

Paper-ID: VGI\_196704



## Gewichts-Diagramm für das Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Mittelbildung

Walter Smetana <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 1010 Wien, Salzgries 3/19

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **55** (2), S. 44–49

1967

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_196704,  
Title = {Gewichts-Diagramm f{"u}r das Einschneiden nach der Methode der  
kleinsten Quadrate durch Mittelbildung},  
Author = {Smetana, Walter},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {44--49},  
Number = {2},  
Year = {1967},  
Volume = {55}  
}
```



Hausruckenberg .	220,440	+0,07946	220,440	+0,13000	Bezugspunkt
Haidenberg . . . . .	237,476	+0,09457	237,442	+0,13000	
Bachfeld . . . . .	155,656	-0,08706	155,694	+0,13000	
Lange Lehen . . . . .	149,964	-0,13638	149,969	+0,13000	
Hendlberg . . . . .	157,208	+0,23198	157,106	+0,13000	
Langjoche . . . . .	174,904	-0,03420	174,955	+0,13000	
Wirtshausleiten . .	159,701	-0,11076	159,783	+0,13000	
G. Bachfeld . . . . .	154,263	+0,05994	154,259	+0,13000	
Rusterfeld . . . . .	163,881	+0,00984	163,900	+0,13000	
† Ollendorf . . . . .	197,639	—	197,590	—	
† Prottes . . . . .	187,947	—	187,933	—	
† Mannersdorf . .	192,706	—	192,587	—	
† Weikersdorf . .	179,672	—	179,656	—	
† Stripfing . . . . .	175,300	—	175,240	—	

#### Nivellitische Meereshöhen

Kapellen . . . . .	198,252	
† Zwerndorf . . . . .	165,880	
Hausruckenberg . . . . .	220,440	... Bezugspunkt
Bachfeld . . . . .	155,667	
Lange Leben . . . . .	149,980	
Langjoche . . . . .	174,860	
Rusterfeld . . . . .	163,885	
† Prottes . . . . .	187,910	

wahre Fehler = nivellitische Höhe — trigonometrische Höhe

Kapellen	+0,009	+0,092
† Zwerndorf	+0,007	+0,083
Bachfeld	+0,011	-0,027
Lange Lehen	+0,016	+0,011
Langjoche	-0,044	-0,095
Rusterfeld	+0,004	-0,015
† Prottes	-0,037	-0,023

## Gewichts-Diagramm für das Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Mittelbildung

Von *Walter Smetana*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

### Zusammenfassung

Im Falle des Einschneidens nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Mittelbildung von Hand aus, will die vorliegende Arbeit eine für den Praktiker, durch den Entwurf eines neuen, sowohl für das Vorwärts- als auch Rückwärtseinschneiden gleich anwendbaren, einfachen Diagrammes zur Bestimmung der Schnittpunktgewichte, nützliche Ergänzung der bestehenden einschlägigen Literatur darstellen.

Die Methode der Mittelbildung von Schnittpunktkoordinaten nach Gewichten von Hand aus, wird überall dort unter Zuhilfenahme des neuen Gewichtsdiagrammes rationell anwendbar sein, wo es sich um nicht zusammenhängende Einzelpunkteinschaltungen handelt, zu deren Bestimmung der Einsatz von programmgesteuerten Rechen-Automaten unwirtschaftlich wäre.

Die Anwendung des Prinzips des allgemeinen arithmetischen Mittels auf das Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate ermöglicht dabei eine rasche, anschauliche, den Genauigkeitsanforderungen der Praxis gerecht werdende Bestimmung von EP.

### 1. Einleitung

In der geodätischen Praxis zeigt es sich immer wieder, daß auch im Zeitalter zunehmender Automation auf allen Gebieten des Vermessungswesens, unter anderem die Tischrechenmaschine, sowie zweckentsprechende Diagramme bzw. Nomogramme für spezielle Rechenarbeiten, vornehmlich bei örtlichen Einmessungen der trigonometrischen Punktbestimmung, aber auch bei terrestrischen Einzelpunkteinschaltungen geringen Umfanges, unentbehrlich bleiben.

Da bekanntlich sämtliche Ausgleichsaufgaben nach der Methode der kleinsten Quadrate auf das Prinzip des allgemeinen arithmetischen Mittels zurückgeführt werden können [1], bedeutet dies, angewandt auf trigonometrische Einzelpunkteinschaltungen geringen Umfanges, zu deren Bestimmung der Einsatz von programmgesteuerten Rechenautomaten unwirtschaftlich wäre, eine nicht unerhebliche Arbeitersparnis gegenüber den üblichen, rechnerischen oder auch graphischen, klassischen Methoden des Punktausgleiches [2], [3]; kann eine Arbeitsmethode doch erst dann als wirtschaftlich bezeichnet werden, wenn bei geringstem Aufwand an Personal und Material ein Optimum an Arbeitsleistung und Genauigkeit erreicht wird.

Die aus  $\binom{h}{2}$  bzw.  $\binom{h}{3}$  möglichen Schnittkombinationen errechneten Koordinatenwerte eines nach der Methode des mehrfachen Vorwärts- bzw. Rückwärtseinschneidens zu bestimmenden Einschaltpunktes, erhalten hiebei zur Mittelbildung ganz bestimmte, der Theorie entsprechende Gewichte.

Die wahrscheinlichste Punktlage ergibt sich somit ganz streng, im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate, als Schwerpunkt eines aus sämtlichen Schnittkombinationen errechneten Schnittpunktsystems. Die Gewichtsbestimmung kann entweder durch direkte Berechnung [2], auf graphisch-mechanischem Wege [4], oder aber mit Hilfe eines Nomogrammes, etwa von Würtz, das Mitter in seiner Abhandlung [3] zitiert, ermittelt werden.

Verzichtet man auf vollkommene Strenge, so genügt die analytische Berechnung der drei besten Schnittkombinationen und Mittelbildung [5]. Die wahrscheinlichste Punktlage wird dabei durch eine sogenannte optimale Punktlage ersetzt, die den Genauigkeitsanforderungen der Praxis völlig entspricht.

Im Hinblick auf die bereits bestehende einschlägige Literatur bietet die folgende Arbeit in theoretischer Hinsicht nichts Neues, sie will jedoch eine für den Praktiker, durch den Entwurf eines neuen, sowohl für den Vorwärts- als auch Rückwärtseinschnitt gleich anwendbaren, einfachen Diagrammes zur Bestimmung der Schnittpunktgewichte, nützliche Ergänzung darstellen.

### 2. Theoretische Grundlagen

Die strenge Bestimmung der wahrscheinlichsten Punktlage durch Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels nach

$$X = \frac{[p x]}{[p]} \quad Y = \frac{[p y]}{[p]} \quad \dots (1)$$

aus allen möglichen  $(\frac{1}{2})$  Vorwärtseinschnitten bzw.  $(\frac{1}{3})$  Rückwärtseinschnitten ( $n \dots$  Anzahl der äußeren bzw. inneren Richtungen), wird durch die Verwendung der Schnittpunktgewichte

$$p_{12} = \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{s_1 s_2} \right)^2 \dots (2) \text{ für das mehrfache Vorwärtseinschneiden bzw.}$$

$$p_{123} = \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{s_1 s_2} + \frac{\sin \gamma_{23}}{s_2 s_3} + \frac{\sin \gamma_{13}}{s_1 s_3} \right)^2 \dots (3) \text{ für den mehrfachen Rückwärtseinschnitt nach den Darstellungen aus [1] und [2] erreicht.}$$

Für den Entwurf eines einfachen Diagrammes zur Gewichtsbestimmung ist es vorteilhaft, reziproke Entfernungen einzuführen.

Schreibt man Formel (2):  $p_{12} = \left( \sin \gamma_{12} \cdot \frac{1}{s_1} \cdot \frac{1}{s_2} \right)^2$  und bezeichnet  $\frac{1}{s_1}$  und  $\frac{1}{s_2}$

mit bzw.  $r_1$  und  $r_2$ , so nimmt Formel (2) folgende Form an:

$$p_{12} = (\sin \gamma_{12} \cdot r_1 \cdot r_2)^2 \dots (4)$$

Dies ist jedoch das Quadrat der doppelten Fläche eines Dreieckes mit der Spitze im Neupunkt, der Basis  $r_1$  bzw.  $r_2$  und der Höhe  $\sin \gamma_{12} \cdot r_1$  bzw.  $\sin \gamma_{12} \cdot r_2$ . Die Formel (4) bildet nun die Grundlage zur Konstruktion des Gewichts-Diagrammes. Da jedoch dasselbe Diagramm ebenso für den Rückwärtseinschnitt anwendbar sein soll, ist es vorerst notwendig, die Formel (3) entsprechend zu transformieren. Dies kann auf rein geometrisch anschaulichem Wege an Hand der Abbildung 1 erfolgen. Die einfache rechnerische Transformation, bei der der Rückwärtseinschnitt in

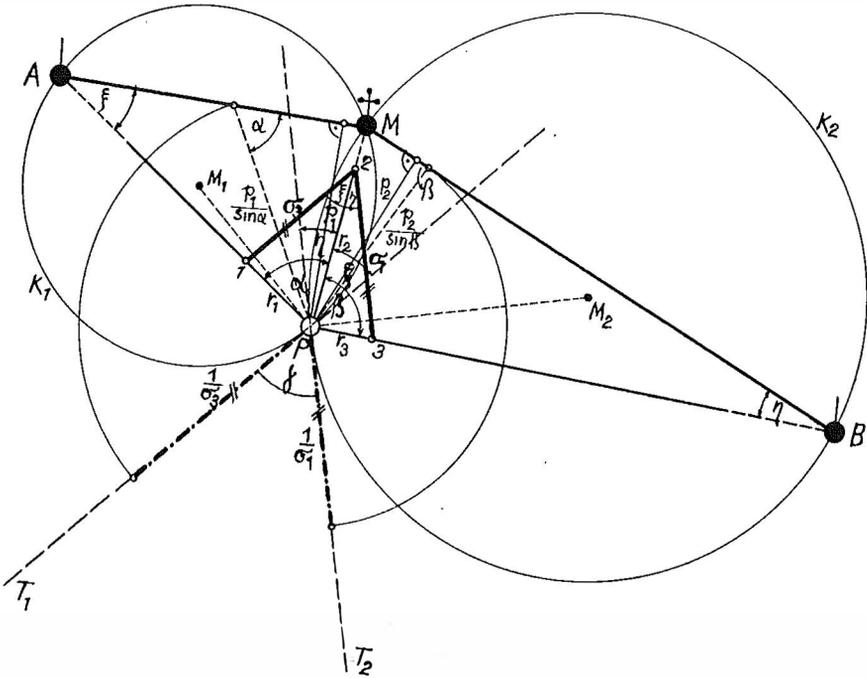


Abb. 1

einen Vorwärtseinschnitt mit den Seiten  $\frac{1}{\sigma_1}$  und  $\frac{1}{\sigma_3}$  sowie dem Schnittwinkel  $\gamma$  umgewandelt wird, möge daher übergangen werden.

Das Gewicht für einen Rückwärtseinschnitt erhält dadurch denselben Formelaufbau wie für den Vorwärtseinschnitt, nämlich  $p_{123} = (\sin \gamma \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3)^2 \dots (5)$ . In dieser Formel bedeuten  $\gamma$  den Schnittwinkel der in Abb. 1 als Ortslinien der Scheitel der gemessenen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  dargestellten beiden Kreise,  $\sigma_1$  u.  $\sigma_3$  sind die Seiten des Reziprokdreieckes, die den beiden gemessenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gegenüberliegen.

Somit kann sowohl für den Vorwärts- als auch für den Rückwärtseinschnitt dasselbe Diagramm verwendet werden, da die beiden Formeln (4) und (5) dieselbe Gestalt aufweisen. In Formel (4) bedeuten  $r_1$  und  $r_2$  die in einem beliebigen Maßverhältnis dargestellten Reziprokentfernungen. In Formel (5) bedeuten  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  die in einem beliebigen Maßverhältnis dargestellten Seiten des zu dem betreffenden Rückwärtseinschnitt gehörenden Reziprokdreieckes.

### 3. Aufbau des Diagrammes

Das sowohl für den Vorwärts- als auch Rückwärtseinschnitt gleich anwendbare Diagramm ist durch die Formeln (4) und (5) bereits gegeben und stellt demnach im Prinzip eine Multiplikationstafel mit gleichseitigen, verzerrten Hyperbeln dar. Die beiliegende Tafel enthält eine Schar gleichseitiger Hyperbeln gleicher doppelten Flächen, die jedoch nach den Quadraten dieser doppelten Flächen, nämlich den Gewichten, beziffert sind.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen wurden die Quadrate der in Quadrat-Zentimeter errechneten doppelten Flächen noch durch hundert dividiert. Demnach sind die Hyperbeln auf beiliegendem Diagramm mit den Gewichts-Zahlen 0,01 bis 50 bezeichnet.

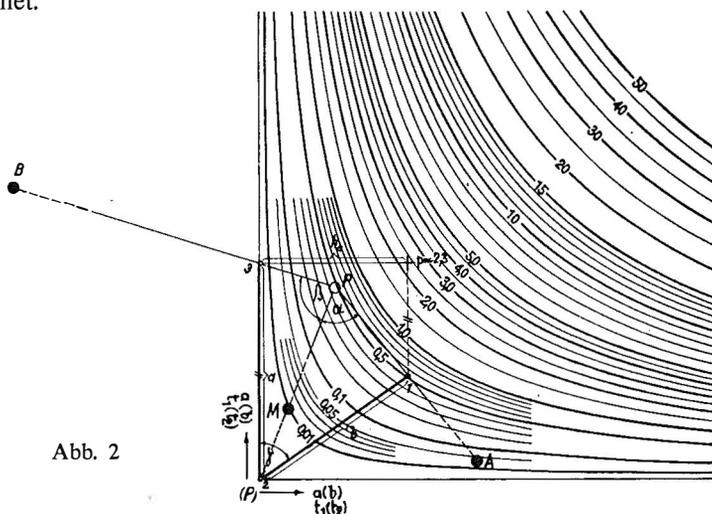


Abb. 2

Die beiden Achsen des Diagrammes sind dabei in Anlehnung an meine früheren Veröffentlichungen mit  $t_1$  ( $t_2$ ), bzw.  $a$  ( $b$ ) bezeichnet, wonach  $t = \frac{\rho^{cc}}{s_{cm}}$  und  $a$  bzw.  $b = \rho^{cc} \cdot \sigma_1$  bzw.  $\rho^{cc} \cdot \sigma_3$  bedeuten.

#### 4. Gebrauch des Diagrammes

Im Anschluß an meine Ausführungen über das Näherungs-Zentroid [5] ergänzt man beim mehrfachen Rückwärtseinschnitt das in Frage kommende Dreieck der drei besten Schnittkombinationen auf dem Pauspapier dadurch, daß man in dem Endpunkt der als Grundlinie aufgefaßten Seite  $a$  ( $b$ ) die Höhe errichtet, Abb. 2. Sodann bringt man der Reihe nach den Scheitel und die Grundlinie des ausgezeichneten Dreieckes zur Deckung mit bzw. dem Ursprung und einer der Achsen des Diagrammes. Der auf dem Pauspapier, etwa durch Ankreuzen gekennzeichnete Endpunkt der Höhe des Dreieckes fällt in die Hyperbelschar des Diagrammes und wird dort als Schnittpunktgewicht abgelesen bzw. geschätzt.

Liegen mehrfache Vorwärtseinschnitte vor, dann gibt es einen gemeinsamen Scheitelpunkt der Dreiecke, nämlich den zu bestimmenden Neupunkt selbst, der nun mit dem Ursprung des Diagrammes zur Deckung gebracht wird. Als Grundlinien gelten die entsprechenden, ebenfalls auf dem Pauspapier aufgetragenen Rezi-prokentrfernungen  $t$  zwischen dem Neupunkt und den einzelnen Festpunkten.

Die Gewichtsbestimmung erfolgt analog der Bestimmung beim mehrfachen Rückwärtseinschnitt, Abb. 3.

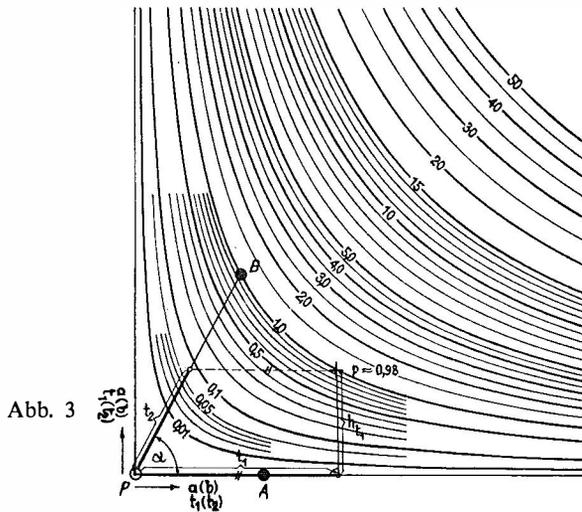


Abb. 3

#### 5. Beispiel zur rationellen Bestimmung der optimalen Punktlage mit Hilfe des Gewichts-Diagrammes

Auf beliebigem Transparent ist der Triangulierungspunkt Kremesberg durch fünf innere Richtungen gegeben. Demnach sind  $\binom{5}{3} = 10$  Schnittkombinationen möglich. Zur Bestimmung von guten vorläufigen Koordinaten genügt jedoch die analytische Berechnung der drei besten Schnittkombinationen und Mittelbildung der Koordinaten nach Gewichten.

Auf dem Transparent sind auch die drei Dreiecke der drei besten Schnittkombinationen ausgezeichnet, nämlich:

1. Schnitt, vollausgezogen ...  $Y = -16\ 552,543$   $X = 312\ 660,012$
2. Schnitt, strichpunktirt ...  $Y = -16\ 552,537$   $X = 312\ 660,028$
3. Schnitt, strichliert ...  $Y = -16\ 552,550$   $X = 312\ 659,992$

Die bezüglichen Gewichte werden auf dem Diagramm abgelesen bzw. geschätzt mit:  $p_1 = 16$ ,  $p_2 = 6,2$  und  $p_3 = 4,1$ .

Die Mittelbildung der Koordinaten nach Gewichten kann entweder mit einer Tischrechenmaschine oder aber unter Zuhilfenahme eines gewöhnlichen log. Rechenschiebers erfolgen. Man wird dabei am besten von Näherungswerten  $Y_0$  und  $X_0$  ausgehen:

$$Y_0 = -16\,552,550$$

$$X_0 = 312\,659,990$$

$$Y = Y_0 + \frac{[p\Delta y]}{[p]} = \frac{16 \cdot 7 + 6,2 \cdot 13 + 0}{26,3} = \frac{192,6}{26,3} \approx +7 \text{ mm}$$

$$X = X_0 + \frac{[p\Delta x]}{[p]} = \frac{16 \cdot 22 + 6,2 \cdot 38 + 4,1 \cdot 2}{26,3} = \frac{595,8}{26,3} \approx +23 \text{ mm.}$$

Daher:

$$Y = -16\,552,543 \text{ m}$$

$$X = 312\,660,013 \text{ m}$$

Die analytische Berechnung aller zehn möglichen Schnittkombinationen, deren Ergebnis einem strengen Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate völlig gleichkommt, ergibt:

$$Y = -16\,552,539 \text{ m}$$

$$X = 312\,660,010 \text{ m}$$

Die Koordinaten der optimalen Punktlage weichen demnach in  $Y$  um 4 mm und in  $X$  um 3 mm von der wahrscheinlichsten Punktlage ab. Diese Millimeter-Differenzen bleiben jedoch für die Praxis bedeutungslos.

Für nicht zusammenhängende terrestrisch zu bestimmende  $EP$  wird, wie bereits in meiner Abhandlung über das Näherungs-Zentroid dargelegt wurde, die analytische Berechnung der Koordinaten der drei besten Schnittkombinationen und Mittelbildung nach Gewichten mit Zentimeter-Genauigkeit die rationellste Bestimmung darstellen, die zugleich auch den Genauigkeits-Anforderungen der Praxis in allen Fällen entspricht.

#### Literatur

- [1] *Schmehl, H.*: Das arithmetische Mittel und die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, AVN 49 (1937), Nr. 25, S. 429–432; 50 (1938), Nr. 35, S. 583–587.
- [2] *Müller, E.*: Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Mittelbildung, AVN 53 (1941), Nr. 12, S. 193–201.
- [3] *Mitter, J.*: Zur graphischen Punktbestimmung, ÖZfV 47 (1959), Nr. 2, S. 49–59.
- [4] *Smetana, W.*: Das „Zentroid“ als wahrscheinlichste Punktlage in fehlerzeigenden Figuren der trigonometrischen Punktbestimmung, ÖZfV 42 (1954), Nr. 6, S. 167–171.
- [5] *Smetana, W.*: Näherungs-Zentroid als optimale Punktlage bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Vorwärts- und Rückwärtseinschnittes, ÖZfV 49 (1961), Nr. 2, S. 39–43.

## Beitrag zum graphischen Ausgleich

Von *Kornelius Peters*, Wien

### 1. Einleitung

Trotz der immer ausgedehnteren Verbreitung automatischer Berechnungsmethoden bei der Punkteinschaltung besitzt der graphische Ausgleich noch immer seine Existenzberechtigung. Tischcomputer mit fixen geodätischen Programmen