



## Ebenes und räumliches Rückwärtseinschneiden eines Dreieckes in Hinblick auf die Luftbildmessung

Karl Killian <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 1140 Wien, Hadikgasse 40

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **54** (6), S. 181–192

1966

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_196616,  
  Title = {Ebenes und räumliches Rückwärtseinschneiden eines  
    Dreieckes in Hinblick auf die Luftbildmessung},  
  Author = {Killian, Karl},  
  Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
  Pages = {181--192},  
  Number = {6},  
  Year = {1966},  
  Volume = {54}  
}
```



Ich habe versucht, einen gestrafften Überblick über die Geschichte und das Wesen der Geodäsie zu geben. Sie ist ursprünglich ein Geschwisterkind der Mathematik, der Astronomie und der Geographie. Heute ist sie eine eigene Wissenschaft. Sie ist Vorbild für eine umfassende Arbeitsorganisation und für die einheitliche Darstellung weltweiter gemeinsamer Arbeiten geworden. Im kleinen ist sie den Bauingenieuren, den Planern und vielen anderen ein aufgeschlossener Helfer. Ihre weltweiten Arbeiten leiden gegenwärtig unter den Spannungen zwischen West und Ost. Andererseits ist sie aber gerade durch ihre umfassenden Aufgaben dazu berufen, wenigstens auf wissenschaftlichem Gebiet Spannungen abzubauen und in der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik die vertrauensvolle Zusammenarbeit aller Völker über alle Ländergrenzen hinweg aufrecht zu erhalten. Höher als unsere wissenschaftliche Arbeit steht unsere Verpflichtung, die menschlichen Kontakte zu pflegen und die Freunde zu mahnen, den Glauben an die Verbundenheit aller Menschen hochzuhalten. Ihnen, hier in Österreich, kommt dabei nach wie vor, heute wie in den vergangenen Jahrhunderten, die Aufgabe zu, Brücken zwischen West- und Osteuropa zu schlagen und das Tor zu gemeinsamer Arbeit, Einsicht und Erkenntnis weit nach allen Seiten hin offen zu halten.

### Ebenes und räumliches Rückwärtseinschneiden eines Dreiecks in Hinblick auf die Luftbildmessung

Von *Karl Killian*, Wien

Das ebene Rückwärtseinschneiden eines Dreiecks ist bekanntlich eine Erweiterung des ebenen Rückwärtseinschneidens, und zwar dahingehend, daß nicht ein Punkt über drei gegebene Festpunkte  $A, B, C$ , sondern ein Dreieck  $P_1, P_2, P_3$  durch Messung der Winkel  $\delta, \xi, \eta$  rückwärts eingeschritten wird. (Abb. 1)

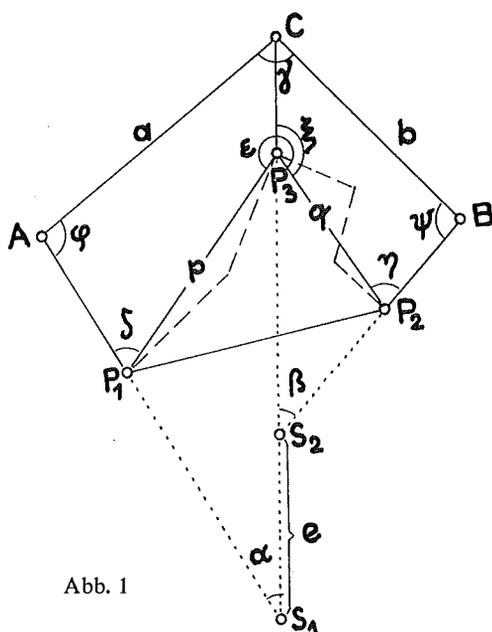


Abb. 1

In rein geometrischer Hinsicht erfährt das ebene Rückwärtseinschneiden eines Dreieckes eine nur unwesentliche Erweiterung, wenn an Stelle des Dreieckes ein Polygonzug (siehe strichlierte Linien Abb. 1) vorliegt; denn aus den gemessenen Seiten und Winkeln des Polygonzuges können die das Dreieck  $P_1, P_2, P_3$  bestimmenden Größen  $\varepsilon, p, q$  berechnet werden. In praktischer Hinsicht kann diese Aufgabe große Bedeutung haben: Polygonzug (Zwangszentrierung) in einem Tal gelegen, mit Anschluß an drei Fixpunkte.

Es gibt verschiedene Lösungen des ebenen Rückwärtseinschneidens eines Dreieckes bzw. eines Polygonzuges [10b] [12a] [15] [16] [17]. Auch im Sinne einer Ausgleichungsaufgabe erfolgte die Behandlung [10a].

Die *gefährlichen Örter* kommen jedoch meines Wissens nach in der Literatur nicht vor; sie werden unter A) behandelt. Unter B) erfolgt die Erweiterung des ebenen Rückwärtseinschneidens eines Dreieckes zur analogen *räumlichen Aufgabe und neue Möglichkeiten für die Luftbildmessung werden beschrieben*.

#### A) Die gefährlichen Örter des ebenen Rückwärtseinschneidens eines Dreieckes

Die Geraden durch  $A, P_1$  und  $B, P_2$  schneiden die Gerade durch  $C, P_3$  in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$ . Aus Abb. 1 folgt

$$\alpha = \delta + \varepsilon - \xi - 180^\circ \quad \dots (1)$$

$$\beta = \xi + \eta - 180^\circ \quad \dots (2)$$

Aus den Dreiecken  $P_1, P_3, S_1$  und  $P_2, P_3, S_2$  kann  $e$  aus gemessenen Größen berechnet werden (sin-Satz). Führt man die Hilfswinkel  $\varphi$  und  $\psi$  ein, so ergibt der sin-Satz:

$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} - \frac{b \sin \psi}{\sin \beta} = e$$

oder  $a \sin \beta \sin \varphi - b \sin \alpha \sin \psi = e \sin \alpha \sin \beta \quad \dots (3)$

aus der Figur folgt  $\varphi + \psi = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma \quad \dots (4)$

Würde man in Gl. 4) die Summe der bekannten Winkel mit  $\omega$  bezeichnen und würde man in Gl. 3)  $\psi = \omega - \varphi$  einsetzen, so erhielte man nach Entwickeln von  $\sin(\omega - \varphi)$  die leicht lösbare Gl.:  $K_1 \sin \varphi + K_2 \cos \varphi = K_3$ .

Wir suchen jedoch die *gefährlichen Örter*, d. h. wir suchen jene Konfigurationen der Punkte  $A, B, C, P_1, P_2, P_3$ , die die Eigenschaft haben, daß bei fehlerfreien gegebenen und gemessenen Größen wenigstens unendlich kleine Verschiebungen der Punkte zu einander möglich sind, wobei sich die gegebenen und gemessenen Größen überhaupt nicht oder nur von zweiter oder höherer Kleinheitsordnung ändern. Wir differenzieren die Gln. 3) und 4) und sehen dabei alle gegebenen und gemessenen Größen als Konstante an.

$$a \sin \beta \cos \varphi d\varphi - b \sin \alpha \cos \psi d\psi = 0 \quad \dots (3')$$

$$d\varphi + d\psi = 0 \quad \dots (4')$$

Setzt man aus Gl. 4')  $d\varphi = -d\psi$  in Gl. 3') ein und dividiert man durch  $d\psi$ , so folgt:

$$a \sin \beta \cos \varphi + b \sin \alpha \cos \psi = 0 \quad \dots (5)$$

Das ist die Bedingungsgleichung für die gefährlichen Örter der vorliegenden Aufgabe. Man kann sofort spezielle Werte angeben, die die Gl. 5) befriedigen:

z. B. 1)  $\alpha = \beta = 0$  (trivialer Fall. Die durch  $A, P_1; B, P_2$  und  $C, P_3$  gehenden Geraden sind parallel)

2)  $\varphi = \psi = 90^\circ$

Um die gesamten Aussagen der Gl. 5) geometrisch deuten zu können, wird diese Gl. umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} \cos \varphi + \frac{b}{\sin \beta} \cos \psi &= 0 \\ \frac{CS_1}{\sin \varphi} \cos \varphi + \frac{CS_2}{\sin \psi} \cos \psi &= 0 \\ CS_1 \cot \varphi + CS_2 \cot \psi &= 0 \quad \dots (5a) \end{aligned}$$

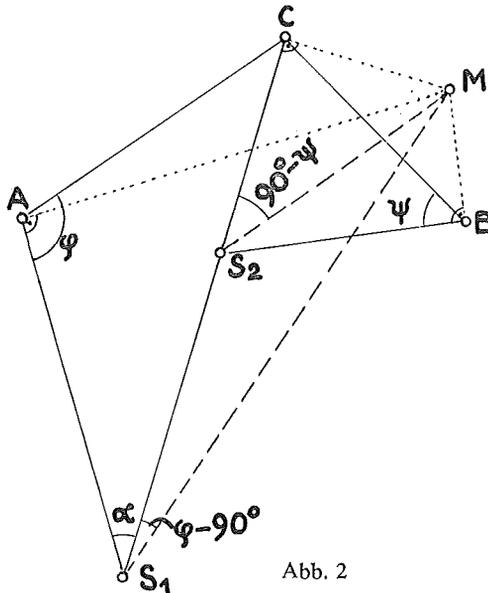


Abb. 2

In Abb. 2 ist eine solche Lage der Punkte  $A, B, C, S_1, S_2$  angenommen, die eine Befriedigung der Gl. 5a) ergibt; denn denkt man sich die beiden Glieder dieser Gl. konstruiert, indem man in  $S_1$  den Winkel  $\varphi - 90^\circ$  und in  $S_2$  den Winkel  $90^\circ - \psi$  aufträgt, so erhält man die beiden strichlierten Geraden, die sich in einem Punkt  $M$  schneiden, der in der in  $C$  errichteten Normalen liegt.

In vorliegendem Fall sind auch die Winkel  $M, A, S_1$  und  $M, B, S_2$  rechte Winkel. Denkt man sich nämlich über  $M, S_1$  und  $M, S_2$  als Durchmesser Kreise  $K, K'$  gezogen, so schneiden sich diese in  $C$ .  $A$  liegt auf  $K$ ; denn Winkel  $C, A, M = C, S_1, M = \varphi - 90^\circ$ . Analoges gilt für  $B$ .

Diese Eigenschaften des Punktes  $M$  sind identisch mit den Eigenschaften des *Momentendrehpols* für eine Drehung des gegebenen Dreieckes  $A, B, C$  im System

der drei festen Zielstrahlen; ein Ergebnis, das von vornherein geometrisch durchsichtig ist. Dasselbe gilt natürlich für das Dreieck  $P_1, P_2, P_3$ . Analytisch kann man dazu gelangen, wenn man in Gl. 5) die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  aus den Gln. 1) und 2) einsetzt.

Eine vorliegende Anordnung von Punkten  $A, B, C, P_1, P_2, P_3$  weist somit dann gefährliche Örter auf, wenn für  $A, B, C$  und/oder für  $P_1, P_2, P_3$  ein Momentandrehpol besteht. Daraus folgt die *praktische Regel*: Man errichte in den Punkten  $A, B, C$  und  $P_1, P_2, P_3$  die Normalen zu den entsprechenden Zielstrahlen. Schneiden sich die drei ersteren und/oder die drei letzteren Normalen je in einem Punkt, so liegen gefährliche Örter vor.

Wir betrachten noch einige Sonderfälle:

1. Degeneriert das Dreieck  $P_1, P_2, P_3$  zu einem Punkt  $P$  (gewöhnliches ebenes Rückwärtseinschneiden) und liegen die Punkte  $A, B, C, P$  auf einem Kreis (gefährlichen Kreis), so gibt es einen Momentandrehpol, er liegt ebenfalls auf dem Kreis.

2. Sind die Punkte  $A, B, C, P_1, P_2$  gegeben, so kann der gefährliche Ort des Punktes  $P_3$  einfach gefunden werden: Wir errichten in den Punkten  $P_1, P_2$  Normale zu den entsprechenden Zielstrahlen. Der Schnittpunkt der Normalen ist der Momentandrehpol  $M$  für das zu bestimmende Dreieck  $P_1, P_2, P_3$ . Der mit  $M, C$  als Durchmesser gezogene Kreis  $U$  ist der gefährliche Ort für den Punkt  $P_3$ ; denn die in allen Punkten von  $U$  gezogenen Normalen auf den entsprechenden Zielstrahlen gehen durch  $M$ . Auf dem gefährlichen Kreis  $U$  gibt es einen *Punkt von besonderer Gefährlichkeit*: Die zu den entsprechenden Zielstrahlen in  $A$  und  $B$  errichteten Normalen schneiden sich im Momentandrehpol  $M'$  für eine Drehung des Dreiecks  $A, B, C$ . Die Normale in  $C$  an  $C, M'$  schneidet  $U$  im gesuchten Punkt.

3. Wie einleitend bemerkt wurde, können die Größen  $\alpha, \beta, e$  (Abb. 1) aus den gemessenen Größen berechnet werden. Wählt man noch  $A$  und  $B$ , so kann der gefährliche Ort für  $C$  sofort angegeben werden: Wir bestimmen, so wie unter 2) beschrieben wurde,  $M'$  und fällen die Normale auf die durch  $S_1$  und  $S_2$  gehenden Geraden. Der Fußpunkt dieses Lotes ist der gesuchte Punkt; denn es ist sodann eine unendlich kleine Drehung des Dreiecks  $A, B, C$  in bezug auf die durch  $\alpha, \beta, e$  bestimmten, als fest gedachten Zielstrahlen möglich. Nimmt man hingegen  $A, B, C$  als fest an, so kommt man zu einer anderen Überlegung. Wir fragen zunächst nach der Lage von  $S_1$  und  $S_2$ . Der Kreis  $K_1$  mit  $A, C$  als Sehne und  $\alpha$  als Peripheriewinkel ergibt den geometrischen Ort für  $S_1$ . Analog besteht ein Kreis  $K_2$ , der den geometrischen Ort für  $S_2$  darstellt. Ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt  $C$  schneidet die Kreise  $K_1$  und  $K_2$ . Trägt man ausgehend von den Schnittpunkten auf  $K_1$  die Strecke  $e$  in entsprechender Richtung auf den Strahlen ab, so erhält man eine *Pascalsche Schnecke*. Ihr Schnittpunkt mit  $K_2$  ergibt den Punkt  $S_2$  und damit ist auch die Lage von  $S_1$  bestimmt. Ebenso könnte man vom Kreis  $K_2$  ausgehend eine Pascalsche Schnecke konstruieren. Befinden sich die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  in einer solchen Lage, daß die beiden Pascalschen Schnecken die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  oskulieren, so liegen gefährliche Örter für  $S_1$  und  $S_2$  vor. Die relative Lage der Punkte  $A, B, C, S_1, S_2$  zueinander ist natürlich identisch mit der nach obiger Annahme (drei feste Zielstrahlen) bestimmten relativen Lage.

B) Das räumliche Rückwärtseinschneiden eines Dreiecks

Zur Lösung dieser Aufgabe legen wir das durch das Rückwärtseinschneiden festzulegende gegebene Dreieck  $P_1, P_2, P_3$  in die  $x, y$ -Ebene und berechnen dazu die Lage des gegebenen Dreiecks  $A, B, C$ . Alle in der Abb. 3 eingezeichneten Winkel sind gemessen.

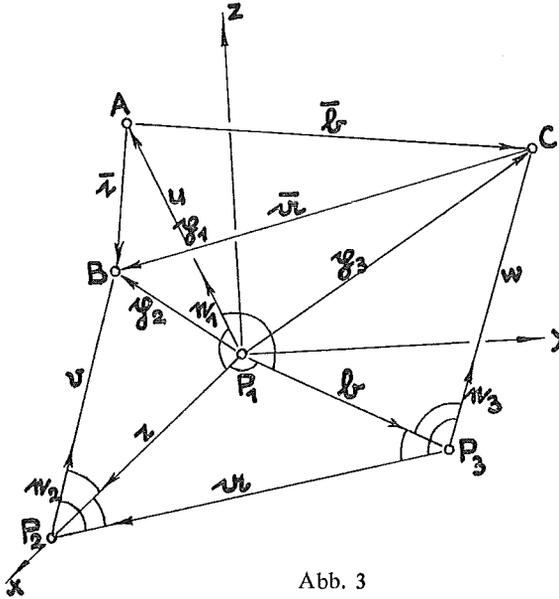


Abb. 3

Mittels Auflösung sphärischer Dreiecke die Richtungskosinus der können Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  berechnet werden. Somit ist

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k \\ e_2 &= \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k \\ e_3 &= \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Die gesuchten Entfernungen  $\overline{P_1A}, \overline{P_2B}, \overline{P_3C}$  nennen wir  $u, v, w$ . Aus der Abb. 3 folgt

$$\begin{aligned} \overline{a^2} &= (p_2 - p_3)^2 & p_1 &= u \cdot e \\ \overline{b^2} &= (p_3 - p_1)^2 & p_2 &= c + v e_2 = x_2 i + v (\cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k) \\ \overline{c^2} &= (p_2 - p_1)^2 & p_3 &= b + w e_3 = x_3 i + y_3 j + w (\cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k) \end{aligned}$$

somit ist

$$\overline{a^2} = (x_2 - x_3 + v \cos \alpha_2 - w \cos \alpha_3)^2 + (v \cos \beta_2 - y_3 - w \cos \beta_3)^2 + (v \cos \gamma_2 - w \cos \gamma_3)^2$$

Nach Zusammenziehung der bekannten Größen folgt Gl. I) und folgen die Gln. II) und III).

$$A_1 v^2 + B_1 w^2 + C_1 vw + D_1 = 0 \quad \dots (I)$$

$$A_2 w^2 + B_2 u^2 + C_2 uw + D_2 = 0 \quad \dots (II)$$

$$A_3 u^2 + B_3 v^2 + C_3 uv + D_3 = 0 \quad \dots (III)$$

Diese Gleichungen und daher auch ihre Lösungen unterscheiden sich nur unwesentlich von den Gleichungen des in der Literatur oft behandelten gewöhnlichen räumlichen Rückwärtseinschneidens.

Zur Bestimmung der *gefährlichen Örter* gehen wir analog den unter A) angestellten Überlegungen vor: Durch die Punkte  $P_1, P_2, P_3$ ;  $A, B, C$  legen wir je eine Normalebene zu dem betreffenden Zielstrahl. Es entstehen somit zwei Ebenentripel, die sich im allgemeinen je in einem Punkt  $Q$  bzw.  $Q'$  schneiden.

Schneidet sich jedoch eines der beiden Ebenentripel in einer Geraden, dann muß sich auch das andere in einer Geraden schneiden; denn die Zielstrahlen müssen so dann, da sie auf den genannten Ebenen normal stehen, komplanar sein. Damit kommen wir auf das ebene Problem zurück. Die Schnittgeraden sind in diesem Fall Momentandrehachsen. Bedingung für das Eintreten der Komplanarität:

$$e_1 \times e_2 \times e_3 = \theta.$$

Schneiden sich die Ebenentripel in den Punkten  $Q$  und  $Q'$ , so erkennt man, daß es im allgemeinen keine durch  $Q$  und  $Q'$  gehende Gerade gibt, die für die Dreiecke  $P_1, P_2, P_3$  oder  $A, B, C$  eine Momentandrehachse oder die Achse einer infinitesimalen Schraubung (Momentanschraubung) bildet. Liegt jedoch  $Q$  in der  $P_1, P_2, P_3$ -Ebene und/oder  $Q'$  in der  $A, B, C$ -Ebene, so entstehen Momentandrehpole. Projiziert man nämlich die Zielstrahlen orthogonal z. B. in die  $P_1, P_2, P_3$ -Ebene, so stehen diese Projektionen normal zu den entsprechenden Schnittgeraden der genannten Normalebenen mit der  $P_1, P_2, P_3$ -Ebene. Der Schnittpunkt  $Q$  ist somit für den orthogonalen Riß der Zielstrahlen ein Momentandrehpol. Aber er ist es auch für eine räumliche Bewegung des Dreieckes  $P_1, P_2, P_3$  entlang der Zielstrahlen; denn neigt man die Ebene des Dreieckes um einen unendlich kleinen Winkel, so kann der Winkel zwischen einer Dreieckseite und seiner Projektion höchstens auch eine unendlich kleine Größe haben, und somit können sich die Projektionen von den wahren Seiten nur von zweiter Kleinheitsordnung unterscheiden. Das Analoge gilt für das Dreieck  $A, B, C$ . Zur Ableitung des beim räumlichen Rückwärtseinschnitt auftretenden „gefährlichen Zylinder“ wurden im Prinzip die gleichen Überlegungen angestellt [7] und später ohne Operation mit unendlich kleinen Größen, und zwar mit Verwendung der Eigenschaften des Nullsystems abgeleitet [14] [18]. Diese Eigenschaften könnten auch unmittelbar auf vorliegende Aufgabe angewandt werden.

Die Untersuchungen, ob in einem gegebenen Fall gefährliche Örter vorliegen, ist somit identisch mit der Untersuchung ob

- 1)  $Q$  in der  $P_1, P_2, P_3$ -Ebene oder
- 2)  $Q'$  in der  $A, B, C$ -Ebene liegt.

Zu 1). Die Endpunkte der Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  haben Grundrisse, die durch die Gln. 6) festgelegt sind:  $x_1 = \cos \alpha_1, y_1 = \cos \beta_1$  usw.

Normale zu den Grundrissen der Einheitsvektoren sind die gesuchten Schnittgeraden mit der  $x, y$ -Ebene.

Zu 2). Der Normalvektor  $n$  der  $A, B, C$ -Ebene kann berechnet werden:  $(p_2 - p_3) \times (p_3 - p_1) = n$ . Die Normalvektoren der genannten durch  $A, B, C$  gehenden Ebenen sind  $e_1, e_2, e_3$ . Die Schnittgeraden dieser Ebenen mit der  $A, B, C$ -Ebene können bestimmt werden.

Das räumliche Rückwärtseinschneiden eines Dreieckes eröffnet neue Möglichkeiten für die Luftbildmessung. Diese Möglichkeiten werden kurz beschrieben und in diesem Zusammenhang werden andere Messungen und geometrische Beziehungen behandelt, die für die *analytischen räumliche Aerotriangulation* bedeutungsvoll sein dürften. Der *große technische Aufwand* wird jedoch mit den erreichbaren *wirtschaftlichen Nutzen* nicht verglichen.

Ein Verband von drei Flugzeugen 1, 2, 3 (Abb. 4) fliegt bei gutem Flugwetter möglichst gleichförmig horizontal und geradlinig. Der Verband bildet ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten ca. 10 km sind.

Alle drei Flugzeuge sind mit photogrammetrischen Reihenbildkammern ausgerüstet, die ähnlich dem Verfahren von *Nenonen* [3] [5] Einrichtungen aufweisen, die am Ende des Geländebildes auch gleichzeitig den Horizont abbilden. Bei den folgenden Überlegungen kommt es jedoch nicht auf die Abbildung des Horizontes, sondern auf die gegenseitige Abbildung der drei Flugzeuge an. In den drei Flugzeugen werden die Verschlüsse hinreichend gleichzeitig drahtlos ausgelöst. Schon vor fast 40 Jahren erfolgte diese Synchronisierung zwischen zwei Flugzeugkammern auf  $1/400$  Sek. genau [2]. Ferner besitzt jedes der drei Flugzeuge ein *Registrier-Statoskop* und eine Einrichtung zur *Entfernungsmessung* (mit zeitlicher Registrierung) zu den beiden anderen Flugzeugen.

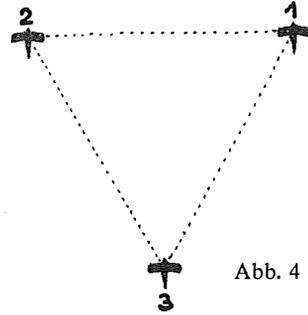


Abb. 4

Der Flugverband nimmt gleichzeitig drei Flugstreifen auf. Werden Normalkammern verwendet, so bleiben bei 3,5 bzw. 2 km Flughöhe ein bzw. zwei nicht aufgenommene Zwischenstreifen. Für Weitwinkelkammern ( $18 \times 9$ ,  $f = 11,5$  cm) ergibt sich für 3,5 bzw. 2 km Flughöhen kein bzw. ein Zwischenstreifen. Es wird praktisch kaum möglich sein, daß der Flugverband mäanderförmig das Fluggebiet befliegen kann, sondern am Ende der drei Bildstreifen wird der Flugverband durch rascheres Fliegen des Flugzeuges 3 aufgelöst und wieder neu gebildet.

Die gegenseitige Photographie zweier und mehrerer Flugzeuge, die gleichzeitig das Gelände aufnehmen, wurde schon von *Klingatsch*, *Boykow*, *Fa. Goerz*, „*Aerogeodetic*“ und *Albada* [2] [3] [9] [12b] vorgeschlagen bzw. ausgeführt. Auch an eine Flugzeugkette, bei der sich die Flugzeuge gleichzeitig und gegenseitig photographieren und dem Atlantischen Ozean an seiner engsten Stelle (Afrika nach Brasilien = 3100 km) überbrücken sollten, wurde schon gedacht [8]. (Einen anderen Vorschlag machte *Berroth*. Heute kann diese Aufgabe mit Hilfe der Stellartriangulation sicher auf ganz wenige Meter genau gelöst werden). In neuerer Zeit wurde die gegenseitige Photographie von Flugzeugen bei der Vermessung von Meereswellen gebraucht.

Die für die folgenden Überlegungen notwendigen Messungen der drei Flugzeugdistanzen müssen mindestens auf wenige Dezimeter genau sein. Optische Methoden, bei denen die Länge des Flugzeuges und ein angehängter Meßschwanz als Basis dienen, können die erforderliche Genauigkeit nicht erreichen. Elektronische Meßgeräte, die die Entfernungsmessung zweier Flugzeuge mit der geforderten Genauigkeit bestimmen können, dürften noch nicht bestehen, obwohl im vorliegenden Fall

die zeitliche Änderung der Entfernungen gegenüber der Fluggeschwindigkeit sehr klein ist.

Im Prinzip können zur Entfernungsmessung *Impulsverfahren* in Betracht kommen und bekannte Verfahren, bei denen *Wobbelungen der Sendefrequenz* vorgenommen werden. Man kann auch versuchen unsere Aufgabe spezifisch aufzufassen, indem man voraussetzt, daß die Ausgangsentfernungen der drei Flugzeuge durch räumliches Rückwärtseinschneiden über einen Festpunktenetz bestimmt wurde. Die sodann notwendige Messung der *Entfernungsänderungen* der Flugzeuge kann mit elektronischen *Doppler-Effekt-Messungen* (Frequenzänderungen), die zeitlich registriert werden, geschehen. Bedenklich erscheinen dabei kleine, kaum meßbare, in gleicher Richtung auftretende Relativgeschwindigkeiten, deren Addition einen großen Wert erreichen kann. Höhere Genauigkeit wird man erreichen, wenn man in den Flugzeugen je einen *quarzgesteuerten Sender* anbringt und damit *stehende Wellen* erzeugt. Man kann auch die Frequenz der beiden Sender um kleine Beträge entsprechend ändern und damit *Schwebungen* von gewünschter Wellenlänge erhalten.

$O_1, O_2, O_3$  sind die Mittelpunkte der Objektive der Kammern für die Geländeaufnahmen. Wir nehmen an, daß die Seiten dieses Dreieckes hinreichend genau bestimmt wurden. Dieses Dreieck hat zunächst eine unbekannte Lage im Raum. Die Winkel desselben können aus den Aufnahmen der Flugzeuge bestimmt werden, und zwar ohne Kenntnis der Lotrichtung. Die Exzentrizität der Zentren der Flugzeug- und der Geländebilder ist zu berücksichtigen und das dreifach überbestimmte Dreieck  $O_1, O_2, O_3$  kann ausgeglichen werden.

Wenn sich auf jedem der drei Geländebilder ein Fixpunkt abbildet, so ergibt sich das *räumliche Rückwärtseinschneiden des Dreieckes*  $O_1, O_2, O_3$  (in Abb. 3 ist  $P_1, P_2, P_3$  das einzuschneidende Dreieck, das unter dem Fixpunkt-Dreieck  $A, B, C$  angenommen wurde). Dazu ist also nur erforderlich, daß auf drei gleichzeitig aufgenommenen Geländebildern je *ein* Fixpunkt abgebildet wird.

Die in den Flugzeugen gemessenen Größen ergeben noch weitere geometrische Beziehungen:

*Zur Bestimmung der Lotrichtung in den Luftstandpunkten* nehmen wir zunächst an, die Erde ist eine aus konzentrischen homogenen Kugelschalen aufgebaute Kugel, die von einer ebenso aufgebauten Atmosphäre umgeben ist. Die Lotlinien wären sodann Gerade, die sich im Erdmittelpunkt schneiden. Die durch  $O_1, O_2, O_3$  gehenden Lotlinien würden Winkel

$$\xi = 3438' \frac{10}{6370} \doteq 5',4$$

einschließen, wenn die Flugzeuge gleich hoch und in Distanzen von 10 km fliegen würden. Wäre ferner zwischen den Flugzeugen keine atmosphärische Refraktion des Lichtes vorhanden, so würden die Winkel zwischen den Zielstrahlen und den Lotlinien  $90^\circ - \xi/2$  sein (Abb. 5). Da von jedem Flugzeug aus zwei Ziellinien zu den beiden anderen Flugzeugen photographisch festgelegt sind, sind auch die Lotlinien in bezug auf diese Ziellinien festgelegt, d. h. *unter obigen Annahmen könnten die Nadirpunkte der drei Luftbilder bestimmt werden.*

Die Erde und ihre Lufthülle besitzen jedoch obige Eigenschaften nicht. Die Lotlinien sind bekanntlich räumlich gekrümmte Linien, die sich nicht schneiden. Unter Lotrichtung in den Luftstandpunkten verstehen wir die Tangentenrichtungen der durch  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  gehenden Lotlinien.

Den oben gebrauchten Erdradius können wir für jede Lage des Flugverbandes als mittleren Radius des Referenzellipsoides annehmen. Die Winkel zwischen den ellipsoidischen und den tatsächlichen Lotrichtungen sind die Lotabweichungen. Sie sind für unsere Belange kaum beachtenswerte Größen: etwa  $1''$  bis  $2''$  im Flachland und etwa  $5''$  bis  $10''$  im Hochgebirge. Dazu kommt noch, daß sie in den Höhen der Luftstandpunkte noch geringer sind.

Die *Einflüsse der Atmosphäre* äußern sich im vorliegenden Fall in der Refraktion und in den Eigenschaften der Flächen gleichen Druckes.

Der nach Berücksichtigung der Refraktion übrig bleibende Fehler ist in großen Höhen sehr klein. Viele Hochgebirgsvermessungen haben ergeben, daß dieser Fehler bei Distanzen bis zu 6 km etwa  $1''$  beträgt [4] [6] [13]. Bei 10 km Distanzen wird er  $5''$  nicht erreichen.

Man unterscheidet *Großformen* und *Kleinformen* der isobaren Flächen. Erstere betreffen Gebiete von einigen tausend, letztere etwa  $100 \text{ km}^2$ . Die räumlichen und zeitlichen Änderungen der *Großformen* werden fortlaufend bestimmt. Zum Beispiel werden in sieben Städten Deutschlands: Schleswig, Emden, Hannover, Stuttgart, München, Köln und Berlin Radiosondenmessungen (jeden zweiten Tag) zur Bestimmung der Meereshöhen der isobaren Flächen durchgeführt und die Ergebnisse werden in Wetterkarten veröffentlicht. Die 21 möglichen Verbindungslinien zwischen den obigen Städten haben Längen von 200 bis 730 km. Aus den Wetterkarten des deutschen Wetterdienstes Teil C ersieht man, daß, Schönwetter vorausgesetzt, die isobare Fläche 700 mb für Entfernungen von 200 km den Höhenunterschied von 20 m nur selten überschreiten und daß die Entfernungen 200 bis 400 km bzw. 400 bis 600 km die Höhenunterschiede 30 bzw. 60 m ebenfalls selten überschreiten. Man erkennt auch, daß die Großformen der isobaren Flächen mit zunehmender Höhe im allgemeinen *größer* werdende Höhenunterschiede aufweisen, die größeren zeitlichen Änderungen unterworfen sind. Daraus folgt, daß *Aeronivellements* eine Stützung durch terrestrische Messungen nicht entbehren können [1]. (Sehr oft sind flüchtige Nivellements am einfachsten durchführbar.)

Für die obige Nadirpunktbestimmung handelt es sich jedoch um die zu den Zeitpunkten der Aufnahmen bestehenden *Kleinformen* der isobaren Flächen. Die Kleinformen der in Frage kommenden isobaren Flächen (500 bis 800 mb) sind mit den normalen meteorologischen Meßgeräten nicht vermessbar. Zur rohen Abschätzung machen wir zunächst die Annahme über proportionalen Verlauf des Höhenunterschiedes mit der Entfernung. Aus obigen Angaben würde sich sodann für 10 km Entfernung ein Höhenunterschied von  $\pm 1 \text{ m}$  ergeben, d. h. der daraus folgende Fehler in  $\xi$  wäre  $\pm 20''$ . Es kann angenommen werden, daß die Störungen

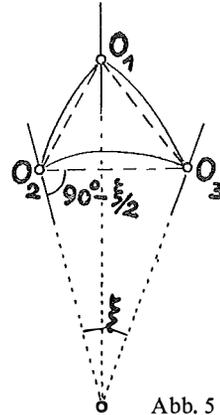


Abb. 5

der Kleinformen in terrestrischen Punkten größer sind als in Luftstandpunkten. Reiche Erfahrungen mit terrestrischen Messungen bestätigen obige Annahme über proportionalen Verlauf. Über Festpunkt-Gebiete ausgeführte Luftbildmessungen, bei denen Registrier-Statoskope verwendet wurden, führen zu demselben Ergebnis.

Somit kann aus der Kenntnis der isobaren Fläche die Neigung der durch die drei Flugzeuge gehenden „isobaren Ebene“ ermittelt werden, wodurch der Fehler in  $\xi$  verkleinert wird.

Der Höhenfehler in der Stoskop-Messung kann ebenfalls mit  $\pm 1$  m angenommen werden. Beträgt ferner der Fehler in der photogrammetrischen Winkelmessung  $\pm 10''$ , so folgt der gesamte mittlere Fehler des Winkels  $\xi$  mit ca.  $\pm 0,5'$ . Dieser Wert ist zur *genauen* Orientierung der Luftbilder hinreichend.

Bis jetzt wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die zwischen den drei Flugzeugen verlaufenden Zielstrahlen durch die *Abgase der Flugmotoren* keine Refraktion erfahren. Dies wäre bei Windstille der Fall und dann, wenn Flug- und Windrichtung ungefähr einander entgegengesetzt gerichtet sind. Bei anderen Windrichtungen können sich unberechenbare große Refraktionen ergeben, aber infolge eines ungünstigen Windes kann *nur einer der zwei Zielstrahlen*, und zwar 1, 3 oder 2, 3 besondere Refraktionen erfahren (Abb. 4). Welcher der beiden Zielstrahlen refraktionsbehaftet ist, ergibt sich aus der Richtung und Stärke des jeweilig herrschenden Windes. Diese für die Navigation wichtigen Größen können als bekannt gelten. Auch rechnerisch kann man einfach nachweisen, welcher der beiden Zielstrahlen besondere Refraktion erleidet: Die durch die Abgase entstehende Refraktion hat nämlich vertikale und laterale Komponenten. Wir berechnen aus den drei bestimmten Seiten des Dreieckes  $O_1, O_2, O_3$  die Winkel, vergleichen sie mit den photogrammetrisch bestimmten Winkeln und erkennen, daß z. B. die Seite  $O_2, O_3$  refraktionsbehaftet ist. Die Bestimmung des Nadirpunktes ist sodann nur für den Luftstandpunkt  $O_1$  möglich.  $O_1, O_2, O_3$  bilden ein bekanntes Dreieck, von dem die Seiten  $O_1, O_2$  und  $O_1, O_3$  bekannte Lagen gegenüber dem Horizont aufweisen, d. h. das Dreieck hat eine bekannte Lage zum Horizont. Es bleiben also dennoch wichtige, für die analytische räumliche Aerotriangulation zu erfüllende Bedingungen.

Auch bei Auftreten der erwähnten Refraktion könnte man alle drei Nadirpunkte bestimmen, und zwar mit Hilfe eines zum Vorschlag gebrachten speziell, für die Luftbildmessung geeigneten Horizontkreisels [11], mit dem man auch eine Glättung der aus den isobaren Flächen bestimmten Lage der Nadirpunkte vornehmen könnte.

Das räumliche Rückwärtseinschneiden eines Dreieckes ist jedoch in diesem Fall nicht möglich, denn es ist nur eine Ziellinie, nämlich  $O_1$  zum Festpunkt  $A$  in bezug auf das Dreieck  $O_1, O_2, O_3$  festgelegt. Sind jedoch auf einem der drei Geländebilder zwei Festpunkte abgebildet, so ergibt sich eine geometrisch bestimmte Aufgabe: Zur Festlegung von  $n$  Punkten des Raumes braucht man  $z = 3n - 6$  Stücke. In unserem Fall braucht man  $3 \times 7 - 6 = 15$  Stücke. Wir haben drei Seiten des Dreieckes  $O_1, O_2, O_3$ , sechs Winkel zwischen zwei dieser Seiten mit den Zielstrahlen zu den Geländepunkten und müssen beachten, daß man zur gegenseitigen Bestimmung der vier Festpunkte sechs Stücke braucht. Summe = 15.

*Zusammenfassung der für die Luftbildmessung beschriebenen Möglichkeiten:*

1. Während das gewöhnliche räumliche Rückwärtseinschneiden auf einem Bild mindestens drei identifizierbare Festpunkte benötigt, sind auf drei gleichzeitig aufgenommenen Bildern (Entfernungen der Luftstandpunkte etwa 10 km) nur je ein Festpunkt erforderlich. Bei Auftreten der erwähnten Refraktion sind auf einem der drei Bilder zwei Festpunkte erforderlich.

2. In allen Luftbildern werden die Nadirpunkte bestimmt. Bei Auftreten der erwähnten Refraktion kann je nur in einem der drei Luftbilder der Nadirpunkt bestimmt werden. (Vorausgesetzt der Horizontkreisel wird nicht verwendet.)

3. Jeder Luftstandpunkt bildet mit zwei anderen Luftstandpunkten die Ecken eines ungefähr gleichseitigen Dreieckes (ca. 10 km Seitenlänge), dessen Seitenlängen sowie Neigungen der Seiten zum Horizont durch Messungen bestimmt werden. Sie geben im Verein mit den unter 1. und 2. genannten Messungen Bedingungen für die analytische räumliche Aerotriangulation, deren numerische Rechnungen elektronisch erfolgen. Die unter 2. und 3. genannten Messungen sind unabhängig vom Inhalt der Geländebilder. Bei den beschriebenen Verfahren wird der Maßstabfehler eines ausgewerteten Gebietes in Richtung der Bildstreifen groß sein im Vergleich zum Maßstabfehler, der senkrecht dazu entsteht. Um in beiden Richtungen etwa den gleichen Maßstabfehler zu erhalten, müßte man die Bildstreifen in zwei zueinander normalen Richtungen anlegen und das Gebiet doppelt überdecken. Diese Möglichkeiten werden für die Luftbildmessung festpunktarmer Großgebiete von Interesse sein.

**Literatur**

[1] *Ackermann, F.*: Probleme um das Stoskop, Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. 1958.

[2] „*Aerogeodetic*“: Das aerogeodätische Verfahren, Berlin-Zehlendorf.

[3] *Albada, L. E. W. van*: Über die Möglichkeit einer photokartographischen Aufnahme von vorher nicht triangulierten Geländen aus Flugzeugen, Photographische Korrespondenz, Nr. 8 (1928), S. 231.

[4] *Brockes, K.*: a) Vertikal. Temp.-Gradient u. terr. Refraktion insbes. im Hochgebirge. Diss. Univ. Berlin 1939, S. 58. b) Eine Methode zur Beobachtung des vertikal. Dichte- u. Temp.-Gefälles in den bodenfernen Atmosphären. Meteorol. Z. 1940, Heft 1, S. 23, 24.

[5] *Brucklacher, W.*: Horizontbilder und ihre Verwendung. Bildmess. u. Luftbildm. XV., (1940), S. 62.

[6] *Finsterwalder, R.*: Über Art und Genauigkeit von trigon. bestimmten Höhen, ZfV. 1951 Heft 5, S. 136.

[7] *Finsterwalder, S.*: Zum 75. Geburtstage, Verlag Herbert Wichmann Berlin, 1937, S. 36.

[8] *Gast, P.*: Die hypothesenfreie Bestimmung der Erdfigur mit neuen Hilfsmitteln. Z. f. Geophysik, 9. Jahrg. (1933), S. 189.

[9] *Goerz, C. P.*: Optische Anstalt, Berlin Friedenau, Deutsches Reichspatent Nr. 364742 Lufttopographisches Verfahren, Patent vom 13. August 1919.

[10] *Jordan, Eggert*: a) Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd., 8. Aufl. (1935), S. 448. b) Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 9. Aufl. (1931), S. 455.

[11] *Killian, K.*: Zur analytischen Luftbildauswertung der Lagekoordinaten von signalisierten Punkten, deren Höhen terrestrisch bestimmt wurden. ÖZfV. Jg. 49 (1961), S. 148 u. S. 173 und Archives Internationales de Photogrammetrie, 1955 und Festschrift E. Doležal 1952.

[12] *Klingatsch, A.*: a) Über eine Erweiterung des Rückwärtseinschneidens, ÖZfV. 9. Jg. (1911), S. 212. b) Intern. Archiv f. Photogrammetrie 5 (1919), S. 253.

[13] *Kobold, F.*: a) Die Bestimmung der Lotabweichungskomp. im Merid. d. St. Gotthardtaus Höhenwinkelmessungen. Commission Geodésique Suisse 1951. b) Hohenwinkelmess., Lotabweichung u. Meereshöhen, ZfV. 1955, S. 260.

[14] *Krames, J.*: Elementargeometrischer Nachweis des „gefährlichen“ Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt. Elemente der Mathematik, X/5, 1955.

[15] *Láska, W.*: Über eine Erweiterung des Rückwärtseinscheidens. ZfV. 1900, S. 565.

[16] *Löschner, H.*: Über eine Erweiterung des Rückwärtseinscheidens. ZfV. Bd. XXX, 1901, S. 485.

[17] *Puller*: Trigonometrische Punktbestimmung (Erweiterung des Rückwärtseinscheidens), ZfV. 1902, S. 456.

[18] *Wunderlich, W.*: Über den gefährlichen Rückwärtseinschnitt. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 53 (1943), Heft 2, S. 41.

## Bekannschaft mit dem Aufsatzkreisel

Von *Erich Korschineck* und *Kornelius Peters*, Wien

Dem Institut für Landes- und Katastervermessung der Technischen Hochschule Wien wurde freundlicherweise ein Aufsatzkreisel GAK 1 mit adaptiertem T 16 von der Fa. *Wild* zur Verfügung gestellt.

Bereits 1912 wurde, den immer größer werdenden Ansprüchen des Markscheidewesens entsprechend, der erste Vermessungskreisel entwickelt. Zu dieser Zeit war der Kreiselkompaß für Navigationszwecke schon in allgemeiner Verwendung. Damit war ein zwar schweres und unhandliches, aber zum unabhängigen Richtungsanschluß geeignetes Gerät geschaffen, das eine Beziehung nach Astronomisch-Nord ermöglichte. Erst nach 1945 nahm aber die Entwicklung des Vermessungskreisels solche Fortschritte, daß er zweckmäßig für praktische Arbeiten eingesetzt werden konnte. 1960 brachte die Konstruktion des Aufsatzkreisels die Befreiung von der Belastung des hohen Instrumentengewichtes und der einseitigen Verwendbarkeit.

Eine eingehende Beschreibung des Kreiselprinzipes sowie eine ausführliche Literaturangabe enthält [1], die Methodik der Messung mit dem GAK 1 wird in [2] behandelt, so daß sich unser Bericht auf die Erfahrungen, die wir bei einem kurzen Gebrauchstest sammeln konnten, beschränken kann.

Der erste Eindruck ist die überraschende Handlichkeit des Gerätes. Nur 1,8 kg wiegt der Kreiselaufsatz, der sich mit wenigen Manipulationen auf jeden Wild-Theodoliten montieren läßt. Die Aufsatzbrücke läßt sich auch nachträglich noch auf die Modelle anbringen. Auch mit aufgesetztem Kreisel kann der Theodolit in gewohnter Weise gehandhabt werden. Muß kein geographisches Azimut mehr bestimmt werden, wird der Kreisel mit einem einfachen Handgriff abgenommen. Die Ausrüstung vervollständigt ein Konverter, der zusammen mit der Batterie in einem tragbaren Gehäuse von Handtaschenformat untergebracht ist. Er liefert die Energie zum Betrieb des mit 24.000 Umdrehungen/min rotierenden Kreisels. Die Einfachheit der Bedienung wird durch die kurzen Einschulungszeiten unterstrichen. Ein Test mit Studenten zeigte, daß ein im Umgang mit geodätischen Geräten geübter Beobachter in einem halben Tag das Gerät und in zwei Tagen alle Meßmethoden vollkommen beherrschen kann.