Paper-ID: VGI_196812

Über räumliche Transformationen

Peter Leeb [1]

[1] *B. A. für Eich- u. Verm., 1080 Wien, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **56** (3), S. 96–104

1968

BibTEX:

```
@ARTICLE{Leeb_VGI_196812,
Title = {{\"U}ber r{\"a}umliche Transformationen},
Author = {Leeb, Peter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {96--104},
Number = {3},
Year = {1968},
Volume = {56}
}
```

wenn auch nicht überwältigenden Zeiteinsparung gegenüber dem empirischen Verfahren gerechnet werden, wenn große Höhenunterschiede im Modell auftreten? Ein unbestreitbarer Gewinn würde darin bestehen, die Erfassung der letzten Feinheiten der Subjektivität des Auswerters entziehen zu können.

Literaturverzeichnis

[1] *Stickler* und *Waldhäusl:* Interpretation der vorläufigen Ergebnisse der Versuche der Kommission C ... ÖZfV, OEEPE-Sonderveröffentlichung Nr. 3, 1967.

[2] *Kasper:* Ein numerisches Verfahren des Folgebildanschlusses für gebirgiges Gelände, SZfV u. K., 1950.

[3] *Meeus* und *Thiriar* (Photo Gevaert): Kontrolle der Planheit der phot. Platten ... Photogrammetria, 1958.

[4] *Kovarik:* Erfahrungen mit Cronarfilm bei einer großmaßstäblichen, numerischen Punktbestimmung, ÖZfV, 1967.

[5] *Schmid:* Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern unter Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters, Öst. Akademie der Wiss., math. naturw. Klasse, 159. Bd., 1950.

[6] *Kasper:* Am Wild-Autographen ausgeführte Versuche im Hinblick auf die Genauigkeit und die Wirtschaftlichkeit einiger neuer gegenseitiger Orientierungsvorgänge ..., Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie, 1949.

[7] *Hallert:* Contribution to Theory of Errors for Double Point Intersection in Space, Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm Nr. 35, 1950.

[8] *Van der Weele:* Die numerische gegenseitige Orientierung auf die Aerotriangulation angewendet, Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie, 1951.

[9] *Gotthardt:* Zur Genauigkeit der rechnerischen und der optisch-mechanischen gegenseitigen Orientierung, AVN, 1953.

[10] *Schmid:* Die funktionellen Zusammenhänge von y-Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell, ... ÖZfV, 1954.

[11] *Jerie:* Beitrag zum numerischen Orientierungsverfahren für gebirgiges Gelände, Photogrammetria, 1953/54.

[12] *Bernhard:* Über den Einfluß der Achsstellungen des Auswertegerätes auf die gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen, Photogrammetria, 1953/54.

Über räumliche Transformationen

von *Peter Leeb*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

1. Einleitung

Die absolute Orientierung eines Modelles auf Grund gegebener Paßpunkte wird bekanntlich durch Verschiebung und räumliche Drehstreckung eines bereits gegenseitig orientierten Modelles erreicht. An den Analoggeräten wird die Verschiebung des Modelles i. a. mit Hilfe der Koordinatenzählwerke durchgeführt. Die Streckung und Drehung geschieht durch entsprechende Änderung der Basiskomponenten bzw. durch gemeinsame Kammerbewegungen.

In der Praxis bedient man sich dazu, falls nicht überhaupt empirisch gearbeitet wird, einiger einfacher Näherungsformeln. Durch schrittweise Anwendung dieser Formeln kommt man zu befriedigenden Ergebnissen.

Verfahren, die diese Daten in einem einzigen, strengen Rechengang geliefert hätten, wurden wegen ihres großen Rechenaufwandes bis jetzt nicht verwendet. Man hätte nämlich nicht nur eine räumliche Drehstreckung zu rechnen, sondern man müßte auch alle jene Einflüsse berücksichtigen, die sich aus den Achsstellungen der Analoggeräte ergeben (vergl. hiezu [1] und [2]). Es braucht nicht besonders erwähnt zu werden, daß die Durchführung dieser Rechnungen mit Hilfe gewöhnlicher Rechenmaschinen weniger wirtschaftlich ist, als die iterative Anwendung der oben erwähnten Näherungsformeln.

Hier aber hat die in jüngster Zeit erfolgte Entwickelung der sog. Kleincomputer neue Möglichkeiten geschaffen. Der Gedanke liegt nahe, den erwähnten umfangreichen Rechenablauf an einem solchen Kleincomputer durchführen zu lassen und auf diese Weise eine wesentliche Beschleunigung des Orientierungsvorganges zu erreichen.

2. *Aufgabenstellung*

Aus dem Gebiet der analytischen Photogrammetrie sind für die räumliche Drehstreckung bereits eine Anzahl von Verfahren angegeben worden (siehe u. a. [3] und [4]). Es gibt exakte Lösungen und auch Näherungsverfahren, die durch eine Ausgleichung ergänzt werden. Im folgenden soll nun eine neue Lösung gezeigt werden, die der bei Kleincomputern doch begrenzten Kapazität weitgehend Rechnung tragen dürfte. Die hier gezeigte Lösung ist allerdings keine „räumliche Drehstreckung", sondern eine „räumliche Affintransformation". Darauf wird später noch eingegangen werden. Vorerst soll nun ein Verfahren gezeigt werden, das 3 Vollpaßpunkte als gegeben voraussetzt (Abschnitt 3). Weiters wird dann ein Verfahren behandelt, welches die Angaben von beliebig vielen Paßpunkten pro Modell berücksichtigt (Abschnitt 4). Die Ergebnisse solcher Affintransformationen sind dann die Grundlage für die Berechnung der Drehungen an den Auswertegeräten (Abschnitt 5).

3. *Die räumliche Affintransformation mit 3 Vollpaßpunkten*

Die Aufgabe besteht darin, die Transformationselemente zu berechnen, die die Punkte des einen Systems M (Maschinensystem) in die entsprechenden Punkte des Systems S (Sollsystem) transformieren.

Die räumliche Drehstreckung ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\mathfrak{X}^S = \mathfrak{X}_0{}^S + \mu\, \mathfrak{A}\, (\mathfrak{X}^M - \mathfrak{X}_0{}^M) \qquad \ldots (1)$$

In Koordinaten folgt aus (1) das System:

$$\begin{aligned} X^S &= X_0{}^S + \mu\, \{(X^M - X_0{}^M)A_{11} + (Y^M - Y_0{}^M)A_{12} + (Z^M - Z_0{}^M)A_{13}\},\\ Y^S &= Y_0{}^S + \mu\, \{(X^M - X_0{}^M)A_{21} + (Y^M - Y_0{}^M)A_{22} + (Z^M - Z_0{}^M)A_{23}\},\\ Z^S &= Z_0{}^S + \mu\, \{(X^M - X_0{}^M)A_{31} + (Y^M - Y_0{}^M)A_{32} + (Z^M - Z_0{}^M)A_{33}\}. \qquad \ldots (1a) \end{aligned}$$

Die Werte A_{11}, A_{12}, $A_{13} \ldots A_{33}$ sind dabei die Koeffizienten der für die Drehung maßgeblichen Drehmatrix.

Bei Kenntnis von 3 einander entsprechenden Punktepaaren drängt sich förmlich die Lösungsmöglichkeit auf, durch Einsetzen in diese Gleichungen unter Heranziehung eines vierten Punktes (etwa des Schwerpunktes) die Transformationselemente zu bestimmen. Man bekäme die Werte $\mu A_{11}, \mu A_{12}, \ldots \mu A_{33}$, und könnte durch die Orthogonalitätsbedingung:

$$\sum_{j=1}^{3} A_{ij} \cdot A_{\varkappa j} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq \varkappa \\ 1 \text{ für } i = \varkappa \end{cases} \quad i, \varkappa = 1, 2, 3 \qquad \ldots (2)$$

den Maßstabsfaktor μ bestimmen.

Allerdings führt dieses Verfahren in dieser Form nicht zum Ziel und der Grund dafür ist folgender:

Geometrisch gesehen bedeutet eine Gleichung mit 3 Unbekannten eine Ebene im Raum. Die drei Gleichungen mit drei Unbekannten können nun als drei Ebenen gedeutet werden, die eine bestimmte Stellung im Raum haben. Der Schnittpunkt dieser 3 Ebenen ist dann die gesuchte Lösung des Gleichungssystemes.

Die Genauigkeit dieser Lösung hängt nun von der Stellung der Ebenen zueinander ab. Zwei Ebenen, die sich schleifend schneiden, liefern keine genau definierte Schnittgerade. Ebenso hängt auch die Genauigkeit des Durchstoßpunktes dieser Schnittgeraden mit der 3. Ebene von dem Winkel ab, unter dem die Gerade die Ebene durchstößt. Dabei muß man vor allem bedenken, daß die Koeffizienten dieser Ebenen (Gleichungen) gemessene Größen, also keine fehlerfreien Werte sind. Der Idealfall wäre natürlich 3 zueinander orthogonale Ebenen. Die Koeffizienten $X - X_0$, $Y - Y_0$ und $Z - Z_0$ selbst sind die Komponenten von Vektoren, die auf die jeweiligen Ebenen normal stehen. Ihre Stellung zueinander ist ganz selbstverständlich ebenso kennzeichnend für die Genauigkeit der Lösung des Gleichungssystems. Der Idealfall wäre wieder 3 aufeinander senkrecht stehende Vektoren.

In dem Fall aber, daß die 3 Paßpunkte mit ihrem Schwerpunkt zur Bestimmung der Gleichungssysteme (1a) herangezogen werden, liegen die Vektoren in einer Ebene. 3 Vektoren in einer Ebene sind aber voneinander linear abhängig. Das heißt, von den drei Gleichungen sagt die dritte Gleichung nichts anderes aus als die anderen zwei. Geometrisch kann man dies so deuten, daß die dritte Ebene durch die Schnittgerade der beiden anderen Ebenen hindurchgeht. Liegen die Punkte des Modelles in der in Abb. 1 angedeuteten Lage, so stehen die Vektoren $\mathfrak{x}_{0,1}$ und $\mathfrak{x}_{0,2}$ ungefähr aufeinander senkrecht ($\mathfrak{x}_{0,1} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_{0,2} = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0$). Alle weiteren Vektoren, die aus Kombinationen von $\mathfrak{x}_{0,1}$ und $\mathfrak{x}_{0,2}$ in der Ebene gebildet werden, können nichts Neues bringen. Auch ein etwaiger vierter Vollpaßpunkt (P_3) wird daran i. a. nicht viel ändern, da Höhenunterschiede in Gebieten, die für die numerische Photogrammetrie in Frage kommen, meist gering im Vergleich zu den Streckenlängen sind. Der Vektor $\mathfrak{x}_{0,3}$ geht dann nur um weniges aus der durch $\mathfrak{x}_{0,1}$ und $\mathfrak{x}_{0,2}$ aufgespannten Ebene heraus. Die Schnitte sind demnach schleifend und das Ergebnis wird nicht befriedigen.

Der vierte homologe Punkt muß sich also außerhalb der Ebene $\mathfrak{x}_{0,1}$, $\mathfrak{x}_{0,2}$ befinden und der Verbindungsvektor von P_0 zu diesem sollte möglichst senkrecht auf $\mathfrak{x}_{0,1}$ und $\mathfrak{x}_{0,2}$ stehen. Hier bietet das „Äußere Produkt“ die besten Möglichkeiten. Durch die Rechnung $\mathfrak{x}_{0,1}{}^M \times \mathfrak{x}_{0,2}{}^M$ und $\mathfrak{x}_{0,1}{}^S \times \mathfrak{x}_{0,2}{}^S$ in beiden Systemen erhält man die einander entsprechenden Vektoren $\mathfrak{x}_{0,T_v}{}^M$ und $\mathfrak{x}_{0,T_v}{}^S$ (Abb. 2). Beide Vektoren stehen in ihren Systemen sowohl auf $\mathfrak{x}_{0,1}$ als auch auf $\mathfrak{x}_{0,2}$ normal.

Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen nun die Komponenten der Vektoren in beiden Systemen mit x, y und z bezeichnet werden. Es gilt also: $x = X - Y_0$, $y = Y - Y_0$ und $z = Z - Z_0$. Die Formeln für das „Äußere Produkt" lauten dann in Koordinatenform wie folgt:

$$
\begin{aligned}
x^M{}_{T\nu} &= y^M{}_1\, z^M{}_2 - y^M{}_2\, z^M{}_1\,, & x^S{}_{T\nu} &= y^S{}_1 z^S{}_2 - y^S{}_2 z^S{}_1,\\
y^M{}_{T\nu} &= x^M{}_2\, z^M{}_1 - x^M{}_1\, z^M{}_2\,, & y^S{}_{\nu} &= x^S{}_2 z^S{}_1 - x^S{}_1 z^S{}_2,\\
z^M{}_{T\nu} &= x^M{}_1\, y^M{}_2 - x^M{}_2\, y^M{}_1\,, & z^S{}_{T\nu} &= x^S{}_1 y^S{}_2 - x^S{}_2 y^S{}_1. \qquad \ldots (3)
\end{aligned}
$$

Die Länge dieser Vektoren ist bekanntlich gleich der Fläche der Parallelogramme, die durch die Vektoren $\mathfrak{X}_{0,1}{}^M$ und $\mathfrak{X}_{0,2}{}^M$ buw. $\mathfrak{X}_{0,1}{}^S$ und $X_{0,2}{}^S$ aufgespannt werden. Der Maßstabsfaktor, um den sich entsprechende Größen in beiden Systemen unterscheiden, soll vorläufig mit μ bezeichnet werden. Es ist demnach:

$$/\mathfrak{X}_{0,1}{}^S/ = \mu\, /\, \mathfrak{X}_{0,1}{}^M/ \qquad \text{und} \qquad /\mathfrak{X}_{0,2}{}^S/ = \mu/\mathfrak{X}^{\,M}_{0,2}\,/.$$

Daraus ergibt sich aber, daß $/\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^S/ = \mu^2/\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^M/$ sein muß.

Die Punkte $P_{T\nu}{}^M$ und $P_{T\nu}{}^S$ sind also keine homologen Punkte, da der Quotient $\dfrac{/\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^S/}{/\mathfrak{X}_{0,T\nu}/^M}$ nicht μ sondern μ^2 ist. Dividiert man nun die Vektoren $\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^M$ und $\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^S$ jeweils durch die Wurzel ihres Betrages, so entstehen Vektoren $\mathfrak{X}_{0,T}{}^M$ und $\mathfrak{X}_{0,T}{}^S$, die den Betrag $/\mathfrak{X}_{0,T}/ = \sqrt{/\mathfrak{X}_{0,T\nu}/}$ haben. Hier ist dann der Quotient $\dfrac{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^S/}{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^M/}$ gleich μ. Die durch die Vektoren $\mathfrak{X}_{0,T}{}^M$ bzw. $\mathfrak{X}_{0,T}{}^S$ definierten Punkte $P_T{}^M$ und $P_T{}^S$ sind dann homologe Punkte (Abb. 2).

Einfacher noch geht es, wenn man $\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^M$ bzw. $\mathfrak{X}_{0,T\nu}{}^S$ durch $/\mathfrak{X}_{0,1}{}^M/$ bzw. $/\mathfrak{X}_{0,1}{}^S/$ dividiert. So reduziert man die Dimension einer Fläche ebenfalls zu der einer Seite und der Quotient der nun entstandenen Vektoren $\dfrac{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^S/}{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^M/}$ ist wieder μ.

Diese Art der Reduktion ist nicht nur einfacher, sondern auch genauer als die vorhin erwähnte, was später noch gezeigt werden soll. Sie wird darum auch formelmäßig angewendet und ebenso in den in der Beilage gezeigten Rechenbeispielen verwendet.

Die Komponenten von $\mathfrak{X}_{0,T}{}^M$ bzw. $\mathfrak{X}_{0,T}{}^S$ erhält man nun wie folgt:

$$
\begin{aligned}
x_T{}^M &= \frac{x_{T\nu}{}^M}{\sqrt{x_1{}^{M2} + y_1{}^{M2} + z_1{}^{M2}}}\,, & x_T{}^S &= \frac{x_{T\nu}{}^S}{\sqrt{x_1{}^{S\,2} + y_1{}^{S\,2} + z_1{}^{S\,2}}}\,,\\
y_T{}^M &= \frac{y_{T\nu}{}^M}{\sqrt{x_1{}^{M2} + y_1{}^{M2} + z_1{}^{M2}}}\,, & y_T{}^S &= \frac{y_{T\nu}{}^S}{\sqrt{x_1{}^{S\,2} + y_1{}^{S\,2} + z_1{}^{S\,2}}}\,,\\
z_T{}^M &= \frac{z_{T\nu}{}^M}{\sqrt{x_1{}^{M2} + y_1{}^{M2} + z_1{}^{M2}}}\,, & z_T{}^S &= \frac{z_{T\nu}{}^S}{\sqrt{x_1{}^{S\,2} + y_1{}^{S\,2} + z_1{}^{S\,2}}}\,. \qquad \ldots (3\,a)
\end{aligned}
$$

Nun kann man mit den so erhaltenen Werten in das Gleichungssystem (1a) eingehen und man erhält 3 Gleichungssysteme von je drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Führt man noch zur Vereinfachung das Symbol $\overline{A_{ik}} = \mu\ A_{ik}$ ein, so lauten die Gleichungssysteme:

$$
\begin{aligned}
x_1{}^M \overline{A_{11}} + y_1{}^M \overline{A_{12}} + z_1{}^M \overline{A_{13}} &= x_1{}^S,\\
x_2{}^M \overline{A_{11}} + y_2{}^M \overline{A_{12}} + z_2{}^M \overline{A_{13}} &= x_2{}^S,\\
x_T{}^M \overline{A_{11}} + y_T{}^M \overline{A_{12}} + z_T{}^M \overline{A_{13}} &= x_T{}^S,\\
x_1{}^M \overline{A_{21}} + y_1{}^M \overline{A_{22}} + z_1{}^M \overline{A_{23}} &= y_1{}^S,\\
x_2{}^M \overline{A_{21}} + y_2{}^M \overline{A_{22}} + z_2{}^M \overline{A_{23}} &= y_2{}^S,\\
x_T{}^M \overline{A_{21}} + y_T{}^M \overline{A_{22}} + z_T{}^M \overline{A_{23}} &= y_T{}^S,\\
x_1{}^M \overline{A_{31}} + y_1{}^M \overline{A_{32}} + z_1{}^M \overline{A_{33}} &= z_1{}^S,\\
x_2{}^M \overline{A_{31}} + y_2{}^M \overline{A_{32}} + z_2{}^M \overline{A_{33}} &= z_2{}^S,\\
x_T{}^M \overline{A_{31}} + y_T{}^M \overline{A_{32}} + z_T{}^M \overline{A_{33}} &= z_T{}^S. \qquad \ldots (4)
\end{aligned}
$$

Durch Auflösung dieser Gleichungssysteme erhält man die Werte $\overline{A_{11}}$, $\overline{A_{12}}$, $\overline{A_{13}}$, $\overline{A_{21}} \ldots \overline{A_{33}}$.

Diese Werte $\overline{A_{ik}}$ sind bereits die Transformationselemente, mit denen man Punkte von dem einen System in das andere transformieren kann. Die Formeln lauten dazu:

$$\mathfrak{x}_N{}^S = \mathfrak{x}_0{}^S + \overline{\mathfrak{A}}\,(\mathfrak{x}_N{}^M - \mathfrak{x}_0{}^M). \qquad \ldots (5)$$

In Koordinatenform ergibt dies:

$$
\begin{aligned}
X_N{}^S &= X_0{}^S + \overline{A_{11}}(X_N{}^M - X_0{}^M) + \overline{A_{12}}(Y_N{}^M - Y_0{}^M) + \overline{A_{13}}(Z_N{}^M - Z_0{}^M),\\
Y_N{}^S &= Y_0{}^S + \overline{A_{21}}(X_N{}^M - X_0{}^M) + \overline{A_{22}}(Y_N{}^M - Y_0{}^M) + \overline{A_{23}}(Z_N{}^M - Z_0{}^M),\\
Z_N{}^S &= Z_0{}^S + \overline{A_{31}}(X_N{}^M - X_0{}^M) + \overline{A_{32}}(Y_N{}^M - Y_0{}^M) + \overline{A_{33}}(Z_N{}^M - Z_0{}^M). \qquad \ldots (5\text{a})
\end{aligned}
$$

Der Maßstabsfaktor rechnet sich aus:

$$\mu_i = \sqrt{(\overline{A_{i1}})^2 + (\overline{A_{i2}})^2 + (\overline{A_{i3}})^2} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3. \qquad \ldots (6)$$

Hier fällt auf, daß der Maßstabsfaktor in den einzelnen Koordinatenrichtungen nicht genau gleich groß ist. Man erhält drei verschiedene Maßstabsfaktoren μ_1, μ_2, μ_3, die in der zweifachen Überbestimmung der Aufgabe begründet sind. Durch diese verschiedenen Maßstabsfaktoren wird eine ideale Anpassung des Modelles an die Paßpunkte erreicht. Deshalb ist das vorliegende Verfahren nicht eine „räumliche Drehstreckung", sondern eine „räumliche Affintransformation".

Hier soll noch eine kurze Überlegung über die drei verschiedenen Maßstäbe gebracht werden:

Auch in der numerischen Photogrammetrie wird in der letzten Zeit fast ausschließlich Cronarfilm als Aufnahmematerial verwendet. Dieser Film schrumpft während des Entwickelungsvorganges in den Koordinatenrichtungen x und y in einem jeweils verschiedenen Maßstab. Diese Verschiedenheit der Maßstäbe wird durch die unterschiedlichen Maßstabsfaktoren μ_1 und μ_2 in der x bzw. y-Richtung berücksichtigt. Nicht ganz so selbstverständlich ist dies in der dritten Dimension, in der z-Richtung. Der Maßstab μ_3 wird zum überwiegend großen Teil durch das Verhältnis $\frac{/\mathfrak{x}_{0,T}{}^S/}{/\mathfrak{x}_{0,T}{}^M/}$ bestimmt. Diese Punkte sind aber „theoretische Punkte"; ihre jeweilige Entfernung von der $\mathfrak{x}_{0,1}$, $\mathfrak{x}_{0,2}$ Ebene ist durch die Verjüngung des Flächeninhaltes des von den beiden Vektoren $\mathfrak{x}_{0,1}$ u. $\mathfrak{x}_{0,2}$ aufgespannten Parallelogrammes entstanden. Da man nun, wie schon vorher gezeigt wurde, verschiedene Möglichkeiten der Verjüngung hat, ist der Maßstab μ_3 vorerst nicht genau definiert. Eine kleine Überlegung bringt aber sofort Klarheit:

Die Höhen in einem photogrammetrischen Modell sind Funktionen der x-Parallaxen. Die y-Werte spielen dabei keine Rolle. Es muß daher getrachtet werden, den Maßstab in der z-Richtung gleich dem der x-Richtung zu machen. μ_3 soll gleich μ_1 werden. Der Betrag $/\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^S/$ ist aber gleich $\mu_1 \mu_2 /\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^M/$. Dividiert man nun die beiden Vektoren $\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^S$ und $\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^M$ in beiden Systemen durch Streckenlängen, deren Maßstabsfaktor gleich μ_2 ist, so erhält man Vektoren, für deren Absolutwerte gilt: $\dfrac{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^S/}{/\mathfrak{X}_{0,T}{}^M/} = \mu_1$. Die Vektoren $\mathfrak{X}_{0,1}{}^S$ und $\mathfrak{X}_{0,1}{}^M$ liegen aber in der y-Richtung und ihr Maßstabsfaktor ist folglich gleich μ_2. Durch die Division $\dfrac{/\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^S/}{/\mathfrak{X}_{0,1}{}^S/}$ bzw. $\dfrac{\mathfrak{X}_{0,T_v}{}^M}{/\mathfrak{X}_{0,1}{}^M/}$ wird also erreicht, daß der Maßstabsfaktor der nun entstandenen Vektoren $\mathfrak{X}_{0,T}{}^S$ und $\mathfrak{X}_{0,T}{}^M$ gleich μ_1 wird. Damit ist praktisch der Forderung, daß μ_3 gliech μ_1 werden soll, mit großer Genauigkeit erfüllt. Kleine Abweichungen erklären sich daraus, daß die Richtung von $\mathfrak{X}_{0,T}$ in beiden Systemen nicht genau mit der z-Richtung zusammenfällt.

4. Die räumliche Affintransformation mit „n“ Vollpaßpunkten

Aufbauend auf die vorhin gezeigte Lösung soll nun das Verfahren insoweit erweitert werden, als alle Angaben einer beliebigen Anzahl von Paßpunkten durch ein exaktes Ausgleichsverfahren berücksichtigt werden.

Wie in Abschnitt 3 wird von der Transformationsformel

$$\mathfrak{X}^S = \mathfrak{X}^S{}_S + \mu\mathfrak{A}(\mathfrak{X}^M - \mathfrak{X}_S{}^M) \qquad \ldots (1)$$

ausgegangen.

Auch hier ist wieder die Notwendigkeit gegeben, einen „theoretischen Punkt“ zu finden. Dieser Punkt muß so liegen, daß seine Verbindungsvektoren zu den einzelnen Paßpunkten sich untereinander in möglichst günstigen Winkeln schneiden. Die günstigste Lage ist in Abb. 3 bereits angedeutet. Von den vorhandenen Paßpunkten wird zunächst der Schwerpunkt gebildet. Dann werden die Verbindungsvektoren $\mathfrak{X}_{S,1}$ und $\mathfrak{X}_{S,2}$ durch $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_S$ bzw. $\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_S$ berechnet. Hier ist die in Abb. 3 angedeutete Lage vorausgesetzt; wichtig daran ist, daß $\mathfrak{X}_{S,1}$ und $\mathfrak{X}_{S,2}$ einen günstigen Winkel einschließen und daß $\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1$ möglichst in der y-Richtung liegt. Das „Äußere Produkt“ dieser Verbindungsvektoren $\mathfrak{X}_{S,1}$ und $\mathfrak{X}_{S,2}$ liefert den „vorläufigen theoretischen Punkt“ P_{T_v}. Die Entfernung dieses Punktes von dem Schwerpunkt S muß nun ganz entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 3 verjüngt werden. Die Dimension einer Fläche muß wieder durch eine Strecke dividiert werden, die möglichst in der y-Richtung liegen soll. Eine solche Strecke ist wieder $/\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1/$. Durch die Berechnung von $\dfrac{\mathfrak{X}_{T_v} - \mathfrak{X}_S}{/\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1/}$ wird die Entfernung $\overline{SP_{T_v}}$ zwar so verjüngt, daß die so erhaltenen Punkte homologe Punkte wären, allerdings wäre der Abstand zu S zu gering. Die Schnittwinkel der Verbindungsvektoren zu den einzelnen Paßpunkten wären nicht sehr günstig. Diese Strecke muß daher um einen bestimmten Faktor vergrößert werden. Grenzwertuntersuchungen ergaben, daß die Strecke $\overline{SP_T}$ ungefähr gleich der halben Strecke $/\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1/$ sein soll. Der Faktor um den nun die ursprüngliche Strecke vergrößert werden muß, ergibt sich demnach aus $\eta = \frac{/\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1/^2}{2/\mathfrak{X}_{S,T\nu}/}$. Der Wert η braucht natürlich nur genähert bestimmt zu werden; wichtig ist nur, daß in beiden Systemen der gleiche Wert verwendet wird.

Die Berechnung von P_ν geschieht folglich in beiden Systemen durch

$$\mathfrak{X}_T = \frac{\mathfrak{X}_{S,T\nu}}{/\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1/} \cdot \eta + \mathfrak{X}_S.$$

Nun können die Verbindungsvektoren von P_T zu den einzelnen Paßpunkten gebildet werden. Jeder Vektor bedeutet nun eine Gleichung mit drei Unbekannten und bei n Paßpunkten erhält man je 3 Gleichungssysteme von n Gleichungen mit drei Unbekannten. Führt man wie im vorigen Abschnitt zur Vereinfachung der Schreibweise die Beziehungen $x = X - X_T$, $y = Y - Y_T$, $z = Z - Z_T$ in beiden Systemen ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l}
x_1^M \overline{A_{11}} + y_1^M \overline{A_{12}} + z_1^M \overline{A_{13}} = x_1^S, \\
x_2^M \overline{A_{11}} + y_2^M \overline{A_{12}} + z_2^M \overline{A_{13}} = x_2^S, \\
- - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - \\
x_n^M \overline{A_{11}} + y_n^M \overline{A_{12}} + z_n^M \overline{A_{13}} = x_n^S, \\[1ex]
x_1^M \overline{A_{21}} + y_1^M \overline{A_{22}} + z_1^M \overline{A_{23}} = y_1^S, \\
x_2^M \overline{A_{21}} + y_2^M \overline{A_{22}} + z_2^M \overline{A_{23}} = y_2^S, \\
- - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - \\
x_n^M \overline{A_{21}} + y_n^M \overline{A_{22}} + z_n^M \overline{A_{23}} = y_n^S. \\[1ex]
x_1^M \overline{A_{31}} + y_1^M \overline{A_{23}} + z_1^M \overline{A_{33}} = z_1^S. \\
x_2^M \overline{A_{31}} + y_2^M \overline{A_{23}} + z_2^M \overline{A_{33}} = z_2^S, \\
- - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - \\
x_n^M \overline{A_{31}} + y_n^M \overline{A_{23}} + z_n^M \overline{A_{33}} = z_n^S.
\end{array} \qquad \ldots (7)$$

Jedem Paßpunkt entspricht in jedem der drei Gleichungsysteme eine Gleichung. Da mehr als drei Paßpunkte vorhanden sind, handelt es sich um eine Überbestimmung. Da nun die Koordinaten sowohl im Maschinensystem als auch im Sollsystem keine fehlerfreien Werte sind, werden Widersprüche auftreten bzw. Verbesserungen notwendig sein. Die Gleichungssysteme (7) können daher in der Form von Verbesserungsgleichungen angeschrieben werden:

$$\begin{array}{l}
v_{11} = x_1^M \overline{A_{11}} + y_1^M \overline{A_{12}} + z_1^M \overline{A_{13}} - x_1^S \\
- - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - -
\end{array}$$

u. s. f.

Aus der Forderung, daß die Quadratsumme der Verbesserungen ein Minimum werden soll, ergeben sich die 3 Systeme von Normalgleichungen:

$$
\begin{array}{rrrcl}
\underline{[x^M x^M]}\overline{A}_{11} & + [x^M y^M]\overline{A}_{12} & + [x^M z^M]\overline{A}_{13} & = & [x^M x^S] \\
 & \underline{[y^M y^M]\overline{A}_{12}} & + [y^M z^M]\overline{A}_{13} & = & [y^M x^S] \\
 & & \underline{[z^M z^M]\overline{A}_{13}} & = & [z^M x^S] \\
 & & & & \\
\underline{[x^M x^M]}\overline{A}_{21} & + [x^M y^M]\overline{A}_{22} & + [x^M z^M]\overline{A}_{23} & = & [x^M y^S] \\
 & \underline{[y^M y^M]\overline{A}_{22}} & + [y^M z^M]\overline{A}_{23} & = & [y^M y^S] \\
 & & \underline{[z^M z^M]\overline{A}_{23}} & = & [z^M y^S] \\
 & & & & \\
\underline{[x^M x^M]}\overline{A}_{31} & + [x^M y^M]\overline{A}_{32} & + [x^M z^M]\overline{A}_{33} & = & [x^M z^S] \\
 & \underline{[y^M y^M]\overline{A}_{32}} & + [y^M z^M]\overline{A}_{33} & = & [y^M z^S] \\
 & & \underline{[z^M z^M]\overline{A}_{33}} & = & [z^M z^S]
\end{array}
\qquad \ldots (8)
$$

Diese einfache Form der Normalgleichungen ergibt sich bei Transformationsaufgaben i. a. nur dann, wenn die Koordinaten auf den Schwerpunkt reduziert worden sind. In diesem Falle sind aber die Paßpunkte nicht auf den Schwerpunkt sondern auf P_T bezogen (Abb. 3). Trotzdem aber gilt diese einfache Form der Normalgleichungen, wie folgende Überlegung zeigt: Der Punkt P_T liegt in einer Entfernung von S, die man weitgehend selbst wählen kann. Man wählt die Entfernung ungefähr gleich der halben Strecke $/\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1/$ um günstige Schnittwinkel der Vektoren zu erhalten. Nimmt man eine größere Entfernung — die ursprüngliche Entfernung multipliziert mit dem Faktor $n + 1$ (n = Anzahl der Paßpunkte) — so hätte man ein System von $n + 1$ homologen Punkten. Bildet man nun in diesem System neuerlich den Schwerpunkt, so fällt dieser genau mit dem ursprünglichen Punkt P_T zusammen. P_T kann also für die Rechnung als Schwerpunkt angesehen werden.

Aus dem System von Normalgleichungen errechnet man die bereits ausgeglichenen $\overline{A}_{ik}$—Werte. Alles weitere geschieht dann wie in Abschnitt 3 bereits gezeigt wurde.

5. Berechnung der Einstellwerte am Auswertegerät

Zunächst einmal braucht man dazu die Koeffizienten der Drehmatrix, die A_{ik}—Werte. Diese rechnen sich aus

$$A_{ik} = \frac{\overline{A}_{ik}}{\mu_i} \, .$$

Die A_{ik}—Werte bilden eine orthogonale Matrix. Die Rotationen, bezogen auf fixe Achsen, erhält man durch folgende Beziehungen:

$$\sin \Phi = -A_{31}, \; \sin \Omega = \frac{A_{32}}{\cos \Phi}, \; \sin \mathrm{K} = \frac{A_{21}}{\cos \Phi} \, . \qquad \ldots (9)$$

Es muß allerdings darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Drehungen in der Reihenfolge Ω, Φ, K angebracht werden; Ω ist also Primär — Φ die Sekundär —, K die Tertiärdrehung. Bei anderer Reihenfolge der Drehungen ergeben sich die Formeln durch einfache Umformungen (siehe [4]).

Die so erhaltenen Werte müssen dann wegen der Achsstellungen der Auswertekammern nach den in [1] bzw. [2] hergeleiteten Formeln korrigiert werden, um die Einstellwerte am Auswertegerät für die endgültige Lage des Modelles zu erhalten.

Zusammenfassung

Mit dem gegenständlichen Verfahren ist versucht worden, den bei räumlichen Transformationen anfallenden, nicht unerheblichen Rechenaufwand zu reduzieren und die in Rede stehende Aufgabe auf diese Weise für elektronische Kleinrechenanlagen brauchbar zu machen. Das Verfahren wurde an Hand einiger Beispiele erprobt und hat sich dabei sehr bewährt. Es hat auch gegenüber den dem Verfasser bekannten Lösungen beträchtliche Zeitersparnisse gebracht.

Für die Analogphotogrammetrie ergeben sich daraus sowohl für die numerische, als auch für die graphische Auswertung erfolgversprechende Aspekte. Bei numerischen Arbeiten, wo nur einzelne Punkte des Modelles ausgewertet werden, besteht die Möglichkeit, diese Punkte bereits im nur gegenseitig orientierten Modell abzulesen und die dabei erhaltenen Maschinenkoordinaten räumlich auf die beschriebene Weise zu transformieren. Diese Art der Auswertung wird in den neueren Veröffentlichungen vielfach als „semianalytisch" bezeichnet. Der völlige Wegfall der absoluten Orientierung bringt dabei bedeutende Zeitgewinne. Die Genauigkeit betreffend können nur Vorteile, keineswegs aber Nachteile erwartet werden.

Für graphische Arbeiten wird die absolute Orientierung am Gerät natürlich benötigt. Für solche Arbeiten ist daher der beschriebene Rechengang weiterzuführen bis zu den für die Modelldrehungen notwendigen Rotationen und Basisreduktionen, wie dies in Abschnitt 5 gezeigt worden ist. Auf diese Weise werden die Einstellwerte für die Orientierung in einem einzigen Arbeitsschritt erhalten.

Über diese Aspekte, die derzeit Gegenstand weiterer Untersuchungen sind, wird in nächster Zeit berichtet werden.

Literatur

[1] *Bernhard, J.:* Über den Einfluß der Achsstellungen des Auswertegerätes auf die gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen. Photogrammetria Nr. 2, 1953/54.

[2] *Bernhard, J.:* Über Bündel- und Modelldrehungen an Analoggeräten mit zwei Aufpunkten. ÖZfV Nr. 6/1967, S. 157—166.

[3] *van den Hout:* CMA: Boll. di Geod. 20, 1961, S. 418—427.

[4] *Rinner, K.:* Einführung in die analytische Photogrammetrie. (Hochschulskriptum) S. 59—67 und S. 4—12.

Über die Genauigkeit der Paßpunktmessung für die graphische photogrammetrische Auswertung von Karten und Plänen

Von *Hans Schmid* und *Alois Stickler*, Wien

Bei der Kostenaufstellung für photogrammetrische Auswertungen sind die Kosten der Paßpunktmessung ein bedeutender Posten. Zwei Faktoren, die die Kosten der Paßpunktmessung wesentlich beeinflussen, sind die verlangte Genauigkeit und die Notwendigkeit, die Paßpunkte für die Aufnahme aus der Luft zu signalisieren. Zur Klärung dieser beiden Fragen soll in der vorliegenden Arbeit ein Beitrag geleistet werden.

In der Tabelle 1 sind die Daten aus verschiedenen Veröffentlichungen zur Frage der photogrammetrischen Meßgenauigkeit zusammengestellt. Diese Zusammenstellung erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit, noch ist jeweils untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Werte erhalten wurden.