Paper-ID: VGI_196716

Zur Fehlertheorie der Höhenstandlinie

Gerhard Brandstätter [1]

[1] *8010 Graz, Klosterwiesgasse 19*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **55** (5), S. 128–133

1967

BibTEX:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_196716,
Title = {Zur Fehlertheorie der H{\"o}henstandlinie},
Author = {Brandst{\"a}tter, Gerhard},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {128--133},
Number = {5},
Year = {1967},
Volume = {55}
}
```

keit bloß durch die Massenstörungen in der Erdkruste bedingt sein müßte. Ferner kann, ausgehend vom Normalsphäroid, diese starke Abnahme des Absolutbetrages von J_4 nur durch eine kräftige Massenkonzentration nach innen bewirkt werden, was mit einem starken Absinken des Trägheitsmomentes C verbunden sein muß. Zur Wiederherstellung des wahren Wertes von C wären für die im obigen Sinne definierte wesentliche Massenanordnung beträchtliche Massenverschiebungen in konfokalen, homogenen Ellipsoidschalen nach oben erforderlich, die auf eine sicherlich physikalisch unmögliche Massenverteilung führen.

Dasselbe zeigen auch die obigen Figurenreihen (k^2E, ω, a, J_2). Die Abnahme von $|J_4|$ ist mit einer Schwereabnahme verbunden, die auf eine Massenkonzentration und eine Abnahme von C hinweist. Läßt man diese gelten, dann ist das im Helmertschen Sinne einfach durch $f_4 = 0$ definierte *genäherte* Niveauellipsoid physikalisch möglich und kann sogar als Bezugskörper dienen, falls man auf den physikalischen Zusammenhang zwischen den Massenstörungen einerseits und den Schwerestörungen, Lotabweichungen und Undulationen andererseits verzichtet.

Die Massefunktion $J_4{}^*$ des Normalsphäroides kann daher nur geringfügig von der Massefunktion J_4 des wirklichen Erdkörpers abweichen. Dies ist auch für die weitgehend isostatisch kompensierte Topographie gar nicht anders zu erwarten, ja umgekehrt direkt ein Hinweis auf die isostatische Kompensation der topographischen Massen.

Literatur

[1] *Ledersteger, K.:* „Multi-parametric theory of spheroidal equilibrium figures and the normalspheroids of earth and moon", Report, June 1966.

[2] *Kaula, W. M.:* „Determination of the earth's gravitational field", Reviews of Geophysics, Vol. I, Richmond, Virg. 1963.

[3] *Heiskanen, W. A.:* „Potentialities of Satellite Geodesy", Amsterdam 1963 (in Use of Artificial Satellites for Geodesy, ed. by G. Veis).

Zur Fehlertheorie der Höhenstandlinie

Von *Gerhard Brandstätter*, Graz

1. Allgemeine Formulierung der simultanen Ortsbestimmung

Die herkömmlichen simultanen Methoden der astronomischen Ortsbestimmung verbinden stets *einen* der beiden direkt oder indirekt meßbaren Parameter Azimuth a oder Zenitdistanz z des Horizontsystems mit der Bestimmung der Durchgangszeit θ durch den entsprechenden Vertikal oder Almukantarat. Dies gilt auch für die Spezialmethoden, bei denen eine Zeitmessung nötig ist (Zeitbestimmung im Meridian und ersten Vertikal mit den Parametern a, θ bzw. z, θ, Breitenbestimmung im ersten Vertikal mit a, θ). Als direkte Messung sei die Ablesung an Kreisen bezeichnet, als indirekte die Verwendung von Libellen, Quecksilberhorizonten und Kompensatoren.

Wird ein hier allgemein mit q bezeichneter Paramter des Horizontsystems gemessen, dann ist dieser mittels transzendenter Funktionen (Sätze der sphärischen Trigonometrie im nautischen Dreieck) mit den Parametern der beiden Äquatorsysteme Breite φ, Länge λ, Deklination δ, Rektaszension α und Zeit θ verknüpft. q ist meistens mit einer Orientierungsunbekannten dq behaftet, worunter bei direkten Messungen im azimutalen Sinn die Orientierungsunbekannte o des Horizontkreises, bei direkten Messungen im vertikalen Sinn der Zenitfehler dz des Vertikalkreises zu verstehen ist. Ebenso treten bei den indirekten Messungen Schliffwinkelfehler und dgl. auf.

In allgemeiner Form lautet die Beobachtungsgleichung für eine Messung im Horizontsystem, wenn für den unbekannten Standpunkt Näherungskoordinaten φ_0 und λ_0 eingeführt werden,

$$q + v_q + dq = f(\varphi_0 + d\varphi, \lambda_0 + d\lambda, \theta + v_\theta) \qquad \dots (1.1)$$

und nach Linearisierung

$$v_q + f_\theta v_\theta - f_\varphi d\varphi - f_\lambda d\lambda + dq + q - q_0 = 0 \qquad \dots (1.2)$$

mit $\quad f_\theta = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}, \quad f_\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad f_\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \quad$ und $\quad q_0 = f(\varphi_0, \lambda_0, \theta)$.

Rektaszension und Deklination sind bekannte Konstante und sollen nicht verbessert werden.

Von Gleichung (1.2) lassen sich alle anderen Formen ableiten: wenn z. B. die Orientierung genau bekannt ist ($dq = 0$) oder wenn zum Zwecke ihrer Elimination zwei Sterndurchgänge zusammengefaßt werden und dq durch Differenzbildung zweier Gleichungen (1.2) herausfällt (z. B. [5]). Im zweiten Fall treten dann allerdings zwei Zeitverbesserungen in einer Gleichung auf.

Für $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ beobachtete Sterndurchgänge werden n Bedingungsgleichungen (1.2) mit drei Unbekannten erhalten, wobei jedoch die beiden Verbesserungen einer Bedingungsgleichung in keiner der anderen ***n-1*** Gleichungen vorkommen. Ein solches System kann nach [1] Seite 105ff. wie ein System gewöhnlicher Verbesserungsgleichungen behandelt werden, wenn die Verbesserungen v_q und v_θ gemäß

$$\lambda_i = v_{qi} + f_{\theta i} v_{\theta i} \qquad \dots (1.3)$$

zu fingierten Verbesserungen λ_i zusammengefaßt und die entsprechenden Gleichungen mit den aus

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{p_{\theta i}} f_{\theta i}{}^2 + \frac{1}{p_{qi}}$$

folgenden fingierten Gewichten g_i versehen werden. p_θ und p_q sind die den einzelnen Messungen zugeordneten Gewichte. Nach Berechnung der Unbekannten $d\varphi$, $d\lambda$, dq nach den Vorschriften für vermittelnde Beobachtungen können die Korrelaten k_i der n Bedingungen aus

$$k_i = g_i \{f_{\varphi i} d\varphi + f_{\lambda i} d\lambda - dq - (q - q_0)_i\},$$

und die Verbesserungen zufolge

$$v_{qi} = k_i \frac{1}{p_{qi}} \quad \text{und} \quad v_{\theta i} = k_i \frac{f_{\theta i}}{p_{\theta i}}$$

berechnet werden.

Aus der Ausgleichung folgt der Gewichtseinheitsfehler $m_0 = \pm \sqrt{\dfrac{[g\lambda\lambda]}{\mathrm{n-u}}}$, daraus der mittlere Fehler einer fingierten Beobachtung mit

$$m_i{}^2 = \frac{m_0{}^2}{g_i} = m_0{}^2 \left\{\frac{f_\theta{}^2{}_i}{p_{\theta i}} + \frac{1}{p_q}\right\}$$

und somit $m_i{}^2 = m^2{}_{\theta i} + m^2{}_{qi}$. Hierin ist m_{qi} meist als für alle Gleichungen konstant zu betrachten. $m_{\theta i}$ hat die Dimension des Parameters q, da ja die Widersprüche in dieser Dimension eingeführt wurden. Der tatsächliche mittlere Registrierfehler μ_θ wird daher wegen $\frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = f_\theta$ bzw. $\frac{dq}{f_\theta} = d\theta$ aus

$$\mu^2{}_\theta = \frac{m_\theta{}^2}{f_\theta{}^2} = \frac{m_0{}^2}{p_\theta}$$

erhalten und ist also nur dann für alle fingierten Fehlergleichungen konstant, wenn die Gewichte $p_{\theta i}$ gleich sind. Hierauf wird im folgenden noch eingegangen.

2. Die Höhenstandlinie

Gemessen wird hier die Zenitdistanz z. Ihre Beziehung mit dem Äquatorsystem folgt aus dem Seitencosinussatz

$$z + dz + v_z = \arccos \{\sin (\varphi_0 + d\varphi) \sin \delta + \\ + \cos (\varphi_0 + d\varphi) \cos \delta \cos (\theta_0 + v_\theta - \lambda_0 - d\lambda - \alpha)\}, \quad \ldots (2.1)$$

wenn die für die Zeitmessung verwendete Uhr Sternzeit Greenwich (θ_0) anzeigt und λ positiv über West gezählt wird, wodurch der örtliche Stundenwinkel t die im letzten Cosinus von (2.1) enthaltene Form annimmt. Wird das Azimut von Nord gezählt, dann gelten die Ableitungen

$$f_\theta = -f_\lambda = \frac{\partial z}{\partial t} = -\cos\varphi \sin a \quad \text{und} \quad f_\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\cos a,$$

womit die Linearform

$$v_z + \sin a \cos \varphi \; v_\theta + \cos a \, . \, d\varphi - \sin a \cos \varphi \; d\lambda + dz + (z - z_0) = 0 \quad \ldots (2.2)$$

erhalten wird. z_0 ist aus (2.1) unter Weglassung aller differentiellen Größen und Verbesserungen zu berechnen. Die aus (2.2) zu bildende fingierte Verbesserungsgleichung

$$\lambda_i = \cos a_i d\varphi \; \sin a_i \; \cos \varphi d\lambda - dz - (z_i - z_0) \quad \ldots (2.3)$$

ist die bekannte Standliniengleichung. Für die strenge Ausgleichung ist sie mit ihrem fingierten Gewicht g_i zu versehen. Die darin enthaltenen Gewichte p_z und p_θ sind die Reziproken der *a* priori geschätzten mittleren Fehlerquadrate $m_z{}^2$ und $m_\theta{}^2$.

3. Die mittleren Fehler und das fingierte Gewicht

Der mittlere Fehler der Zenitdistanz setzt sich nach (2) aus drei elementaren mittleren Fehlern zusammen, und zwar dem Beitrag des mittleren Lagefehlers des angezielten Sternes, dem mittleren Fehler zufolge Refraktionsanomalien und dem mittleren Fehler der Kreis- oder Niveau-Ablesung bzw. der Einschwinggenauigkeit des Kompensators. Bei Anwendung von Quecksilberhorizonten und Bestimmung von Koinzidenzmomenten fällt der dritte Elementarfehler weg. Insgesamt kann der mittlere Fehler und damit auch das Gewicht p_z der gemessenen Zenitdistanz als konstant angesehen werden.

Im Gegensatz dazu ist nach (2), Seite 157, der mittlere Fehler für eine Durchgangsregistrierung mit

$$\mu^2_{\theta i} = \frac{1}{2n} \left(a^2 + \frac{b^2}{V^2} \sec^2\varphi \operatorname{cosec}^2 a_i \right) \qquad \dots (3.1)$$

als Funktion des Azimutes darzustellen. Eine plausible Erklärung für diesen Ansatz wird in (3), Seite 99f., gegeben. $2n$ ist die Gesamtzahl der registrierten Einzelzeiten (davon jeweils n vor und nach dem Durchgang durch den horizontalen Mittelfaden registriert) und V die Vergrößerungszahl des Fernrohres. Die konstanten Elementarfehler a und b sind als Instrumentenkonstante anzusehen und müssen aus einer möglichst großen Anzahl von Durchgangsbeobachtungen bestimmt werden. Zu diesem Zwecke sind aus den registrierten Zeiten das Gesamtmittel und aus den an symmetrischen Fäden oder Kontakten registrierten Zeiten die Einzelmittel zu berechnen. Aus den Streuungen dieser gegenüber jenem folgt der mittlere Fehler μ_θ des Gesamtmittels.

Die Krümmung der scheinbaren Sternbahn im Gesichtsfeld hat zur Folge, daß die Einzelmittel nicht unmittelbar der Durchgangszeit am Hauptfaden entsprechen. Die daraus resultierende Krümmungskorrektur kann folgendermaßen leicht abgeleitet werden:

Die Abstände $+f$ und $-f$ zweier symmetrischer Fäden oder Kontakte vom horizontalen Mittelfaden können hinreichend genau aus den Reihenentwicklungen

$$+f = \frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta' - \theta) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}(\theta' - \theta)^2 + \dots.$$

und

$$-f = \frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta'' - \theta) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}(\theta'' - \theta)^2 + \dots$$

erhalten werden, wobei die Zeit θ' dem Abstand $+f$, die Zeit θ'' dem Abstand $-f$, die Zeit θ dem Durchgang am Mittelfaden entspricht. Die Differenz $\theta - \bar{\theta}$ ist dann der Betrag, um den das Mittel $\frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \bar{\theta}$ verbessert werden muß, um die gesuchte Zeit θ zu erhalten. Durch Mittelung der beiden Reihen folgt

$$O = \frac{\partial z}{\partial \theta}(\bar{\theta} - \theta) + \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\left\{(\theta' - \theta)^2 + (\theta'' - \theta)^2\right\}$$

und daraus wegen

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\cos\varphi \sin a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \cos\varphi \cos a\,(\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{ctg} z \cos a)$$

sowie $\theta' - \theta \doteq \theta'' - \theta \doteq \frac{1}{2}(\theta'' - \theta')$ die Korrektur

$$(\theta - \bar{\theta})_{\text{sec}} = \operatorname{ctg} a\,(\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{ctg} z \cos a)\,\frac{(\theta'' - \theta')^2}{2}\,\frac{15}{4\,\rho''} \qquad (3.2)$$

in Funktion des Zeitunterschiedes, der in Zeitsekunden einzuführen ist. Wird $\frac{1}{2}(\theta'' - \theta')^2$ durch $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i'' - \theta_i')^2$ ersetzt, dann gibt (3.2) die Reduktion des Gesamtmittels auf die Zenitdistanz. Mit $n = 2$ findet sich diese in (4), da dort zwei mal zwei symmetrische Einzelzeiten registriert werden. Der Einfluß der Krümmung ist beträchtlich: z. B. folgt für einen Fadenabstand $f = \pm\ 10'50''$ im Nordazimut $a = 150^0$ ($z = 30^0$, $\varphi = 47^0$) eine Korrektur $\theta - \overline{\theta} = -\ 0{,}91$ Sekunden.

Die mittleren Fehler einer großen Anzahl gleichmäßig über den Horizont verteilter Registrierungen bilden nun in Funktion des Azimutes einen Punkthaufen, in den die Funktion (3.1) mit den Unbekannten a und b zu interpolieren ist. Mit diesen Werten erhält das fingierte Gewicht schließlich wegen (1.3), also

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{p_{\theta i}} \cos^2\varphi \sin^2 a_i + \frac{1}{p_z}$$

die Form

$$g_i = \frac{1}{1/2n \,.\, (a^2 \cos^2\varphi \sin^2 a_i + b^2 / V^2) + m^2_z} \qquad \ldots (3.3)$$

zu der Niethammer in [2] mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes gelangt. Konstanz von (3.3) kann durch entsprechende Variation von n erreicht werden — dies wird in der Praxis kaum vorkommen — oder durch Vernachlässigung des variablen Teils im Nenner sobald m_z gegenüber dem mittleren Fehler der Registrierung überwiegt. Meist bewegen sich beide Fehler in derselben Größenordnung (Zeiß Ni2 mit Astrolabvorsatz), bei Geräten hoher und höchster Präzision (Zirkumzenital von Nušl und Frič, Astrolab von Danjon) wird sogar der Zeitfehler überwiegen, so daß gerade bei den genauesten Methoden ungleichgewichtige Standliniengleichungen vorliegen.

Die Bestimmung des mittleren Zeitfehlers ist völlig unabhängig von der Zenitdistanz. Die Schätzungen a priori dürfen daher getrennt voneinander vorgenommen werden. Falls die Schätzung von m_z nur beiläufig erfolgt, ist im Zuge der Ausgleichung eine Gewichtsiteration durchzuführen, aus der, wenn die Werte der Funktion (3.1) von vornherein bekannt sind, der mittlere Fehler der Zenitdistanz folgt.

4. Anwendung

Die vorstehenden Erläuterungen geben die theoretisch strenge Behandlung einer simultanen Ortsbestimmung im allgemeinen und der Höhenstandlinienmethode im besonderen. Inwiefern praktische Beobachtungen in dieser Weise ausgewertet werden, ist eine Frage der Zeit und der verfügbaren Rechenkapazität. Für den Beobachter ist es aber sicher von Interesse, die elementaren Fehler seines Instrumentes zu kennen, um zu wissen, wo durch erhöhte Sorgfalt oder mit Hilfe zusätzlicher Meßmittel eine Genauigkeitssteigerung erreicht werden könnte. Es sollte daher bei der Erprobung eines neuen Instrumentes (oder auch einer neuen Methode) zuerst durch eine möglichst große Anzahl von Messungen der mittlere Zeitfehler und getrennt davon der mittlere Fehler der Zenitdistanz (oder allgemein des dazugehörigen Horizontparameters) in der eben beschriebenen Art bestimmt werden. Hierauf kann dann in einem bereits bekannten Punkt zur Feststellung der äußeren Genauigkeit eine volle Positionsmessung durchgeführt werden, die gewichtet auszugleichen ist und wobei nötigenfalls m_z iteriert wird. Sind die mittleren Fehler m_z, m_θ und m_0 sicher genug bekannt, kann schließlich die zur Erreichung eines vorgegebenen minimalen Punktlagefehlers unbedingt notwendige Anzahl von Standlinien festgesetzt werden.

Literatur

[1] *Wolf, H.:* Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hanseat. Verlagsbuchhandlung Hamburg.

[2] *Niethammer, Th.:* Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Verlag Birkhäuser Basel.

[3] *Mühlig, F.:* Astronomisch-geodätische Ortsbestimmung. Herbert-Wichmann-Verlag Berlin.

[4] *Buchar, E., Ledersteger, K.:* Das Zirkumzenital und die astronomische Ortsbestimmung aus gleichen Sternhöhen. Sonderheft 24/25 des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin.

[5] *Brandstätter, G.:* Der sphärische Rückwärtsschnitt und seine Anwendung in der geodätischen Astronomie. Diss. T. H. Graz.

Geodimetertest auf der Praterbasis

von *Kornelius Peters* und *Erich Korschineck*, Wien

Zusammenfassung

Für das NASM 4-B Geodimeter (mit Hg-Lampe) des Institutes für Landes- und Katastervermessung werden auf Grund von Beobachtungen auf der Testbasis des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen im Wiener Prater die Eichgrößen sowie Korrelationen zwischen Messungsbedingungen und innerer und äußerer Genauigkeit abgeleitet. Es wird nachgewiesen, daß die Genauigkeit eines Geodimeters bei guten athmosphärischen Bedingungen knapp besser ist, als die vom Werk angegebenen Daten. Die mit *einem* Gerät gemessenen Seiten sind als unkorrelierte Beobachtungen aufzufassen, wenn die Eichkurve des Phasenschiebers jährlich überprüft wird.

1) Durchführung der Messungen

Das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen hat im Wiener Prater eine Testbasis mit Invarbändern bestimmt, welche durch 4 Fixpunkte in 6 mögliche Teilstrecken gegliedert ist [1]. Sie verläuft unter dem Laubdach des nördlich der Fahrbahn der Praterhauptallee gelegenen Reitweges und bietet dadurch laborähnliche Meßbedingungen mit homogener athmosphärischer Schichtung. Die Anlage der Teilstrecken ermöglicht Komparationsmessungen im unteren und mittleren Entfernungsbereich, wie er bei den Hauptverwendungszwecken des Geodimeters anfällt, also etwa Paßpunktmessungen, EP-Schaffung, Netzverdichtungen der unteren Ordnungen. Der Einfluß der Unsicherheit meteorolischer Meßgrößen verschwindet bei dieser Beobachtungsanordnung. Die Messungen wurden teilweise im Rahmen der lehrplanmäßigen „Meßübungen aus Technik des Katasterwesens" durchgeführt. Ein Einfluß mangelnder Beobachtungspraxis auf innere oder äußere Genauigkeit der Messungen konnte nicht festgestellt werden. Die Zentrierung des Gerätes und des Reflektors wurde mit einem senkrecht zur Seite aufgestellten Theodoliten überprüft. Um auch ungünstige Meßbedingungen zu simulieren, d. h. relativ geringen Lichtrückfall oder relativ großen Anteil des Streulichtes am in der Empfangsoptik einfallenden Strahl, wurden neben den vorgeschriebenen Reflektor- und Keil-Austeilungen ([2] [3]) auch andere verwendet. Auch wurde bei der kürzesten Seite einmal statt des Reflektors ein eigens angefertiger Planspiegel (aufgedampfter Oberflächenspiegel) verwendet, um den Einfluß der Reflektorkonstanten zu eliminieren. Dieser Planspiegel war auf die Einstellvorrichtung eines Helio-