Paper-ID: VGI_196703

Eine Statistik der Dreieckswidersprüche im österreichischen Netz 1. Ordnung

Kurt Bretterbauer [1]

[1] *B. A. für Eich- u. Verm., 1080 Wien, Friedrich-Schmidtplatz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **55** (2), S. 29–34

1967

BibTeX:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_196703,
Title = {Eine Statistik der Dreieckswiderspr{\"u}che im {\"o}sterreichischen
   Netz 1. Ordnung},
Author = {Bretterbauer, Kurt},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {29--34},
Number = {2},
Year = {1967},
Volume = {55}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Nr. 2 | Baden bei Wien, Ende April 1967 | 55. Jg.

Eine Statistik der Dreieckswidersprüche im österreichischen Netz 1. Ordnung

Von *Kurt Bretterbauer*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Abstract: After some remarks concerning the theory of statistics an analysis of the 269 closing errors of the Austrian first-order triangulation net is given. By elimination of three values beyond the threefold standard deviation, the distribution becomes strictly normal. A slight asymmetry is interpreted as the effect of plumb-line deviations. The observational data of the Austrian first-order triangulation net thus prove to be of high accuracy and seemingly free of systematic influences.

Die bevorstehende Ausgleichung des österreichischen Triangulierungsnetzes 1. Ordnung gibt Anlaß, die Beobachtungsergebnisse einer kritischen Betrachtung zu unterziehen. Zur Beurteilung der Güte der Beobachtungen eignen sich am besten die Dreieckswidersprüche, also die Abweichungen der Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken vom Sollwert.

Das Netz 1. Ordnung umfaßt 269 Dreiecke, deren Widersprüche in der Tabelle zusammengestellt sind. Die Vorzeichen sind im Sinne Istwert — Sollwert zu verstehen. Diese 269 Werte sind voneinander unabhängig und repräsentieren ein Kollektiv, dessen Elemente einer Häufigkeitsverteilung nach Moivre-Laplace-Gauß, der sogenannten Normalverteilung, entsprechen sollten.

Für die folgenden Betrachtungen seien einige Grundtatsachen der Statistik kurz rekapituliert. Eine Zusammenfassung gleichartiger Gegenstände zum Zwecke einer statistischen Untersuchung heißt Kollektiv (engl. population). Eine Anschauliche Darstellung des Kollektivs gibt das Häufigkeitspolygon. Dabei werden die Elemente in Klassen geordnet und entsprechend der Häufigkeit ihres Auftretens

Tabelle

der 269 Widersprüche im österreichischen Dreiecksnetz 1. Ordnung

Die Zahlen vor den Widersprüchen beziehen sich auf die offiziellen Nummern in der Netzübersicht

Nr.	w	Nr.	w	Nr.	w	Nr.	w	Nr.	w	Nr.	w
147	−3″,568	145	−0″,866	234	−0″,335	231	−0″,024	138	+0″,385	126	+0″,880
124	3,079	181	0,862	4	0,325	201	0,021	77	0,387	148	0,898
48	2,704	158	0,861	189	0,309	157	0,014	39	0,403	81	0,900
33	2,114	85	0,818	6	0,297	97	0,014	42	0,412	211	0,907
140	1,961	206	0,795	63	0,277	73	−0,008	263	0,413	68	0,918
173	1,921	235	0,780	257	0,275	115	+0,028	144	0,417	255	0,926
268	1,909	150	0,768	12	0,275	278	0,033	199	0,421	83	0,945
51	1,827	47	0,741	187	0,268	9	0,037	217	0,424	75	0,966
65	1,816	37	0,715	69	0,267	262	0,038	46	0,425	267	0,978
146	1,805	151	0,701	177	0,255	20	0,058	87	0,428	103	0,979
49	1,797	36	0,696	266	0,250	171	0,061	163	0,454	239	1,007
98	1,723	59	0,682	200	0,248	30	0,069	121	0,463	3	1,034
110	1,649	17	0,661	15	0,239	38	0,072	265	0,471	283	1,110
118	1,550	92	0,635	223	0,236	264	0,073	66	0,523	185	1,121
76	1,543	220	0,622	281	0,223	156	0,079	218	0,528	8	1,139
253	1,481	137	0,609	127	0,223	155	0,094	241	0,529	153	1,147
232	1,472	246	0,594	74	0,221	112	0,095	247	0,532	197	1,150
71	1,435	93	0,590	64	0,218	165	0,099	23	0,540	5	1,150
102	1,414	207	0,584	106	0,213	280	0,127	14	0,547	84	1,191
88	1,353	251	0,579	196	0,213	279	0,131	149	0,548	19	1,213
58	1,321	35	0,571	227	0,207	131	0,146	209	0,551	78	1,248
143	1,292	29	0,564	60	0,200	159	0,149	132	0,556	54	1,267
194	1,234	249	0,551	70	0,192	184	0,166	22	0,563	52	1,300
125	1,222	208	0,549	89	0,177	105	0,173	113	0,574	233	1,309
61	1,203	141	0,541	21	0,177	258	0,174	240	0,582	56	1,330
53	1,186	192	0,541	99	0,170	154	0,178	180	0,591	108	1,407
210	1,172	28	0,524	224	0,153	225	0,180	195	0,595	254	1,412
1	1,154	188	0,522	175	0,153	104	0,184	237	0,604	186	1,438
272	1,147	179	0,500	202	0,152	219	0,193	13	0,636	119	1,491
182	1,145	135	0,480	204	0,149	250	0,206	43	0,648	111	1,492
95	1,100	152	0,470	245	0,146	67	0,213	79	0,691	40	1,498
277	1,096	72	0,464	222	0,143	91	0,213	142	0,698	172	1,527
16	1,094	170	0,454	80	0,104	94	0,224	221	0,719	174	1,565
116	1,064	212	0,433	7	0,097	271	0,244	117	0,726	176	1,594
169	1,050	256	0,429	24	0,096	160	0,245	168	0,736	86	1,632
57	1,021	244	0,427	27	0,096	120	0,247	167	0,749	122	1,754
259	1,010	136	0,419	10	0,092	205	0,270	34	0,763	96	1,757
161	1,000	164	0,402	216	0,078	228	0,278	230	0,792	62	1,996
198	0,994	90	0,392	226	0,075	101	0,283	45	0,799	100	2,040
133	0,987	229	0,362	55	0,073	166	0,294	203	0,820	114	2,069
238	0,981	248	0,357	139	0,060	50	0,298	11	0,844	123	2,176
31	0,932	107	0,353	273	0,037	162	0,333	252	0,844	32	2,240
2	0,898	82	0,352	41	0,035	178	0,346	193	0,845	183	2,394
44	0,895	243	0,351	134	0,033	260	0,371	274	0,849	109	+3,234
282	0,869	242	0,343	18	0,030	215	0,379	236	0,859		

in ein Graphikon eingetragen. Die Statistik kennt verschiedene Mittelwerte. Hier interessieren nur das arithmetische Mittel (engl. mean), der Zentralwert (engl. median) und der dichteste Wert (engl. mode). Der Zentralwert ist jener Wert, der das Kollektiv genau halbiert, so daß gleich viele Elemente rechts und links davon liegen. Der dichteste Wert ist jener, der am häufigsten vorkommt. Er liegt an der Stelle, die das Maximum in der Häufigkeitsverteilung kennzeichnet. Für seine Ermittlung gibt es kein exaktes Verfahren, doch reichen Näherungsmethoden aus. Median und Modus dienen vor allem der Feststellung einer Asymmetrie der Verteilung, denn in einer symmetrischen Verteilung fallen Mittel, Median und Modus zusammen. Das Pearson'sche Maß für Asymmetrie lautet daher auch:

$$\text{Asymmetrie} = \frac{\text{Mittel - Modus}}{\text{Standardabweichung}}\text{, oder} \qquad (1)$$

$$\text{Asymmetrie} = \frac{3\,(\text{Mittel - Median})}{\text{Standardabweichung}}\,. \qquad (2)$$

Die hier auftretende Standardabweichung, auch Streuung, Dispersion oder Varianz genannt, ist nichts anderes als der mittlere Fehler

$$s = \pm\sqrt{\frac{[xx]}{n-1}}\,; \qquad \ldots (3)$$

x = Abweichung vom arithmetischen Mittel. Die eckige Klammer ist als Summenzeichen zu verstehen.

n = Anzahl der Elemente.

Für linke (positive) Asymmetrie gilt immer:

Modus < Median < Mittel,

für rechte (negative) Asymmetrie:

Modus > Median > Mittel.

Zur Analyse der Verteilung benötigen wir noch den Begriff der „Momente". Die vier Momente in bezug auf das arithmetische Mittel sind:

$$\pi_1 = \frac{[x]}{n-1} = 0\,;$$

$\pi_2 = \dfrac{[x^2]}{n-1}$, dies ist das Quadrat der Varianz;

$\pi_3 = \dfrac{[x^3]}{n-1}$, dieses Moment muß in einer symmetrischen Verteilung Null sein;

$\pi_4 = \dfrac{[x^4]}{n-1}$, dieses Moment dient der Beurteilung des Exzesses der Verteilung (engl. kurtosis). Dieser Begriff gibt an, ob eine Verteilung gegenüber der Normalverteilung in der Spitze überhöht und im Mittelteil verengt, oder aber in der Spitze verflacht und im Mittelteil verbreitert ist. Im ersten Fall heißt die Verteilung leptokurtisch, im zweiten platykurtisch. Die Normalverteilung wird als mesokurtisch bezeichnet. Das relative Maß für den Exzeß ist:

$$\beta_2 = \frac{\pi_4}{\pi_2{}^2} = \frac{[x^4]\,(n-1)}{[x^2]^2}\,. \qquad \ldots (5)$$

Man kann zeigen, daß für eine Gauß'sche Normalverteilung $\beta_2 = 3{,}0$ sein muß. Für eine verflachte Kurve gilt $\beta_2 < 3{,}0$; für eine überhöhte $\beta_2 > 3{,}0$. Es sei erwähnt, daß Häufigkeitsverteilungen von Präzisionsmessungen oft eine Überhöhung gegenüber der Normalverteilung zeigen. Das hat zu der Vermutung Anlaß gegeben, die Gauß'sche Normalverteilung sei nicht repräsentativ.

Zu jeder empirischen Häufigkeitsverteilung muß man die zugehörige Normalverteilung bestimmen. Die Normalverteilung lautet:

$$y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} = \frac{1}{2{,}5066\, s} \,.\, 2{,}71828^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \qquad \ldots (6)$$

$\pi = 3{,}14159$, e = Basis der natürlichen Logarithmen.
Zur Bestimmung der Normalverteilung zu einer beobachteten Häufigkeitsverteilung schreiben wir Gleichung (6) wie folgt um:

$$y = \frac{n \,.\, i}{2{,}5066\, s}\, 2{,}71828^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \qquad \ldots (7)$$

n = Anzahl der Elemente, i = Klassenintervall; dieses wählt man bei einem großen Kollektiv günstig etwa gleich s/10.

An der Stelle des arithmetischen Mittels ist $x = 0$, daher

$$y_0 = \frac{n \,.\, i}{2{,}5066\, s} \quad \text{und damit}$$

$$y = y_0 \,.\, 2{,}71828.^{-\frac{x^2}{2s^2}} \qquad \ldots (8)$$

Für den Faktor mit der Hochzahl existieren Tafeln.

Mit diesem Rüstzeug gehen wir nun an die Dreieckswidersprüche heran. Das österreichische Netz wurde schon einmal von *Bjerhammar* untersucht. Die in der Arbeitssitzung der Commission Permanente Internationale des Triangulations Européennes am 14. und 15. Juni 1966 in München vorgelegten Ergebnisse weichen von den hier mitgeteilten ab, vor allem deshalb, weil Bjerhammar seinen Untersuchungen nur 251 Dreiecke zugrundegelegt hat.

Das erste Ergebnis der vorliegenden Analyse war:

Anzahl der Elemente	n	$= 269$
Durchschnittlicher Dreieckswiderspruch	$\overline{w}$	$= \pm\, 0'',723$
Varianz (Standardabweichung)	s	$= \pm\, 0'',950$
arithmetisches Mittel	M	$= -\, 0'',012$
Zentralwert	Z	$= -\, 0'',030$
dichtester Wert	D	$= -\, 0'',134$
Kurtosis (nach Gl. 5)	K	$= 3{,}94$
Asymmetrie (nach Gl. 1)	A	$= +\, 0{,}128$

Die Verteilung zeigt also eine leichte linke Asymmetrie sowie eine beträchtliche Überhöhung. Diese Erscheinungen verlangen eine Erklärung. In der Tabelle der Widersprüche fallen sofort die drei Werte $-\, 3'',568$, $-\, 3'',079$ und $+\, 3'',234$ wegen ihrer außergewöhnlichen Größe auf. Sie liegen erheblich über der dreifachen Standardabweichung von $\pm\, 2'',850$. Das heißt aber, daß sie nicht mehr der Zufallswahrscheinlichkeit unterliegen, denn diese schließt das Auftreten von Elementen jenseits der dreifachen Standardabweichung beinahe mit Sicherheit aus. Diese drei Widersprüche sind demnach als grobe Fehler zu werten und dürfen nicht in die Untersuchung einbezogen werden. Tatsächlich wird die Verteilung nach Streichung der drei groben Fehler völlig normal. Die sachliche Rechtfertigung für die Streichung dieser drei Widersprüche ist hiermit gegeben, es muß nur noch die praktische Möglichkeit geprüft werden.

Im österreichischen Netz 1. Ordnung gibt es einige wenige Vierecksdiagonalen. Interessanterweise sind die Dreiecke mit den zwei größten Widersprüchen Teile solcher Vierecke, nämlich die Dreiecke Bleikogel-Sandling-Schafberg mit $+ 3'',234$ und Preber-Kuhalpe-Greimberg mit $- 3'',568$. Man muß also bloß die Diagonalen Bleikogel-Sandling und Preber-Kuhalpe aus dem Netz nehmen, um die zwei größten Widersprüche zum Verschwinden zu bringen. Diese Vorgangsweise ist nicht nur sachlich gerechtfertigt, sondern einfach notwendig, will man eine Nachmessung vermeiden. Der Wert von Vierecksdiagonalen ist ohnehin umstritten. Der dritte große Widerspruch betrifft das Dreieck Villacher Alpe-Golica-Monte Mangart mit $- 3'',079$, das sich teilweise über ausländisches Gebiet erstreckt. Hier wird man nicht umhin können, im Einvernehmen mit den italienischen und jugoslawischen Vermessungsbehörden, die Beobachtungen neu zu bearbeiten und nötigenfalls eine Nachmessung vorzunehmen.

Nach Elimination der drei inkriminierten Werte gibt die Statistik nunmehr:

$$\begin{aligned} n &= 266 \\ \bar{w} &= \pm\, 0'',694 \\ s &= \pm\, 0'',888 \\ M &= +\, 0'',001 \\ Z &= -\, 0'',027 \\ D &= -\, 0'',134 \\ K &= 3,03 \\ A &= +\, 0,152\ . \end{aligned}$$

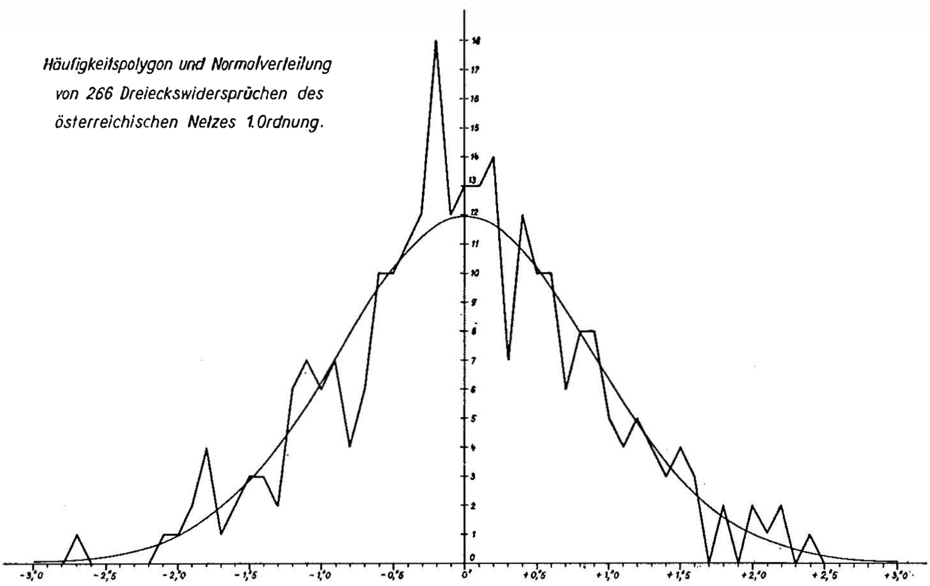

Abb. 1

Es sei noch der mittlere Fehler einer stationsausgeglichenen Richtung nach Ferrero mitgeteilt

$$f = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{6n}} = \pm 0'',362 \,.$$

Die Abb. 1 zeigt das Häufigkeitspolygon mit zugehöriger Normalverteilung.

Das arithmetische Mittel ist nahe dem geforderten Idealwert (Null), die Überhöhung ist praktisch verschwunden. Die Asymmetrie ist zwar nicht sehr ausgeprägt, aber doch deutlich vorhanden. Auf der Suche nach einer Erklärung wurden zunächst verschiedene Abhängigkeiten betrachtet, wie z. B. die Korrelation zwischen Widersprüchen und Dreiecksfläche, bzw. Widersprüchen und Höhenlage der Dreiecke. Es wurden keine Abhängigkeiten festgestellt. Ein systematischer Anteil aus der Seitenfraktion ist auszuschließen, da bekanntlich die Seitenrefraktion in einem homogenen Refraktionsfeld in den Widersprüchen herausfällt.

Nicht zuletzt könnte die Ursache für die Asymmetrie in den Lotstörungen liegen. Die Dreiecksexzesse werden nach der Formel

$$\varepsilon'' = \frac{F}{R^2 \sin 1''} \qquad \ldots (9)$$

berechnet. Darin ist F die Dreiecksfläche und R der Radius der Schmiegungskugel auf der Basis der Bessel'schen Erddimensionen. Abgesehen von der Krümmung der drei Lotlinien in den Eckpunkten eines Dreiecks, werden diese näherungsweise in einem Punkt konvergieren, der infolge der Lotstörungen einen anderen als den oben definierten Krümmungsradius bestimmt. Eine Überschlagsrechnung zeigt den Einfluß einer Lotstörung auf den Exzeß. Es ist

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma} ; \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{2\Delta R}{R} = \frac{2\Delta\gamma}{\gamma} ;$$

$\gamma =$ der von 2 Loten aufgespannte Zentriwinkel, $\Delta\gamma =$ Lotstörung, $\Delta\varepsilon =$ Einfluß auf den Exzeß, $\Delta R =$ Einfluß auf R.

Demnach bewirkt eine Lotstörung von 10″ auf eine Distanz von 30 km ($\gamma = 1000''$) ein ΔR von 64 km und dieses wiederum eine Änderung des Exzesses von $\Delta\varepsilon = 0'',1$, wenn $\varepsilon = 5''$. Der angenommene Wert der Lotstörung wird im Gebirge häufig zu finden sein und der Einfluß auf die Widersprüche ist gerade von jener Größenordnung, die die Asymmetrie beseitigen könnte. Wahre Exzesse jedoch kann man nur berechnen, wenn auf jedem Punkt die Lotrichtung astronomisch durch Länge und Breite bestimmt ist. Dies könnte man auch mit Hilfe der aus Breite und Azimut abgeleiteten Lotabweichungen erreichen. Allerdings erst dann, wenn repräsentative Werte der geodätischen Koordinaten vorliegen, d. h. also nach der Ausgleichung.

Will man ein abschließendes Urteil über die Beobachtungsgrundlagen des österreichischen Netzes 1. Ordnung abgeben, so kann man objektiv feststellen, daß das Material von hoher Genauigkeit und offensichtlich frei von systematischen Einflüssen ist. Diese Beurteilung wird noch eindrucksvoller, wenn man die Schwierigkeiten des Terrains, die Ungunst des Wetters und alle anderen Fährnisse der Arbeit in der 1. Ordnung bedenkt.