

Paper-ID: VGI\_196817



## Überbestimmte Punkttransformationen nach dem Prinzip der kleinsten maximalen Klaffung

Peter Meissl <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **56** (4), S. 140–149

1968

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Meissl_VGI_196817,  
  Title = {{\U}berbestimmte Punkttransformationen nach dem Prinzip der  
    kleinsten maximalen Klaffung},  
  Author = {Meissl, Peter},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {140--149},  
  Number = {4},  
  Year = {1968},  
  Volume = {56}  
}
```



Zur Gestaltung des Programmes wurde auf das Umgehen des Ausdrucks und Wiedereinstastens von Zwischenwerten durch deren Übernahme auf Magnetkarten zwecks späterer Wiedereinlesung sowie auf die Verwendung von löschbaren Programmbefehlen verwiesen.

Abschließend sei bemerkt, daß hier nur ein grober Hinweis auf die wichtigsten Probleme gegeben werden konnte, da ja jede Verbreiterung auf diesem Gebiet den Rahmen einer Veröffentlichung sprengen würde.

## Überbestimmte Punkttransformationen nach dem Prinzip der kleinsten maximalen Klaffung

Von *Peter Meissl*, Wien

### 1. Problemstellung

Folgende Aufgabe wird in der Geodäsie häufig angetroffen. Gegeben ist ein System von  $n$  Punkten  $P_i$  und ein System von  $n$  Punkten  $Q_i$ . Auf das System der Punkte  $Q_i$  soll eine Transformation ausgeübt werden, deren Parameter so zu wählen sind, daß die resultierenden Abstände (Klaffungen) zwischen den  $P_i$  und den  $Q_i$  nach einem gewissen Kriterium möglichst klein werden. Wählt man als Maß für die Klaffungen  $r_i = \overline{P_i Q_i}$  die Quadratsumme  $\sum_{i=1}^n r_i^2$ , so führt das „Gaußsche

Kriterium“  $\text{Min} \sum_{i=1}^n r_i^2$  nach geeigneter Linearisierung auf Gaußsche Normalgleichungen für die Transformationsparameter, wie z. B. in [2] S. 442ff. beschrieben ist. Für den Fall einer Ähnlichkeitstransformation in der Ebene existiert für die Rechnung sogar ein Vordruck V 246 des österreichischen Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen.

Ein anderes Maß für die Klaffungen ist  $\text{Max}_{1 \leq i \leq n} r_i$ , die größte auftretende Klaffung. In dieser Arbeit sollen die Transformationsparameter so gewählt werden, daß dieses Maß möglichst klein wird, also dem „Tschebyscheff-Kriterium“  $\text{Min} \text{Max}_{1 \leq i \leq n} r_i$  Genüge geleistet wird. Man kann dabei von einer Transformation nach dem Prinzip der kleinsten maximalen Klaffung sprechen.

Bei der Darstellung einer Lösung dieser Aufgabe soll angenommen werden, daß die Transformation in einer Bewegung (Verdrehung und Verschiebung) in der Ebene besteht. Bei allgemeineren Transformationen, die auch räumlich sein können, treten keinerlei wesentliche neue Gesichtspunkte auf.

### 2. Mathematische Formulierung

Die Koordinaten von  $P_i$  seien  $x_i, y_i$ , jene von  $Q_i$  seien vor Anwendung der Transformation gegeben durch  $x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i$  und nach der Transformation durch  $x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i$ . Die Größen  $\delta x_i, \delta y_i$  und auch  $\Delta x_i, \Delta y_i$  seien klein im Vergleich zu den Koordinatendifferenzen der  $P_i$ . Mit anderen Worten, wir nehmen an, daß die  $Q_i$  durch eine vorläufige Transformation bereits genähert mit den  $P_i$  zur Deckung gebracht wurden. Wenn  $\varphi$  der Verdrehungswinkel und  $\sigma$  und  $\tau$  die Verschiebungsgrößen in  $x$  und  $y$  Richtung sind, so gilt

$$\begin{aligned}x_i + \Delta x_i &= (x_i + \delta x_i)\cos\varphi - (y_i + \delta y_i)\sin\varphi + \sigma \\y_i + \Delta y_i &= (x_i + \delta x_i)\sin\varphi + (y_i + \delta y_i)\cos\varphi + \tau\end{aligned}\quad i = 1, \dots, n$$

also in erster Näherung

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= -y_i \varphi + \sigma + \delta x_i \\ \Delta y_i &= x_i \varphi + \tau + \delta y_i\end{aligned}\quad i = 1, \dots, n \quad \dots (1)$$

Setzen wir  $r_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ , so soll nach dem Prinzip der kleinsten maximalen Klaffung  $\text{Max } r_i$  durch Wahl von  $\varphi, \sigma, \tau$  ein Minimum werden. Wir können das  $1 \leq i \leq n$  auch so formulieren

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \leq r \quad i = 1, \dots, n \quad \dots (2)$$

$$r = \text{Minimum} \quad \dots (3)$$

Die Beziehungen (1), (2), (3) stellen ein sogenanntes konvexes Programm (auch konvexe Optimierungsaufgabe) dar. Siehe [3], S. 72ff. Für konvexe Programme existieren eine Theorie und etliche iterative Lösungsverfahren. Eines davon, die sogenannte Schnittebenenmethode ([3], S. 93) soll hier zur Lösung benützt werden.

Um es dem Leser zu ersparen, sich mit den Begriffsbildungen der konvexen Programme vertraut zu machen, soll das Verfahren an Hand der speziellen Aufgabe ab ovo hergeleitet werden. Lediglich über einige Tatsachen der Linearen Programmierung (Linearen Optimierung) soll im folgenden Abschnitt ohne Herleitungen referiert werden.

### 3. Einige Tatsachen aus der Linearen Programmierung

Ein lineares Programm, im folgenden mit L. P. abgekürzt, kann in verschiedener Gestalt auftreten. Eine davon ist:

Finde  $\xi_j, j = 1, \dots, \nu$  mit

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} \xi_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, \mu \quad \dots (4)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_j = \text{Maximum}$$

Dabei sind die  $a_{ij}, b_i, c_j$  bekannt. Zu jedem L. P. gibt es ein sogenanntes duales L. P. Das duale zu (4) lautet:

Finde  $\eta_i \quad i = 1, \dots, \mu$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\mu} a_{ij} \eta_i &= c_j \quad j = 1, \dots, \nu \\ \eta_i &\geq 0\end{aligned}\quad \dots (5)$$

$$\sum_{i=1}^{\mu} b_i \eta_i = \text{Minimum}$$

Die Theorie lehrt, daß entweder beide L. P.e unlösbar sind oder beide lösbar. In letzterem Fall stimmen die beiden Optima überein, d. h.  $\text{Max} \sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_j = \text{Min} \sum_{i=1}^{\mu} b_i \eta_i$ . Das duale L. P. zu (5) ist übrigens wieder (4).

Problem (5) liegt in einer Gestalt vor, die geeignet ist für die Anwendung der Simplexmethode (siehe [1], [3]). Diese liefert, wie hier nicht näher beschrieben werden soll, in endlich vielen Schritten eine Optimallösung von (5). Wendet man die Simplexmethode in ihrer sogenannten revidierten Form an (auch Simplexmethode mit Multiplikatoren, siehe [1], S. 244), so fällt dabei als Nebenprodukt auch eine Optimallösung von (4) an.

#### 4. Ein approximierendes Lineares Programm

Wir kehren zu unserem ursprünglichen Problem in der Gestalt (1), (2), (3) zurück und konzentrieren uns auf eine der Ungleichungen (2):

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \leq r \quad \dots (2)$$

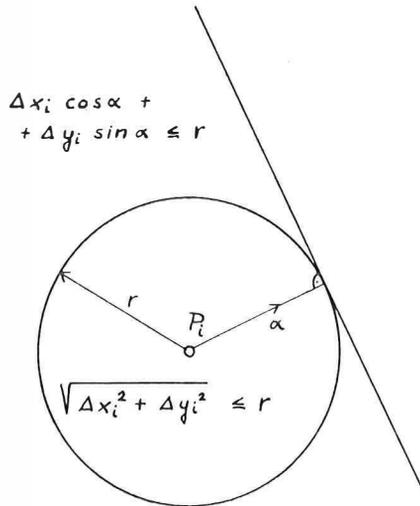


Abb. 1

Deutet man  $\Delta x_i, \Delta y_i$  vorübergehend als Koordinaten eines Punktes, so muß dieser Punkt im Innern eines Kreises mit Radius  $r$  um den Ursprung liegen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Punkt in *jeder* Halbebene liegt, die von einer Tangente an den Kreis begrenzt wird und den Ursprung enthält (siehe auch Abb. 1). (2) ist also äquivalent den folgenden  $\infty$  vielen Bedingungen

$$\Delta x_i \cos \alpha + \Delta y_i \sin \alpha \leq r, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad \dots (6)$$

$\alpha$  ist dabei die Normalenrichtung auf eine Tangente an den Kreis, deren Hesse'sche Normalform durch Ersetzen des  $\leq$  in (6) durch ein  $=$  gegeben ist.

Also können wir unsere ursprüngliche nichtlineare Optimierungsaufgabe ersetzen durch eine lineare mit  $\infty$  vielen Ungleichungen<sup>1)</sup>: Finde  $\varphi, \sigma, \tau$ , daß

$$\begin{aligned} \Delta x_i \cos \alpha + \Delta y_i \sin \alpha &\leq r & i = 1, \dots, n \\ r &= \text{Minimum} & 0 \leq \alpha < 2\pi \end{aligned} \quad \dots (7)$$

<sup>1)</sup> Diese Aufgabe ist wegen der unendlichen Anzahl der Ungleichungen kein L. P.

Setzen wir für  $\Delta x_i, \Delta y_i$  gemäß (1) ein, so wird daraus

$$\begin{aligned} (-y_i \cos \alpha + x_i \sin \alpha) \varphi + (\cos \alpha) \sigma + (\sin \alpha) \tau - r &\leq -(\delta x_i \cos \alpha + \delta y_i \sin \alpha) \\ \dots i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi &\dots (8) \\ -r = \text{Maximum}^2) & \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt für jedes  $i$  endlich viele  $\alpha_{ij}, j = 1, \dots, m_i$  aus und betrachten an Stelle von (7) die Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta x_i \cos \alpha_{ij} + \Delta y_i \sin \alpha_{ij} &\leq r & i = 1, \dots, n \\ & & j = 1, \dots, m_i \end{aligned} \dots (9)$$

$r = \text{Minimum}$

oder gleichbedeutend an Stelle von (8)

$$\begin{aligned} (-y_i \cos \alpha_{ij} + x_i \sin \alpha_{ij}) \varphi + (\cos \alpha_{ij}) \sigma + (\sin \alpha_{ij}) \tau - r &\leq -(\delta x_i \cos \alpha_{ij} + \delta y_i \sin \alpha_{ij}) \\ i = 1, \dots, n & \dots (10) \\ j = 1, \dots, m_i & \\ -r = \text{Maximum} & \end{aligned}$$

Die Aufgaben (9) oder (10) approximieren die Aufgaben (7) oder (8) und damit (1) bis (3). Im Sinne der Überlegungen, die uns zur Formulierung (6) führten, haben wir dabei das Innere der Kreise (2) mit Radius  $r$  durch das Innere gewisser Tangentenpolygone mit Inkreisradius  $r$  ersetzt. Die  $\alpha_{ij}$  sind die Normalrichtungen auf die Polygonseiten. (Siehe Abb. 2.)

Aufgabe (10) stellt ein L. P. in der Gestalt (4) dar, ist also routinemäßig lösbar. Sei  $\varphi, \sigma, \tau, r$  eine Optimallösung des L. P. (10) und  $\varphi_{opt}, \sigma_{opt}, \tau_{opt}, r_{opt}$  eine Optimallösung unseres ursprünglichen Problems (8). Da  $\varphi_{opt}, \sigma_{opt}, \tau_{opt}, r_{opt}$  auch die Ungleichungen in (10) erfüllen (letztere sind ja nur ein Teil der Ungleichungen in (8)), folgt notwendigerweise

$$\bar{r} \leq r_{opt}$$

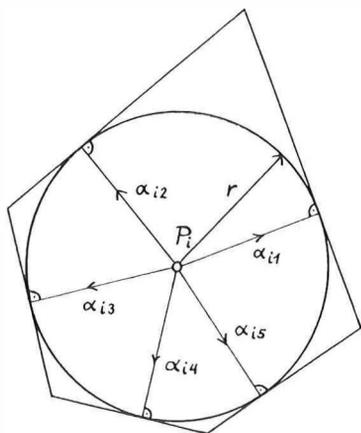


Abb. 2

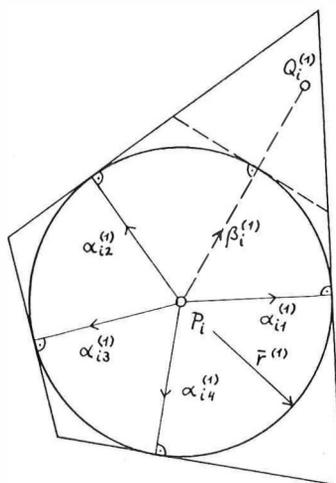


Abb. 3

2) Die Forderung  $r = \text{Minimum}$ , kann man natürlich durch  $-r = \text{Maximum}$  ersetzen.

Üben wir nun auf das System der  $Q_i$  die Bewegungstransformation mit den Parametern  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\tau}$  aus, so entstehen Koordinatendifferenzen  $\overline{\Delta x_i}$ ,  $\overline{\Delta y_i}$  zwischen den  $P_i$  und  $Q_i$ , die man gemäß (1) berechnen kann. Aus diesen kann man die Klaffungen

$$\bar{r}_i = \sqrt{(\overline{\Delta x_i})^2 + (\overline{\Delta y_i})^2}$$

rechnen und daraus die größte Klaffung

$$\bar{r} = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \bar{r}_i$$

Da wir nicht erwarten können, daß das approximierende Problem die größte Klaffung minimiert, gilt

$$\bar{r} \leq r_{opt} \leq \bar{r}. \quad \dots (11)$$

Das approximierende L. P. (10) löst man am besten auf dem Umweg über sein duales. Dieses lautet gemäß Abschnitt 3: Finde  $\pi_{ij}$ , daß

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (-y_i \cos \alpha_{ij} + x_i \sin \alpha_{ij}) \pi_{ij} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{m_i} (\cos \alpha_{ij}) \pi_{ij} &= 0 \quad \dots (12) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{m_i} (\sin \alpha_{ij}) \pi_{ij} &= 0 \\ \sum_{i=n}^n \sum_{i=n}^{m_i} -\pi_{ij} &= -1 \\ \pi_{ij} &\geq 0 \quad \dots i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i \\ \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{m_i} -(\delta x_i \cos \alpha_{ij} + \delta y_i \sin \alpha_{ij}) \pi_{ij} &= \text{Minimum} \end{aligned}$$

Dieses L. P. ist nach Abschnitt 3 lösbar, falls (10) es ist. Beide Optima stimmen überein und sind gleich  $-\bar{r}$ . Bei Anwendung der revidierten Simplexmethode auf (12) fällt als Nebenprodukt eine Optimallösung von (10) an.

### 5. Beschreibung des Iterationsverfahrens

Wähle für jeden Punkt  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  einige Richtungen  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $j = 1, \dots, m_i^{(1)}$  und formuliere damit ein erstes approximierendes L. P. (9) bzw. (10). Auf dem Umwege über sein duales (12) ergebe sich eine Optimallösung  $\bar{\varphi}^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}^{(1)}$ ,  $\bar{\tau}^{(1)}$ ,  $\bar{r}^{(1)}$ . Dieser entsprechen gemäß (1) Punkte  $Q_i^{(1)}$  mit Koordinatenabweichungen  $\overline{\Delta x_i}^{(1)}$ ,  $\overline{\Delta y_i}^{(1)}$  von den  $P_i$ . Bestimme die Abstände (Klaffungen)  $r_i^{(1)} = \sqrt{(\overline{\Delta x_i}^{(1)})^2 + (\overline{\Delta y_i}^{(1)})^2}$  und  $\bar{r}^{(1)} = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} r_i^{(1)}$ .

Dann gilt nach (11)

$$\bar{r}^{(1)} \leq r_{opt} \leq \bar{r}^{(1)}.$$

Wir sagen  $P_i$  ist ein kritischer Punkt, falls

$$r_i^{(1)} > \bar{r}^{(1)}. \quad \dots (13)$$

Für kritische Punkte ist also der Abstand  $\overline{P_i Q_i}^{(1)}$  größer als  $\bar{r}^{(1)}$ , der Optimallösung des ersten approximierenden L.P.'s. Falls es keine kritischen Punkte gibt, ist  $\bar{r}^{(1)} = r_{opt} = \bar{r}^{(1)}$  und das Verfahren ist zu Ende.

Für jeden kritischen Punkt konstruiere man nun eine neue Ungleichung, die von  $\bar{\varphi}^{(1)}, \bar{\sigma}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{r}^{(1)}$  nicht erfüllt wird.

Dazu setze man

$$\cos \beta_i^{(1)} = \Delta x_i^{(1)} / r_i^{(1)} \quad \dots P_i \text{ kritisch} \quad \dots (14)$$

$$\sin \beta_i^{(1)} = \Delta y_i^{(1)} / r_i^{(1)}$$

und bilde

$$\Delta x_i \cos \beta_i^{(1)} + \Delta y_i \sin \beta_i^{(1)} \leq r \quad \dots (15)$$

Einsetzen von  $\bar{\varphi}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(1)}$  läuft darauf hinaus,  $\Delta x_i, \Delta y_i, r$  durch  $\Delta x_i^{(1)}, \Delta y_i^{(1)}, \bar{r}^{(1)}$  zu ersetzen. Zusammen mit (14) führt das aber auf

$$r_i^{(1)} \leq \bar{r}^{(1)}$$

entgegen der Voraussetzung, daß  $P_i$  kritisch war. Also wird die Ungleichung (15) von der augenblicklichen Lösung nicht erfüllt.

Der geometrische Sachverhalt, der der Konstruktion dieser Ungleichung zugrunde liegt, wird aus Abb. 3 deutlich.  $Q_i^{(1)}$  liegt in dem zu den Richtungen  $\alpha_{ij}^{(1)}$  gehörigen Tangentenpolygon mit Inkreisradius  $\bar{r}^{(1)}$ , aber nicht im Inkreis selbst. Das Polygon wird durch eine weitere Seite mit Normalrichtung  $\beta_i^{(1)}$  ergänzt, so daß jetzt  $Q_i^{(1)}$  außerhalb des neuen Polygons liegt.

Nun formuliere man ein zweites approximierendes L. P., indem man die Bedingungen (15) den ursprünglichen hinzufügt. Ändern wir die Bezeichnungen, so haben wir jetzt Richtungen  $\alpha_{ij}^{(2)}, j = 1, \dots, m_i^{(2)}$ , dabei ist  $m_i^{(2)} = m_i^{(1)} + 1$  oder  $m_i^{(1)}$ , je nachdem ob  $P_i$  kritisch war oder nicht.

Man löse nun dieses L. P. auf dem Umweg über das neue duale, das sich vom ursprünglichen dualen nur durch das Hinzukommen einiger neuer Variabler unterscheidet. Diese Tatsache kann man bei der Lösung rechenökonomisch ausnützen. Die neue Lösung sei  $\bar{\varphi}^{(2)}, \bar{\sigma}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}, \bar{r}^{(2)}$ .

Da diese Lösung auch die Ungleichungen des ersten approximierenden L. P.'s erfüllt (diese sind ja ein Teil der Ungleichungen des zweiten), gilt notwendigerweise

$$\bar{r}^{(1)} \leq \bar{r}^{(2)}. \quad \dots (16)$$

Nunmehr verfähre man mit der zweiten Lösung wie mit der ersten und iteriere solange als notwendig, z. B. bis  $\bar{r}^{(k)} - r^{(k)}$  unter eine gewisse Schranke rückt.

## 6. Konvergenz des Iterationsverfahrens

Das ursprüngliche Problem kann man geometrisch so formulieren. Suche den kleinsten Radius  $r = r_{opt}$ , für den es möglich ist, die Punkte  $Q_i$  durch eine Transformation (Bewegung) in das Innere von Kreisen mit Radius  $r$  um die entsprechenden Punkte  $P_i$  zu bringen. Bei den approximierenden L. P. werden die Kreise mit Radius  $r$  um die  $P_i$  durch Tangentenpolygone mit Inkreisradius  $r$  ersetzt. Da man einen Kreis beliebig gut durch ein Tangentenpolygon annähern kann, ist die Konvergenz des Verfahrens plausibel. Ein allgemeiner Beweis für die Konvergenz der Schnittebenenmethode befindet sich in [3], S. 93. Ihm entnehmen wir:

Die Optima  $\bar{r}^{(k)}, k = 1, 2, \dots$  der approximierenden L.P. e konvergieren monoton, nicht fallend, gegen  $r_{opt}$ , das Optimum der ursprünglichen Aufgabe. Die

Schranken  $\bar{r}^{(k)}$  konvergieren (nicht notwendig monoton) gegen  $r_{opt}$ . Die Größen  $\bar{\varphi}^{(k)}$ ,  $\bar{\sigma}^{(k)}$ ,  $\bar{\tau}^{(k)}$  konvergieren nicht notwendigerweise, jedoch läßt sich eine Teilfolge auswählen, die gegen ein  $\varphi_{opt}$ ,  $\sigma_{opt}$ ,  $\tau_{opt}$  konvergiert.

Die vorhin angestellte Plausibilitätsbetrachtung soll nicht zu der Annahme verleiten, daß sehr viele Polygonseiten bei der Approximation der Kreise notwendig sind, um eine erwünschte Genauigkeit zu erreichen, mit anderen Worten, daß man sehr lange iterieren muß. Praktische Versuche haben gezeigt, daß man oft mit erstaunlich wenigen Iterationen zum Ziel kommt.

7. Beispiel

Die Angaben für ein Beispiel mit 5 Punkten mögen lauten

$i$	$x_i$	$y_i$	$\delta x_i$	$\delta y_i$
1	1	1	1	1
2	-1	1	1	2
3	-1	-1	2	1
4	1	-1	2	2
5	0	0	2	-3

Bemerkung: Die Problemstellung ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn ursprünglich die  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  klein sind im Vergleich zu den Koordinatendifferenzen. Für die Rechnung kann man jedoch die  $x_i, y_i$  in anderen Einheiten (z. B. km) ausdrücken als die  $\delta x_i, \delta y_i$  (z. B. dm). So sind obige Zahlen zu verstehen. In der resultierenden Transformation erscheint dann  $\varphi$  mit einem Faktor multipliziert (z. B. 10000), die  $\sigma, \tau, r$  haben dieselbe Dimension wie die  $\delta x_i, \delta y_i$ .

Wir wählen für das erste approximierende L. P. die Winkel

$$\alpha_{ij}^{(1)} = (j - 1) \frac{\pi}{2}; \quad i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, \dots, 4 = m_i^{(1)} \alpha_{ij}^{(1)}$$

Die anfänglichen Tangentenpolygone sind also achsenparallele Quadrate.

Von dem System der 20 Ungleichungen in (10) schreiben wir nur die ersten 8, die zu den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  gehören, an:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -\varphi & +\sigma & & -r & \leq & -1 \\
 \varphi & & +\tau & -r & \leq & -1 \\
 \varphi & -\sigma & & -r & \leq & 1 \\
 -\varphi & & -\tau & -r & \leq & 1 \\
 -\varphi & +\sigma & & -r & \leq & -1 \\
 -\varphi & & +\tau & -r & \leq & -2 \\
 \varphi & -\sigma & & -r & \leq & 1 \\
 \varphi & & -\tau & -r & \leq & 2 \\
 \dots & & & & & \dots \\
 & & & -r & \leq & \text{Maximum}
 \end{array}$$

Die Optimal-Lösung dieses L. P. lautet

$$\bar{\varphi}^{(1)} = 0, \bar{\sigma}^{(1)} = -3.5, \bar{\tau}^{(1)} = 0.5, \bar{r}^{(1)} = 2.5$$

Die zu dieser Lösung gehörigen Koordinatenabweichungen und Klaffungen entnehme man folgender Tabelle

$i$	$\Delta x_i^{(1)}$	$\Delta y_i^{(1)}$	$r_i^{(1)}$
1	- 2.5	1.5	2.91548
2	- 2.5	2.5	3.53553
3	- 1.5	1.5	2.12132
4	- 1.5	2.5	2.91548
5	- 1.5	- 2.5	2.91548

Es ist  $\bar{r}^{(1)} = 3.53553$ , also  $2.5 \leq r_{opt} \leq 3.53553$

Der Tabelle entnehmen wir, daß die Punkte  $P_1, P_2, P_4, P_5$  kritisch sind, also  $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_4^{(1)}, Q_5^{(1)}$  nicht im Inkreis der Tangentenpolygone liegen. Sie geben gemäß (14), (15) Anlaß zu neuen Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 1.37199 \varphi - 0.85749 \sigma + 0.51450 \tau - r &\leq 0.34300 \dots P_1 \\ - 0.70711 \sigma + 0.70711 \tau - r &\leq - 0.70711 \dots P_2 \\ 0.34300 \varphi - 0.51450 \sigma + 0.85749 \tau - r &\leq - 0.68600 \dots P_4 \\ - 0.51450 \sigma - 0.85749 \tau - r &\leq - 1.54349 \dots P_5 \end{aligned}$$

Durch Hinzufügen dieser Ungleichungen entsteht aus dem ersten approximierenden L. P. das zweite.

Seine Lösung ist:

$$\bar{\varphi}^{(2)} = 0, \bar{\sigma}^{(2)} = - 2.03553, \bar{\tau}^{(2)} = 0.5, \bar{r}^{(2)} = 2.5$$

Die zugehörige Tabelle lautet:

$i$	$\Delta x_i^{(2)}$	$\Delta y_i^{(2)}$	$r_i^{(2)}$
1	- 1.03553	1.50000	1.82273
2	- 1.03553	2.50000	2.70598
3	- 0.03553	1.50000	1.50042
4	- 0.03553	2.50000	2.50025
5	- 0.03553	- 2.50000	2.50025

Es ist  $\bar{r}^{(2)} = 2.70598$  also  $2.5 \leq r_{opt} \leq 2.70598$ .

Die Punkte  $P_2, P_4, P_5$  sind kritisch und führen zu den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} - 0.54120 \varphi - 0.38268 \sigma + 0.92388 \tau - r &\leq - 1.46508 \dots P_2 \\ 0.98569 \varphi - 0.01421 \sigma + 0.99990 \tau - r &\leq - 1.97137 \dots P_4 \\ - 0.01421 \sigma - 0.99990 \tau - r &\leq - 2.97127 \dots P_5 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der weiteren Iterationen entnehme man folgender Tabelle:

$k$	$\bar{\varphi}^{(k)}$	$\bar{\sigma}^{(k)}$	$\bar{\tau}^{(k)}$	$\bar{r}^{(k)}$	$\bar{r}^{(k)}$	$\bar{r}^{(k)} - \bar{r}^{(k-1)}$
1	0	- 3.5	0.5	2.5	3.53553	1.03553
2	0	- 2.03553	0.5	2.5	2.70598	0.20598
3	0	- 1.49728	0.5	2.5	2.55004	0.05004
4	0.03980	- 1.69924	0.47610	2.53366	2.54592	0.01226
5	0.01969	- 1.59863	0.48817	2.54168	2.54474	0.00306
6	0.03169	- 1.64890	0.48174	2.54211	2.54282	0.00071
7	0.03772	- 1.67403	0.47853	2.54232	2.54247	0.00015
8	0.04026	- 1.68464	0.47719	2.54242	2.54246	0.00004

Die nach der 8. Iteration verbleibenden Koordinatenabweichungen und Klaffungen zeigt folgende Tabelle

$i$	$\Delta x_i^{(8)}$	$\Delta y_i^{(8)}$	$r_i^{(8)}$
1	- 0.72490	1.51744	1.68170
2	- 0.72490	2.43693	2.54246
3	0.35562	1.43693	1.48028
4	0.35562	2.51744	2.54244
5	0.31536	- 2.52281	2.54245

Das 8. approximierende L. P. wies 45 Ungleichungen auf. Die Abbruchsbedingung lautete  $\bar{r}^{(k)} - \underline{r}^{(k)} \leq 10^{-4}$

### 8. Erprobung mittels elektronischer Rechenmaschine

Der Rechenaufwand für das Verfahren ist größer als für die bekannten Verfahren, die dem Gauß-Kriterium zugrunde liegen. Der Einsatz einer elektronischen Rechenmaschine ist für eine größere Punktzahl zweckmäßig. Es wurde ein ALGOL-Programm für das Verfahren geschrieben und auf einer IBM 7040 erprobt. Die durchgerechneten Beispiele sowie ihr Rechenaufwand können folgender Tabelle entnommen werden. Die Abbruchsbedingung war jeweils dieselbe wie in Abschnitt 7.

Problem	Anzahl d. Punkte	Anz. d. Iterationen	Maxim. Anz. der Ungleichungen	Rechenzeit in Sekunden
1	5	8	45	16
2	9	4	53	12
3	40	4	185	24
4	200	3	861	77
5	500	3	2127	181

### 9. Schlußbemerkung

Der Verfasser glaubt gezeigt zu haben, daß überbestimmte Punkttransformationen nach dem Prinzip der kleinsten Klaffungen mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage mittlerer Größe in sinnvoller Weise gelöst werden können.

Obwohl sich die Darstellung auf den Fall einer Bewegung in der Ebene beschränkt, läßt sich das Verfahren, wie schon erwähnt, leicht auf andere Transformationen, wie Ähnlichkeits-Transformationen, affine, projektive Transformationen usw. in Ebene oder Raum übertragen.

Auch in anderer Hinsicht ist das Verfahren verallgemeinerungsfähig. Zum Beispiel kann man eine Gewichtung einführen und verlangen, daß  $\text{Max}_{1 \leq i \leq n} p_i r_i$  möglichst klein wird, wobei  $r_i$  wie bisher die Klaffung in Punkt  $P_i$  ist und  $p_i$  das zu  $P_i$  gehörige Gewicht. Formuliert man diese Aufgabe so:

$$\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 \leq \frac{r}{p_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$r = \text{Minimum,}$

so sieht man, daß die notwendigen Änderungen gering sind.

Schließlich könnte noch gefordert werden, daß in gewissen besonders wichtigen Punkten die Klaffungen unter einer gewissen Schranke liegen müssen. Allerdings kann es dabei passieren, daß keine Lösung existiert.

#### Literatur:

- [1] *Dantzig, G. B.*: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Springer 1966.
- [2] *Wolf, H.*: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Dümmler-Verlag
- [3] *Collatz-Wetterling*: Optimierungsaufgaben. Springer 1966.

## Erste Messungen mit dem Mekometer III an Staumauern

Von *Johann Krötzl*, Chur

Um die kleinen Bewegungen großer Bauwerke zu erfassen, begnügt man sich nicht allein mit dem verhältnismäßig einfachen Feinnivellement, man mißt Richtungsänderungen und in neuerer Zeit auch Längenänderungen. Während die physikalische Meßmethode eine große Anzahl von Meßgeräten kennt, verfügt die geodätische Meßmethode nur über wenige Meßmittel. Im folgenden Bericht wird gezeigt, was von einem neuen elektrooptischen Meßgerät erwartet werden darf.

*Präzisionsdistanzmessungen* wurden bisher mit Invardrähten oder -bändern ausgeführt. Der Aufwand an Personal ist beträchtlich. Zu einer Meßequipe gehören mindestens zwei Beobachter an den Endskalen, zwei Gehilfen an den Spannböcken und der Schreiber. Bei Basismessungen sind die Equipen noch größer. In den Kontrollgängen neuerer Staumauern sind Polygonzüge angelegt, durch deren Formänderung das Verhalten der Mauer und der angrenzenden Felszone überwacht wird. Die Polygonseiten sind bis auf wenige Zentimeter gleich lang und variieren je nach Mauerform und Blockabstand zwischen 10 m und 32 m. Die Messung einer Polygonseite dauert 1—2 Minuten. Gewöhnlich wird mit einem Draht der ganze Zug durchgemessen, dann rollt man den Draht auf eine Spule und hält ihn für die Messung in einem anderen Gang bereit. In der Regel verwendet man drei Drähte. Die ca. dreißig mir bekannten Deformationsmessungen, die vom Ingenieurbüro *W. Schneider*, Chur, ausgeführt wurden, ergeben eine Totallänge von über 100 km Präzisionsdistanzmessung. Bei sorgfältiger Bedienung treten Meßfehler kaum auf. Ein guter Schreiber erkennt sie sofort nach der Messung.

Allerdings gibt es *systematische Fehler* von einer Meßperiode zur anderen, von einem Kontrollgang zum anderen. Wir müssen dafür zwei Fehlerursachen annehmen: Einmal die Änderung der Drahtlänge durch das Auf- und Abrollen und dann die Änderung wegen der Instabilität der Invarlegierung. Bei sorgfältiger Behandlung bleibt die Drahtlänge für die Dauer einer Messung eines Polygonzuges konstant. Der relative systematische Fehler kann eliminiert werden. Der daraus berechnete mittlere Fehler für eine mit drei Drähten gemessene Polygonseite liegt bei  $\pm 0,04$  mm.

Die absolute Länge geht also bald verloren. Man könnte sie wieder bekommen, wenn man den freien Polygonzug (eine Funktion der Drahtlänge) in die Triangulation