgeführt wurde, schlug der Verfasser eine Methode zur Dichtebestimmung ohne Berücksichtigung der Topographie vor.

Aus der Gleichung

$$\Delta g + h \frac{V_i + V_a}{2} - s \frac{H_i + H_a}{2} = 0 \qquad \ldots 1{,}0$$

sollte aus mehreren Messungen $\frac{V_i + V_a}{2}$ und $\frac{H_i + H_a}{2}$ berechnet werden; V_a wird gemessen und aus

$$\Delta g + h \,.\, V_a - s H_a = 0, \qquad \ldots 1{,}1$$

Ha berechnet; damit bekommt man auch V_i und H_i, und schließlich aus den Bruns'schen Formeln

$$\left.\begin{aligned} H_i - H_a &= -4\pi k^2 \sigma \cos\delta \sin\delta \\ V_i - V_a &= -4\pi k^2 \sigma \cos^2\delta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 1{,}2$$

zweimal die mittlere Bodendichte σ.

Im Auftrag der Kärntner Landesregierung, Autobahnverwaltung, wurden über den geplanten Tunnelröhren des Katschbergtunnels der Tauernschnellstraße Dichtebestimmungen durchgeführt. Dazu wurden eine große Anzahl von Schweremessungen und 5 Vertikalgradientenmessungen gemacht, um nach den oben angeführten Methoden Dichtebestimmungen durchzuführen, da verläßliche Werte für die Bodendichte sowohl für den Tunnelplaner als auch für den Tunnelbauer von großer Bedeutung sind.

Bei der Ausarbeitung zeigte sich, daß die Formeln, welche auf den Bouguer-Ansatz zurückgehen, wegen der mangelnden Topographiekenntnis nicht brauchbar waren. Aber auch die Gleichung 1,0 lieferte trotz mehrfacher Überbestimmung keine brauchbaren Werte für die Unbekannten $\frac{V_i + V_a}{2}$ und $\frac{H_i + H_a}{2}$, da die Gleichungen, wenn man nur in der Fallinie mißt, fast proportional, also nicht voneinander unabhängig sind. Auf dem Buschberg [2] wurden Gravimeterfelder angelegt, deren Auswertung im Mittel brauchbare Werte lieferte. Die große Anzahl von Gradienten-, Schwere-, Lage- und Höhenmessungen auf dem Katschberg regten zu neuen Überlegungen an, so daß schließlich ein Weg zur Dichtebestimmung gefunden werden konnte, welcher ebenso wie der nach den Formeln 1,0 bis 1,2 gedachte topographieunabhängig ist.

Aus der Division der Bruns'schen Formeln (Gleichung 1,2) erhält man

$$\frac{H_i - H_a}{V_i - V_a} = \tan\delta = \frac{h}{s}, \qquad \ldots 2{,}0$$

wenn h den Höhenunterschied und s den Horizontalabstand zweier Meßpunkte bedeutet. Es muß also

$$H_i - H_a = \frac{c}{s}$$

und $\qquad \ldots 2{,}01$

$$V_i - V_a = \frac{c}{h}$$

sein.

Nun werden zwei Annahmen gemacht:

1. Die Fallinie eines schrägen Hanges soll eine Gerade sein;
2. Die Größe c aus der Gleichungsgruppe 2,01 sei gleich der Differenz aus zwei Schweremessungen in der Fallinie, $(g_1 - g_2) = \Delta g = c$, dann wäre

$$\frac{\Delta g}{h} = V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2\delta$$

und es muß $\qquad \ldots 3{,}00$

$$\frac{\Delta g}{s} = H_i - H_a = -4\pi k^2 \sigma \cos\delta \sin\delta$$

sein.

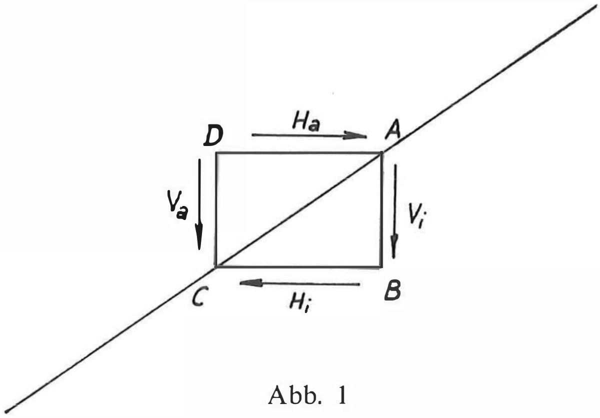

Abb. 1

In den vier Punkten A, B, C, D (siehe Abb. 1) an der schrägen Grenzfläche zweier Räume mit dem Dichteunterschied σ seien die Schwerewerte g_A, g_B, g_C und g_D gemessen. So ist die Differenz der Vertikalgradienten

$$V_i - V_a = g_B - g_A - g_C + g_D . \qquad \ldots 3{,}01$$

Wollen wir die Differenz der Gradienten durch $g_A - g_C$ ausdrücken, so müssen wir die rechte Seite der Gleichung 3,01 mit $+ g_A$ und $- g_A$ erweitern, d. h. es wäre dann

$$g_B + g_D = 2\, g_A \qquad \ldots 3{,}02$$

und g_A ist der Mittelwert zwischen g_B und g_D.

Aus dem Gradientenbild (Abb. 1) sieht man, daß es grundsätzlich möglich ist, daß g_A der Mittelwert aus g_B und g_D sein kann, denn die Schwerkraft nimmt von D nach A und von A nach B zu.

Nun wollen wir die Gleichung 1,1 und 1,2, bzw. die Gleichungen 3,00 noch einmal anschreiben unter der Berücksichtigung, daß wir die Schweredifferenz Δg aus der Messung oben weniger Messung unten bilden:

$$s H_a - h V_a = \Delta g, \qquad \ldots 3{,}03$$

$$s H_i - h V_i = \Delta g, \qquad \ldots 3{,}04$$

$$H_i - H_a = -4\pi k^2 \sigma \cos\delta \sin\delta = \frac{\Delta g}{s}, \qquad \ldots 3{,}05$$

$$V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2\delta = \frac{\Delta g}{h}. \qquad \ldots 3{,}06$$

Aus der Summe von Gleichung 3,03 und Gleichung 3,04 und durchdividieren durch h erhalten wir

$$\frac{s}{h} H_i + \frac{s}{h} H_a - V_i - V_a = \frac{2\Delta g}{h}. \qquad \ldots 3{,}07$$

Aus der Summe von Gleichung 3,05 und Gleichung 3,06 und durchdividieren durch h erhalten wir

$$\frac{s}{h} H_i - \frac{s}{h} H_a + V_i - V_a = \frac{2\Delta g}{h}. \qquad \ldots 3{,}08$$

Die Summe der Gleichungen 3,07 und 3,08 gibt Gleichung 3,09 und die Differenz der Gleichungen 3,07 und 3,08 gibt die Gleichung 3,10.

$$\frac{s}{h} H_i - V_a = \frac{2\Delta g}{h}, \qquad \ldots 3{,}09$$

$$\frac{s}{h} H_a - V_i = 0. \qquad \ldots 3{,}10$$

Die Gleichung 3,10 sagt aus, daß unter den obigen Annahmen g_A der Mittelwert aus g_B und g_D ist.

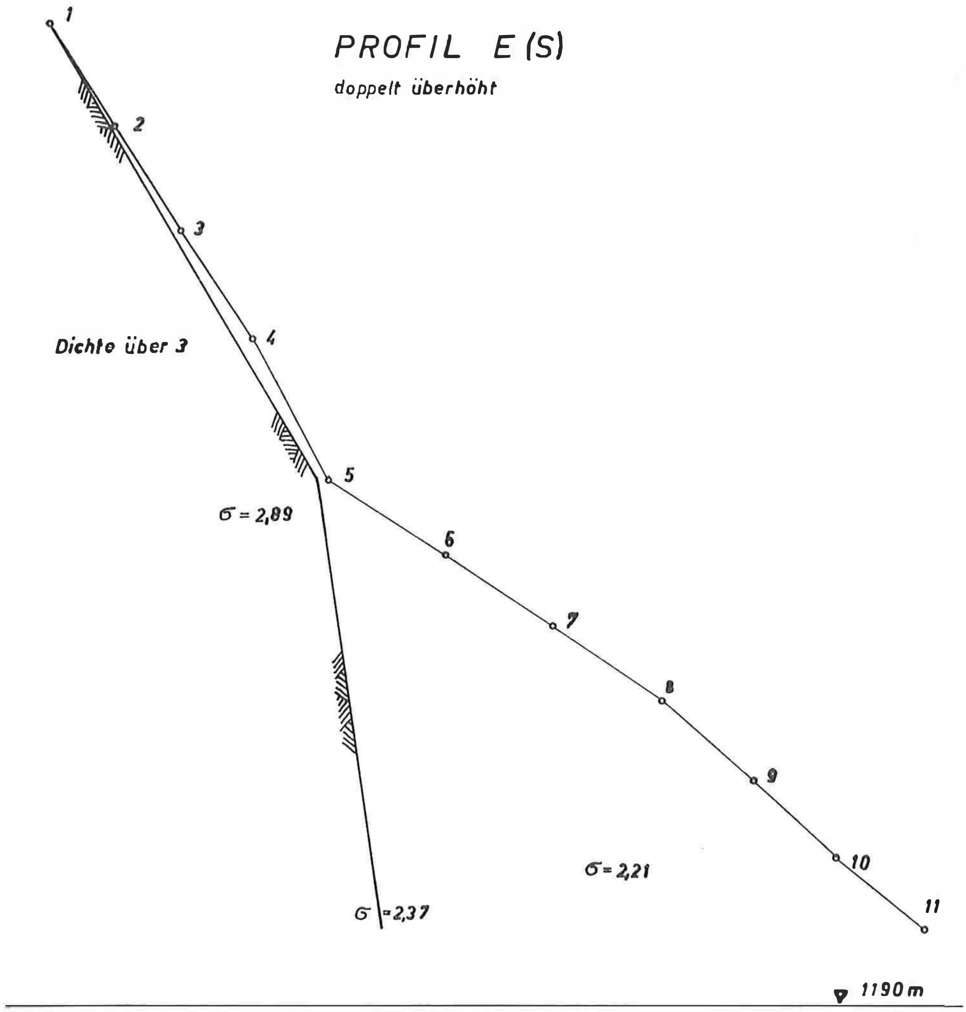

Abb. 2

Die erste Annahme, daß die Fallinie eine Gerade sein soll, läßt sich fast in jedem Gelände sehr stark annähern, auch Schweremessungen in dieser Fallinie sind möglich.

Die Gleichung 3,10 ist eine Folgerung der zweiten Annahme.

$$\frac{\Delta g}{h} = -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta.$$

Mißt man von D über A nach B fortlaufend die Schwerkraft, so muß irgendwo auf diesem Weg ein Mittelwert $\frac{g_D + g_B}{2}$ existieren. Daß g_A dieser Mittelwert ist, scheint potentialtheoretisch möglich, doch soll dieser Nachweis einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Jedenfalls ist die Erfüllung der Gleichung 3,09 durch eine Vertikalgradientenmessung und durch die unabhängige Messung von zwei Schweredifferenzen am selben Hang ein Beweis für die innere Richtigkeit der Methode. Doch muß klar gesagt werden, daß es sich hier um theoretische Modellvorstellungen handelt und daß die Wirklichkeit nur angenähert werden kann.

Abbildung 2 zeigt ein Profil, gemessen in der Nähe des Tunnelmundes Süd des geplanten Katschbergtunnels.

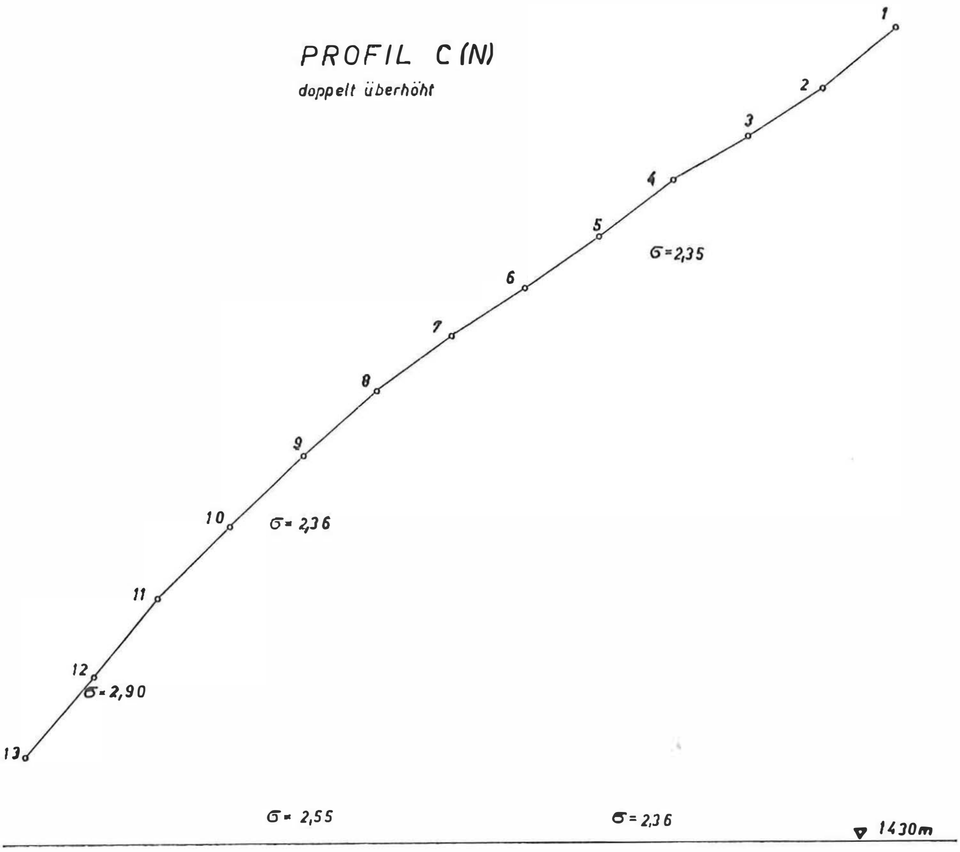

Abb. 3

Die nach obiger Methode berechneten Schwerewerte lassen von den Profilpunkten 11 bis 5 auf eine Schotteranschüttung schließen, während die Dichtewerte, die zwischen den Punkten 5 bis 1 liegen, deutlich den anstehenden Fels zeigen.

Die nächste Abbildung bringt ein Profil von der Nordseite des Katschberges. Man erkennt hier aus den Dichtewerten die vom Geologen bestätigte leichtere Schieferüberlagerung über dem schweren Granit.

Wird im Punkt P eines schrägen Hanges die Schwerebeschleunigung g_P gemessen, so ist die reduzierte Schwerkraft g_0 in P

$$g_0 = g_P + \sigma T_0, \qquad \ldots 4{,}00$$

wenn T_0 der Einfluß der Topographie in P ist. Die reduzierte Schwerkraft g_1 im Punkt $\overline{P}_1$ in der Lotlinie von P_1 in der Höhe von P ist

$$g_1 = g_{P_1} + 0{,}3086 h - \sigma 0{,}0838 h + \sigma T_1 - \sigma T_{1_{u}}. \qquad \ldots 4{,}01$$

Wieder ist T_1 der Topographieeinfluß in P_1 und T_{1_u} der Topographieeinfluß in $\overline{P}_1$. Der Horizontalgradient H_i multipliziert mit dem Abstand von P nach $\overline{P}_1$ ist dann

$$sH_i = g_1 - g_0 = g_{P1} - g_P + 0{,}3086 h - \sigma\, 0{,}0838 h + \sigma (T_1 - T_0 - T_{1_u}), \qquad \ldots 4{,}02$$

also ist

$$- sH_i + \Delta g + 0{,}3086 h - \sigma\, 0{,}0838 h + \sigma (T_1 - T_0 - T_{1_u}) = 0, \qquad \ldots 4{,}03$$

weiter kennen wir aus der früheren Arbeit [2] die Gleichung

$$- sH_i + \Delta g + h V_i = 0, \qquad \ldots 4{,}04$$

also ist

$$h V_i = 0{,}3086 h - \sigma\, 0{,}0838 h + \sigma (T_1 - T_0 - T_{1_u}). \qquad \ldots 4{,}05$$

Daraus ergibt sich der Topographieeinfluß für 1 m Höhenunterschied und auf die Dichte $\sigma = 1$ bezogen

$$\frac{s}{h} (T_1 - T_0 - T_{1_u}) = \frac{V_i - 0{,}3086}{\sigma} + 0{,}0838. \qquad \ldots 4{,}06$$

Offenbar muß V_i in diesem Fall nicht auf den gemessenen äußeren Vertikalgradienten, sondern auf den Normalgradienten bezogen sein, also

$$V_i = - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta + 0{,}3086. \qquad \ldots 4{,}07$$

Setzen wir für die doppelte Bouguerplatte den Wert $4\pi k^2$ und für V_i die Gleichung 4,07 ein, so erhalten wir für den Topographieeinfluß für 1 m Höhenunterschied und auf die Dichte 1 bezogen

$$\frac{1}{h} (T_1 - T_0 - T_{1_u}) = 4\pi k^2 \sin^2 \delta. \qquad \ldots 4{,}08$$

Die Diskussion dieser Gleichung soll auch in der angekündigten späteren Arbeit erfolgen.

Es folgt nun ein Beispiel, herausgegriffen aus den zahlreichen Dichtebestimmungen am Katschberg:

Über einem Punkt am Nordfuß des Katschberges wurde der äußere Vertikalgradient mit 0,221 mgal/m bestimmt. Seine Meereshöhe beträgt 1087,13 m und die gemessene Schwerebeschleunigung ist 980462,02 mgal. Auf einem zweiten Punkt, der 9,97 m entfernt ist und eine Höhe von 1091,92 m hat, beträgt die Schwerkraft 980461,09 mgal. Der Geländewinkel δ ist also $25^0\,02'$, daher ist

$$4 \pi k^2 \cos^2 \delta = 0{,}0688 \text{ mgal und}$$
$$4 \pi k^2 \cos \delta \sin \delta = 0{,}0321 \text{ mgal.}$$

Nach Gleichung 3,00 ist $\sigma = 2{,}82$.

Nach Gleichung 3,03 finden wir den äußeren Horizontalgradienten $H_a =$ $= + 0{,}013$ mgal/m und nach der Gleichung 3,05 den inneren Horizontalgradienten $H_i = - 0{,}078$ mgal/m. Der innere Vertikalgradient ist nach Gleichung 3,06 $V_i =$ $= + 0{,}027$ mgal/m. Damit sind für diesen Messungspunkt die Dichte und alle Gradienten bekannt, der Topographieeinfluß bezogen auf 1 m Höhenunterschied und auf die Dichte 2,82 beträgt, nach Gleichung 4,08, 0,042 mgal/m.

Abschließend sei gesagt, daß bereits zahlreiche Dichtebestimmungen nach der oben beschriebenen Methode im Gebirge durchgeführt wurden. Sowohl oben am Berggipfel, als auch auf Bergmitte und an den Talhängen wurden Schwereunterschiede gemessen und mittlere Freiluftgradienten aus Turmmessungen bestimmt. Die Schwereunterschiede ergaben nach Gleichung 3,00 Dichtewerte, die dem Geologen durchaus brauchbar erscheinen.

Die relative Dichtebestimmung, also die Berechnung von Dichtedifferenzen nach obiger Methode, scheint sich beim Aufsuchen des verbrochenen Materials des alten Stollens des Wolfsbergtunnels bei Spittal a. d. Drau zu bewähren. Aber erst nach Fertigstellung der Stollen wird man durch Dichtevergleich und Schweremessungen unter Tag ein endgültiges Urteil über die Brauchbarkeit der Methode fällen können.

Literatur:

[1] *Embacher, W.:* „Ein Vergleich von Methoden zur Bestimmung der Bodendichte." ÖZfV 1961.

[2] *Embacher, W.:* „Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschbreg". ÖZfV 1965.

Bemerkungen zu den „Tellurometermessungen im Österreichischen Netz I. Ordnung" von K. RINNER

Von *Josef Mitter*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

In den Nummern 4 und 5/1968 der vorliegenden Zeitschrift wurde von K. RINNER über Untersuchungen im österreichischen Netz 1. Ordnung mittels Tellurometermessungen berichtet [1], denen sich netz- und rechentechnische Überlegungen und Folgerungen anschlossen und aus denen schließlich örtliche Lage- und allgemeine