



Wird die Genauigkeit von Einzelmodellauswertungen durch die rechnerische Transformation der Maschinenkoordinaten beeinträchtigt?

Josef Kovarik ¹

¹ *B. A. für Eich- u. Verm., 1080 Wien, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **54** (5), S. 146–157

1966

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Kovarik_VGI_196611,  
  Title = {Wird die Genauigkeit von Einzelmodellauswertungen durch die  
          rechnerische Transformation der Maschinenkoordinaten beeintr{\a}chtigt?},  
  Author = {Kovarik, Josef},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {146--157},  
  Number = {5},  
  Year = {1966},  
  Volume = {54}  
}
```



Wird die Genauigkeit von Einzelmodellauswertungen durch die rechnerische Transformation der Maschinenkoordinaten beeinträchtigt?

Von *Josef Kovarik*, Wien

In der Photogrammetrie werden bei Einzelmodellauswertungen an Analoggeräten die Maschinenkoordinaten bekanntlich in ein durch Paßpunkte gegebenes System übergeführt.

Eine Möglichkeit, solche Transformationen rechnerisch durchzuführen, besteht darin, mit Hilfe einer bestimmten Anzahl gemeinsamer Punkte die wahrscheinlichsten Werte für die Verschiebung des Ursprunges, für den Maßstabsfaktor und für die gegenseitige Verdrehung zwischen Maschinen- und Paßpunktsystem zu ermitteln. Man bezeichnet eine solche Umrechnung als konforme oder auch Helmert-Transformation.

Die folgenden Überlegungen gehen von der Tatsache aus, daß bei einer solchen Einpassung nicht nur die zufälligen Fehler in den Maschinenkoordinaten, sondern auch die Fehler der Paßpunkte zutage treten. Je mehr gemeinsame Punkte aber für die Bestimmung der Transformationselemente herangezogen werden, umso größer wird die Wahrscheinlichkeit für eine optimale Anpassung an alle Punkte in dem zu bearbeitenden Raum.

Aus den nach der Einpassung übrig bleibenden Fehlern der gemeinsamen Punkte wird bekanntlich der mittlere Fehler der Transformation m_0 berechnet. Nicht dessen absolute Größe soll aber jetzt unter die Lupe genommen werden. Es soll vielmehr zuerst untersucht werden, wie dieser Fehler über den zu bearbeitenden Raum verteilt ist, mit anderen Worten, ob alle umzuformenden Punkte dieselbe Transformationsgenauigkeit haben, ob sie also homogen sind oder nicht. Dabei werden die Voraussetzungen zu einer günstigen Einpassung dargelegt (Lage und Anzahl der gemeinsamen Punkte) und schließlich die Möglichkeit diskutiert, den aus dem Einpaßfehler resultierenden Einfluß so weit wie möglich herabzudrücken, vor allem aber im gesamten, zu bearbeitenden Raum gleich groß zu erhalten.

Wenn auch bei diesen Überlegungen alle anderen Fehlereinflüsse photogrammetrischer Auswertungen nicht behandelt werden, so ist am Ende doch eine Genauigkeitssteigerung der auf photogrammetrischem Wege bestimmten Punktkoordinaten zu erwarten, bringt doch jede Reduzierung eines Fehlereinflusses eine Verminderung des Gesamtfehlers!

Die Maschinenkoordinaten der beiden Systemen gemeinsamen Punkte seien x, y , auf deren Schwerpunkt reduziert heißen sie x_r, y_r . Die Koordinaten der zu transformierenden Punkte seien \bar{x} und \bar{y} .

Die Soll-System-Koordinaten, etwa im Landessystem, heißen X, Y , auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte reduziert X_r, Y_r und die aus der Transformation sich ergebenden Koordinaten der gemeinsamen Punkte im Soll-System seien X', Y' .

Die allgemeinen Transformationsformeln lauten

$$Y = a\bar{y} - b\bar{x} + c_y \text{ und } X = a\bar{x} + b\bar{y} + c_x$$

In der Praxis werden i. a. immer mehr als die unbedingt nötigen gemeinsamen Punkte zur Bestimmung der Unbekannten verwendet. Nimmt man n Punkte an, dann ergeben sich die Größen c_y , c_x , a und b auf Grund der Bedingung, daß die Quadratsumme der Koordinatenverbesserungen der gemeinsamen Punkte ein Minimum sei, zu

$$c_y = \frac{[Y] - a[y] + b[x]}{n}, \quad c_x = \frac{[X] - b[y] - a[x]}{n}$$

$$a = \frac{[Y_r y_r] + [X_r x_r]}{[y_r y_r] + x_r x_r}, \quad b = \frac{[X_r y_r] - [Y_r x_r]}{[y_r y_r] + x_r x_r}$$

Aus den Verbesserungen $v_y = Y - Y'$ bzw. $v_x = X - X'$ rechnet man bekanntlich den mittleren Fehler der Einpassung. Die Genauigkeit, mit der die vier unbekannt Transformationselemente bestimmt werden, läßt sich mit Hilfe der Gewichtskoeffizienten ermitteln.

Wie groß ist nun aber der aus der Transformation folgende mittlere (totale) Punktlagefehler eines an beliebiger Stelle gelegenen Punktes?

Es ist $m_p^2 = m_X^2 + m_Y^2$. Da X und Y Funktionen der Unbekannten von der Form

$$X = f(c_x, a, b), \quad Y = g(c_y, a, b)$$

sind, erhält man, entsprechend der allgemeinen Formel $m_F = m_0 \sqrt{Q_{FF}}$,

$$m_X = m_0 \sqrt{Q_{XX}} \quad \text{und} \quad m_Y = m_0 \sqrt{Q_{YY}}.$$

Setzt man die obigen Funktionen in die allgemeine Form

$$F = \alpha \cdot c_y + \beta \cdot c_x + \gamma \cdot a + \delta \cdot b,$$

so kann man schreiben: $Q_F = f_{c_y} \cdot Q_{c_y} + f_{c_x} \cdot Q_{c_x} + f_a \cdot Q_a + f_b \cdot Q_b$, wobei

$$f_{c_y} = \frac{\partial F}{\partial c_y} \dots \dots \dots \quad \text{und} \quad f_b = \frac{\partial F}{\partial b} \text{ ist.}$$

Mit Hilfe der Tienstraschen Merkregel*) ergibt sich nun

$$Q_{FF} = f_{c_y}^2 \cdot Q_{c_y} + f_{c_x}^2 \cdot Q_{c_x} + f_a^2 \cdot Q_{aa} + f_b^2 \cdot Q_{bb} + 2 f_{c_y} f_{c_x} Q_{c_y c_x} +$$

$$+ 2 f_{c_y} f_a Q_{c_y a} + 2 f_{c_y} f_b Q_{c_y b} + 2 f_{c_x} f_a Q_{c_x a} + 2 f_{c_x} f_b Q_{c_x b} + 2 f_a f_b Q_{ab}.$$

Im Hinblick auf die oben angeführten Transformationsformeln hat man für

$$X \dots f_{c_y} = \theta \quad f_{c_x} = 1 \quad f_a = x \quad f_b = y$$

$$\text{und für } Y \dots f_{c_y} = 1 \quad f_{c_x} = \theta \quad f_a = y \quad f_b = -x.$$

Damit ergibt sich

$$Q_{XX} = Q_{c_x c_x} + x^2 Q_{aa} + y^2 Q_{bb} + 2x Q_{c_x a} + 2y Q_{c_x b} + 2xy Q_{ab} \quad \text{und}$$

$$Q_{YY} = Q_{c_y c_y} + y^2 Q_{aa} + x^2 Q_{bb} + 2y Q_{c_y a} - 2x Q_{c_y b} - 2xy Q_{ab}.$$

*) Tienstra, Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1934.

Das Normalgleichungssystem für die in der Reihenfolge c_y, c_x, a, b geordneten Unbekannten lautet in schematischer Schreibweise für n gemeinsame Punkte bekanntlich:

$$\begin{array}{cccc}
 +n & \theta & +[y] & -[x] \\
 & +n & +[x] & +[y] \\
 & & \underline{[yy + xx]} & \theta \\
 & & & \underline{[yy + xx]}
 \end{array}$$

Nun kann die Auflösung dieser Normalgleichungen ja so vorgenommen werden, daß man sowohl die Unbekannten, als auch die Gewichtskoeffizienten gleichzeitig erhält, wenn man z. B. nach dem Schema von Gruber vorgeht oder nach der Cholesky-Methode. Man erhält dann ohne sonderlichen Aufwand die Q -Werte, die, der oben genannten Reihenfolge der Unbekannten entsprechend, die Form haben:

$$\begin{array}{cccc}
 Q & \dots\dots\dots c_y & \dots\dots\dots c_x & \dots\dots\dots a & \dots\dots\dots b \\
 \vdots & & & & \\
 c_y & \frac{1}{n} \frac{[yy + xx]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & \emptyset & -\frac{1}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & \frac{1}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]} \\
 c_x & \emptyset & \frac{1}{n} \frac{[yy + xx]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & -\frac{1}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & -\frac{1}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} \\
 a & -\frac{1}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & -\frac{1}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & \frac{1}{[y_r y_r + x_r x_r]} & \emptyset \\
 b & \frac{1}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & -\frac{1}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} & \emptyset & \frac{1}{[y_r y_r + x_r x_r]}
 \end{array}$$

wobei $[y_r y_r + x_r x_r] = [yy + xx] - \frac{[y][y]}{n} - \frac{[x][x]}{n}$ jene Summenglieder sind, die mit den auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte reduzierten Koordinaten zu bilden sind.

Setzt man die so bestimmten Koeffizienten in die Formeln für Q_{XX} beziehungsweise für Q_{YY} ein

$$\begin{aligned}
 Q_{XX} &= \frac{1}{n} \frac{[yy + xx]}{[y_r y_r + x_r x_r]} + \frac{x^2}{[y_r y_r + x_r x_r]} + \frac{\eta^2}{[y_r y_r + x_r x_r]} - \\
 &\quad - \frac{2x}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]} - \frac{2\eta}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} \\
 Q_{YY} &= \frac{1}{n} \frac{[yy + xx]}{[y_r y_r + x_r x_r]} + \frac{\eta^2}{[y_r y_r + x_r x_r]} + \frac{x^2}{[y_r y_r + x_r x_r]} - \\
 &\quad - \frac{2\eta}{n} \frac{[y]}{[y_r y_r + x_r x_r]} - \frac{2x}{n} \frac{[x]}{[y_r y_r + x_r x_r]},
 \end{aligned}$$

bringt auf gemeinsamen Nenner und reduziert alle Koordinaten auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte, so erhält man schließlich

$$Q_{XX} = \frac{1}{n} + \frac{(x - [x]/n)^2 + (y - [y]/n)^2}{[y_r y_r + x_r x_r]}$$

und

$$Q_{YY} = \frac{1}{n} + \frac{(x - [x]/n)^2 + (y - [y]/n)^2}{[y_r y_r + x_r x_r]} \quad \dots (1)$$

Der mittlere Punktlagefehler eines transformierten Punktes ergibt sich damit an Hand von $m_P^2 = m_X^2 + m_Y^2 = m_0^2 \cdot Q_{XX} + m_0^2 \cdot Q_{YY}$

$$\text{zu} \quad m_P^2 = m_0^2 \left[\frac{2}{n} + \frac{2(x_r^2 + y_r^2)}{[y_r y_r + x_r x_r]} \right] \quad \dots (2)$$

(Zu dieser Formel gelangt man natürlich auch, wenn man vom allgemeinen Ansatz für das Funktionsgewicht

$$1/P_f = f_1^2/[aa] + (f_2 \cdot 1)^2/[bb \cdot 1] + (f_3 \cdot 2)^2/[cc \cdot 2] + \dots$$

ausgeht und entsprechend entwickelt.)

Drückt man m_P in Einheiten von m_0 aus und setzt für die Entfernung des laufenden Punktes (x, y) vom Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte s_r , dann ist der mittlere Punktlagefehler

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{2 s_r^2}{[y_r y_r + x_r x_r]}} \quad \dots (3)$$

Daraus erkennt man, daß die Genauigkeit eines transformierten Punktes abhängig ist von der Anzahl n der gemeinsamen Punkte, von der Entfernung dieser gemeinsamen Punkte von deren Schwerpunkt und schließlich von der Entfernung des umzuformenden Punktes von diesem Schwerpunkt.

Zieht man daher Kreise um den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte, so sind dies die geometrischen Örter der Punkte mit gleicher Genauigkeit.

Diese Erkenntnis soll nun an Hand von einigen Überlegungen erläutert werden. Dazu werden der Reihe nach 3, 4 usw. bis 10 gemeinsame Punkte angenommen, die aber immer so liegen sollen, daß ihr jeweiliger Schwerpunkt ungefähr in die Mitte des zu bearbeitenden Raumes fällt und der Abstand der einzelnen gemeinsamen Punkte von diesem Schwerpunkt jeweils ungefähr gleich groß sein soll.

Zum Beispiel sollen 4 gemeinsame Punkte die in Abb. 1 dargestellte Verteilung haben.

Für einen umzuformenden Punkt in unmittelbarer Nähe des Schwerpunktes S hat man gemäß Formel (3) einen mittleren Punktlagefehler von $\pm 0,71$ zu erwarten, für einen Punkt in $r/4$ hat man $\pm 0,73$ zu erwarten, für einen Punkt in $r/2 \dots \pm 0,79$, für einen Punkt in $3r/4 \dots \pm 0,88$, in der durchschnittlichen Entfernung der gemeinsamen Punkte r muß man mit $\pm 1,0$ rechnen und schließlich für einen Punkt in $5r/4$ mit $\pm 1,13$.

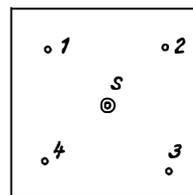


Abb. 1

Berechnet man so die μ -Werte für die oben genannten Fälle, auf die Entfernung r als Einheit bezogen, dann erhält man die in Abb. 2 dargestellten Kurven.

Aus dieser Darstellung ist zu erkennen: 1. Der aus der Transformation zu erwartende Punktlagefehler ist grundsätzlich keine sich über den gesamten Arbeitsraum erstreckende Konstante, 2. die Genauigkeit der Umrechnung ist umso größer, je weiter die gemeinsamen Punkte gegen den Rand des Arbeitsraumes zu liegen, 3. erst bei 4 gemeinsamen Punkten übersteigen alle umzuformenden Punkte innerhalb des durch die gemeinsamen Punkte zu legenden Kreises genauigkeitsmäßig den Einheitswert des Fehlers nicht mehr, 4. ein gemeinsamer Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt, ist zwar für die in der Mitte gelegenen umzuformenden Punkte von Bedeutung, verliert aber seine Wirkung gegen den Rand des Arbeitsraumes zu, so daß schließlich nur mehr die in der Entfernung r vom Schwerpunkt liegenden gemeinsamen Punkte die Genauigkeit bestimmen (zum Beispiel in Abb. 2 die strichlierte Linie ... 5 Punkte = 4 + 1).

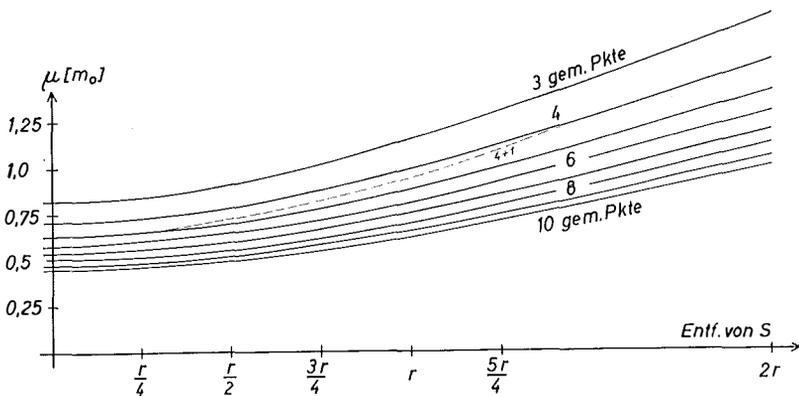


Abb. 2

Die Abb. 2 kann man daher auch dazu verwenden, um jene Anzahl von gemeinsamen, transformationswirksamen Punkten zu ermitteln, die, in einer gewissen Entfernung von der Arbeitsraummitte liegend, vorhanden sein müssen, wenn der mittlere, zu erwartende Punktlagefehler eines umzuformenden Punktes im gesamten Raum einen gewissen Teil des Einheitsfehlers m_0 nicht übersteigen soll. Wird also zum Beispiel gefordert, daß sämtliche Punkte nach der Transformation höchstens $\pm 0,8 m_0$ Fehler haben sollen, das wären 8 cm, wenn für $m_0 = 10$ cm errechnet wurde, und liegen die gemeinsamen Punkte in einer solchen durchschnittlichen Entfernung r vom Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte, daß mit $5r/4$ die Punkte am äußersten Rand erfaßt werden können, dann wären 8 gemeinsame, transformationswirksame Punkte vonnöten.

Die Abbildungen 3, 4 und 5 stellen jeweils die geometrischen Örter der Punkte mit gleichem μ dar, die, wie ja schon erwähnt, Kreise um den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte sind. Es wurden 4, dann 6 und schließlich 8 gemeinsame, regelmäßig verteilte Punkte in transformationsgünstiger Lage angenommen.

Dagegen zeigt Abb. 6 ein Beispiel einer ungünstigen Paßpunktverteilung: Wurde hier aus den Paßpunkten auch nur ein m_0 von 10 cm errechnet, so muß am

oberen Rand des Umrechnungsgebietes, allein aus der Transformation, schon ein mittlerer Punktlagefehler von ± 40 cm erwartet werden!

(Die Arbeitsräume wurden, im Hinblick auf die aus photogrammetrischen Senkrechtaufnahmen folgende Modellform, als Rechtecke angenommen.)

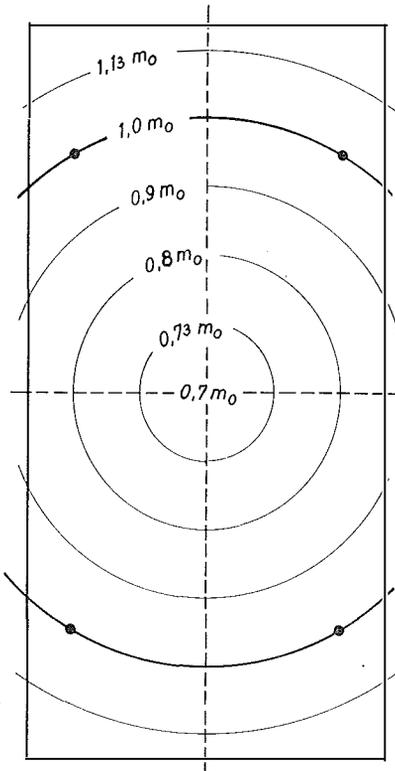


Abb. 3

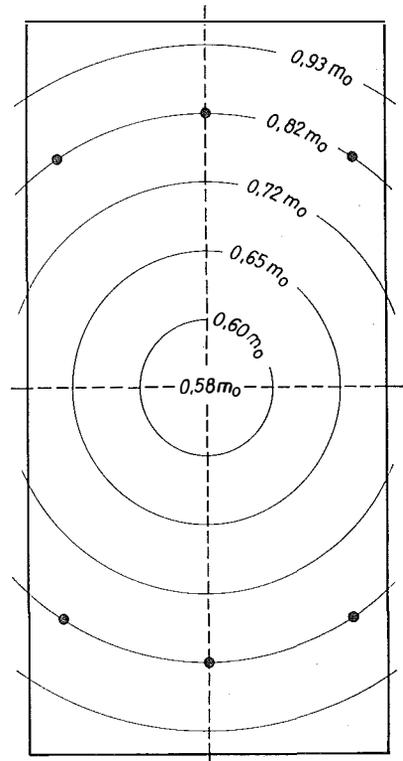


Abb. 4

1959–1965 hat die Commission C der OEEPE einen großangelegten Versuch (Reichenbach) unternommen, bei dem dieselben Unterlagen von 8 verschiedenen europäischen Zentren an verschiedenen Geräten ausgewertet worden sind. Die so erhaltenen Maschinenkoordinaten wurden dann in jedem Zentrum über dieselben Punkte in das System Reichenbach transformiert und schließlich wurden mit Hilfe der Differenzen (umgerechnete, photogrammetrische gegen terrestrische Koordinaten) mittlere Fehler berechnet. Deren Werte sind sodann getrennt, für Punkte innerhalb des Paßpunktraumes und für solche außerhalb, zusammengestellt worden. (Im Hinblick auf die Student'schen Überlegungen bezüglich der Genauigkeitsangaben soll erwähnt werden, daß die Anzahl der verwendeten Punkte jeweils genügend repräsentativ war.) Aus Filmaufnahmen haben sich im Durchschnitt 15 bzw. 19 Einheiten ergeben. Es waren 5 gemeinsame Punkte in einer solchen Verteilung vorgegeben, daß die μ -Werte für die Modellmitten, die durchschnittliche Paßpunktentfernung und die Modellecken mit etwa 0,63, 0,95 und 1,09 angesetzt werden können. Für den Bereich innerhalb der Paßpunkte kann man daher $\mu_i \approx 0,8$ nehmen,

für den außerhalb $\mu_a \approx 1,0$. Die oben mitgeteilten Größen entsprechen durchaus diesem Verhältnis, $15:19 \doteq 0,8:1,0$.

Für Plattenaufnahmen haben fünf andere Institute die entsprechenden Werte ermittelt. Es ergaben sich im Durchschnitt 10 Einheiten innerhalb und 12 Einheiten außerhalb, was auch wieder dem obigen Verhältnis entspricht.

Die eingangs gestellte Frage ist also beantwortet: Bei Einzelmodellauswertungen

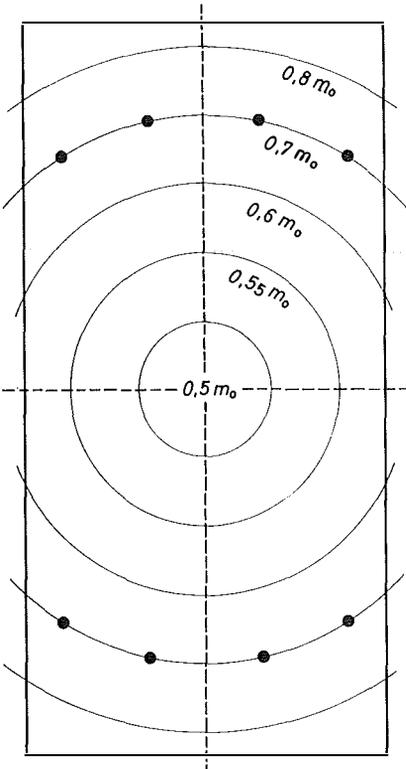


Abb. 5

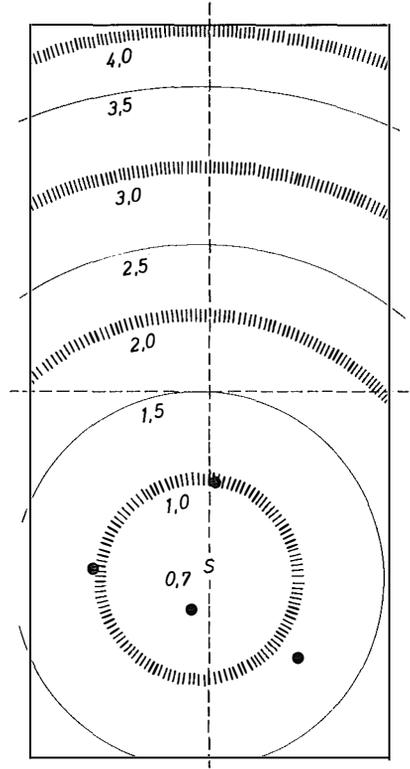


Abb. 6

ist die Transformationsgenauigkeit *keine* konstante Größe. Löst man sich von der bisherigen Vorstellung der Transformation im engeren Sinne des Wortes, als Einpassung mit Hilfe von Koordinaten gemeinsamer Punkte, und hält sich vor Augen, daß eine graphische Einpassung nichts anderes ist, ja daß bei jeder Einpassung in ein gegebenes Koordinatengitter im Prinzip dieselbe Aufgabe vorliegt, dann erkennt man die große Bedeutung, die einer richtigen Beurteilung der Verhältnisse bei diesem Problem zukommt.

Aus der Antwort auf die eingangs gestellte Frage ergibt sich aber sofort eine neue Frage: Wie könnte man die aus der Transformation sich ergebenden Koordinatenwerte im *gesamten* Arbeitsgebiet mit möglichst *gleicher* Genauigkeit erhalten?

Im allgemeinen steigert man die Genauigkeit bekanntlich durch Wiederholungen des Messungsvorganges. Das könnte wohl auch hier zu einer Verringerung des m_0 -Wertes führen, würde aber nicht über die Tatsache hinweghelfen, daß die Lage der umzuformenden Punkte in bezug auf den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte deren relative Genauigkeit bestimmt.

Daher liegt der Gedanke nahe, die zu bestimmenden Punkte aus zwei Auswertungen solcherart zu ermitteln, daß der mittlere Fehler des Mittelwertes in allen Punkten gleich groß ist, das heißt, daß eine Bestimmung mit der größeren Genauigkeit einer minder genauen gegenübergestellt wird und umgekehrt.

Diese Überlegungen führen zwangsläufig zu folgender Messungsanordnung: Zuerst wird das Gelände so aufgenommen, daß die A-Modelle lückenlos und möglichst regelmäßig aufeinanderfolgen, dann wird dasselbe Gelände mit K-Modellen überdeckt, die aber so gegen die A-Modelle verschoben und versetzt sein müssen, daß die Modellmitten der A-Räume in die Modellecken der K-Räume fallen, beziehungsweise die Ecken der A-Räume in die Mitten der K-Modelle.

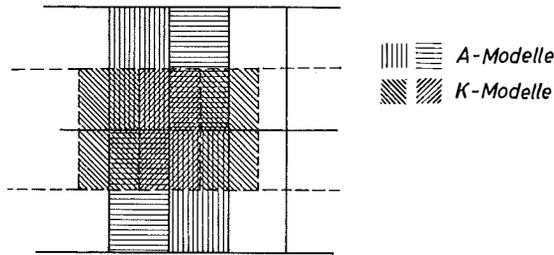


Abb. 7

Ein Punkt P hat daher aus der A-Modell-Transformation die Koordinaten $X_A Y_A$ (mit den Gewichten p_A) und aus der K-Modell-Transformation $X_K Y_K$ (mit den Gewichten p_K). Die Mittelwerte ergeben sich dann aus

$$X_m = \frac{p_A^x X_A + p_K^x X_K}{p_A^x + p_K^x}, \quad Y_m = \frac{p_A^y Y_A + p_K^y Y_K}{p_A^y + p_K^y}$$

In den Gleichungen (1) hat sich gezeigt, daß $Q_{XX} = Q_{YY}$ ist, daher wird

$$m_X = m_0 \sqrt{Q_{XX}} = m_0 \sqrt{Q_{YY}} = m_Y.$$

Es ist also

$$m_X^A = m_Y^A \quad \text{und} \quad m_X^K = m_Y^K \quad \dots (4)$$

daher auch $p_A^x = p_A^y = p_A$ und $p_K^x = p_K^y = p_K$.

Die Gewichte verhalten sich bekanntlich wie die Kehrwerte der mittleren Fehlerquadrate

$$p_A = \frac{\bar{m}^2}{m_A^2} = \frac{\bar{m}^2}{m_A^2} = \frac{2 \bar{m}^2}{m_p^2} \quad \text{und} \quad p_K = \frac{\bar{m}^2}{m_K^2} = \frac{\bar{m}^2}{m_K^2} = \frac{2 \bar{m}^2}{m_p^2}$$

und damit ergibt sich

$$X_m = \frac{m_p^{K2}}{m_p^{K2} + m_p^{A2}} X_A + \frac{m_p^{A2}}{m_p^{K2} + m_p^{A2}} X_K \quad \dots (5)$$

beziehungsweise

$$Y_m = \frac{m_p^{K2}}{m_p^{K2} + m_p^{A2}} Y_A + \frac{m_p^{A2}}{m_p^{K2} + m_p^{A2}} Y_K.$$

Schreibt man diese Koordinatenmittelwerte in die Form

$$X_m = K \cdot X_A + A \cdot X_K, \quad \text{bzw.} \quad Y_m = K \cdot Y_A + A \cdot Y_K \quad \dots (5a)$$

dann geben die Faktoren K und A die Anteile der A - bzw. K -Einzelwerte am Mittelwert an.

Bei X_A und X_K , ebenso wie bei Y_A und Y_K handelt es sich um eine zweimalige, unabhängige Bestimmung derselben Größe X bzw. Y . Daher ist

$$dX_m = K \cdot dX_A + A \cdot dX_K, \quad dY_m = K \cdot dY_A + A \cdot dY_K \quad \text{und}$$

$$m_{X_m}^2 = K^2 \cdot m_{X_A}^2 + A^2 \cdot m_{X_K}^2 \quad \text{bzw.} \quad m_{Y_m}^2 = K^2 \cdot m_{Y_A}^2 + A^2 \cdot m_{Y_K}^2.$$

Dann ist $M_m^2 = m_{X_m}^2 + m_{Y_m}^2 = K^2 \cdot (m_{X_A}^2 + m_{Y_A}^2) + A^2 \cdot (m_{X_K}^2 + m_{Y_K}^2)$.

Berücksichtigt man die Gleichungen (4), setzt für K bzw. A die sich aus (5) ergebenden Quotienten und schreibt der Einfachheit halber die Punktlagefehler in den K - bzw. A -Modellen in der Form m_K bzw. m_A , dann erhält man

$$M_m = \pm \frac{m_K \cdot m_A}{\sqrt{m_K^2 + m_A^2}} \quad \dots (6)$$

(Wie man sich leicht überzeugen kann, bringt die Gleichung (6) den bekannten, elementaren Satz zum Ausdruck, daß das Gewicht des Mittelwertes gleich ist der Summe der Einzelgewichte: bildet man nämlich die Reziprokwerte und quadriert, so erhält man $1/M_m^2 = 1/m_A^2 + 1/m_K^2$.)

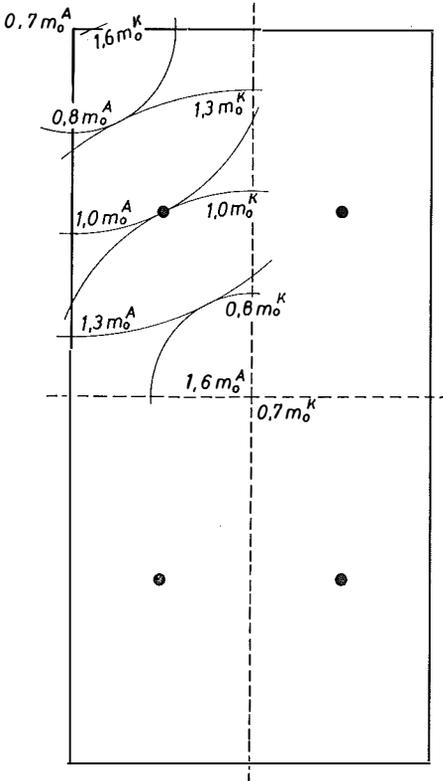


Abb. 8

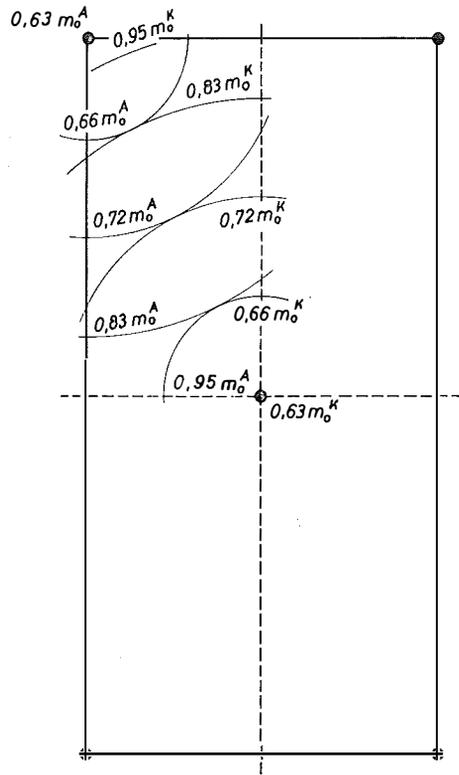


Abb. 9

Einige Beispiele sollen das obige Ergebnis nun erläutern. In Abb. 8 ist die Verteilung der Paßpunkte so gedacht, daß jeweils in der Mitte zwischen dem K -Modell-Zentrum und den ringsum liegenden A -Modell-Mitten gemeinsame Punkte liegen sollen, das wären in einem Modellraum also 4 gemeinsame Punkte. Die mittleren Fehler der umzuformenden Punkte liegen daher zwischen 0,7 und 1,6 (in m_0 -Einheiten) vom K -Zentrum zum K -Modellrand steigend und natürlich ebenso im A -Modell, da dieses ja dieselbe Paßpunktverteilung haben soll, vom Zentrum zum Modellrand steigend. Berechnet man jetzt die Werte der mittleren Punktlagefehler der aus den K - und aus den A -Werten gebildeten Mittel (wegen der Symmetrie genügt dies für ein Modellviertel), so erhält man Wertepaare zwischen 1,6 m_K mit 0,7 m_A und 0,7 m_K mit 1,6 m_A . Im allgemeinen wird bei angenähert gleichen Verhältnissen $m_K \approx m_A = m_0$ sein. Damit ergeben sich Werte zwischen 0,65 und 0,78 (in m_0 -Einheiten), was im Mittel $M_m = \pm 0,71 m_0$, mit einer Schwankung von ca. 10%, entspricht.

Eine andere Möglichkeit wäre die, sowohl in den K - als auch in den A -Räumen jeweils in der Mitte einen Paßpunkt so zu bestimmen, daß der aus dem A -Raum auch noch im K -Modell brauchbar wäre und umgekehrt. Es würde sich damit die in Abb. 9 dargestellte Verteilung der gemeinsamen Punkte ergeben. Die dafür aus Abb. 2 zu entnehmenden mittleren Lagefehler der umzuformenden Punkte steigen von 0,63 in der Modellmitte bis auf 0,95 in den Modellecken an. Das Zusammenreffen der K - und der A -Lagefehler im Modell ist an Hand der zonenweise eingetragenen Werte zu ersehen.

Berechnet man auch hier, wieder über ein Modellviertel, die Punktlagefehler der aus den K - und den A -Werten gebildeten Mittel, dann erhält man Werte zwischen 0,51 und 0,55, so daß das Mittel $M_m = \pm 0,53$, mit nur $\pm 5\%$ Streuung, praktisch als über den ganzen Raum konstant angesehen werden kann! (Die Einheit ist natürlich auch hier das m_0 , so daß zum Beispiel $M_m = \pm 5$ cm ist, wenn für die m_0 -Einheit 10 cm errechnet wurden.)

Vergleicht man die beiden in Figur 8 bzw. 9 dargestellten Beispiele, so wird vor allem eine, vielleicht nur gefühlsmäßig vorhandene Meinung widerlegt, daß nämlich der Fall mit der größeren Paßpunktdichte unbedingt auch bessere Ergebnisse liefern müsse!*) Für ein Gebiet, das beispielsweise mit 10 Streifen zu je 10 Modellen einfach gedeckt werden könnte, würden im einen Fall (Abb. 8) 484 gemeinsame Punkte benötigt werden, im zweiten Fall (Abb. 9) aber nur 265! Und trotz dieser wesentlich geringeren Paßpunktdotation ließe die zweite Disposition ein merklich besseres Ergebnis erwarten!

Mit dieser Feststellung tritt ganz klar die große Bedeutung zutage, die der Auswahl der für die Transformation zu verwendenden Paßpunkte hinsichtlich deren Lage und Anzahl zukommt!

*) Bezeichnet m die Anzahl der Modelle und n die Anzahl der Streifen, dann enthält ein geschlossenes, regelmäßig begrenztes Gebiet bei einfacher Deckung $n \cdot m$ Modelle (= A -Räume) und daher $(n + 1) \cdot (m + 1)$ K -Modelle. Das Beispiel Abb. 8 erfordert daher $4 \cdot (n + 1) \cdot (m + 1)$ Paßpunkte, während für das Beispiel Abb. 9 nur etwa die Hälfte davon benötigt wird, und zwar $(m + 1) \cdot (n + 1) + (m + 2) \cdot (n + 2) \doteq 2mm + 3m + 3n$.

Soweit man bei diesem Problem eine Planung nicht nur vornehmen, sondern diese dann auch einhalten kann, wird man die in der halben Entfernung zwischen Modellmitte und den Modellecken verlaufende Zone als Kriterium für die angestrebte Genauigkeit ansehen können: dort wird $M_m \doteq \frac{m}{\sqrt{2}}$. Damit wäre die im A - bzw. K -Raum benötigte Genauigkeit genähert festgelegt. Und nun wäre durch überlegte Auswahl der Paßpunkte danach zu trachten, diese Transformationsgenauigkeit mit einem Minimum an terrestrisch einzumessenden Punkten zu erreichen!

Eine derartige Bearbeitung wird daher im allgemeinen natürlich nur dort möglich sein, wo entweder die Paßpunktmessung erst nach der Befliegung vorgenommen wird, oder das Feld der gegebenen Punkte so dicht ist, daß nur eine Auswahl der günstigst gelegenen vorzunehmen ist.

Kann man dann annehmen, daß einerseits die terrestrischen Werte aller Paßpunkte mit annähernd gleicher Genauigkeit bestimmt worden sind und andererseits auch die Modellauswertungen immer dieselbe Qualität haben, dann wird auch der mittlere Einheitsfehler m_0^K etwa gleich $m_0^A (= m_0)$ sein. Daher kann man die durch die Paßpunktlage gegebenen μ -Werte (Formel 3) zuerst mit Hilfe der Abb. 2 bestimmen und im Anschluß daran mit Hilfe der in Abb. 10 dargestellten Kurven die Punktlagegenauigkeit der Mittelwerte an allen Orten des Arbeitsraumes feststellen.

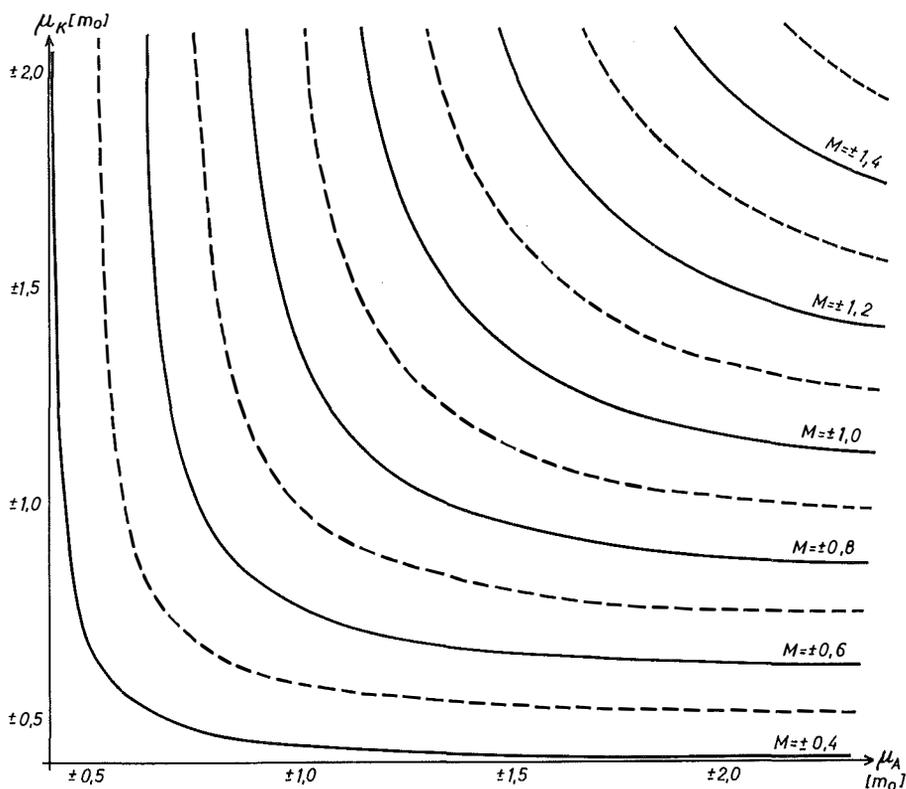


Abb. 10

Ein ungünstiger, aber in der Praxis nicht zu umgehender Fall soll noch als Beispiel behandelt werden. Im A -Modell (Abb. 11) erstreckt sich über den Großteil der oberen Hälfte ein Waldgebiet ohne akzentuierte Punkte. An Paßpunkten für die Transformation konnten nur 1, 2 und 3 in der unteren Modellhälfte sowie 4 in der linken, oberen Ecke ermittelt werden. In jenem K -Modell, das das linke, obere Viertel des A -Raumes überdeckt, sind der Punkt 4 des A -Modelles und die Punkte 5, 6, 7 Transformationspaßpunkte. Sowohl im A - als auch im K -Raum stehen also 4 gemeinsame Punkte zur Verfügung. Trotzdem ergibt sich für die aus der Transformation zu erwartende Genauigkeit ein großer Unterschied: im K -Raum ($m_0 = \pm 10$ cm angenommen) steigt der Wert von ± 7 cm (in der Mitte) auf ± 34 cm am Rand, während im A -Raum, durch Punkt 4 bedingt, eine wesentlich geringere Zunahme des Fehlers zu erwarten ist, nämlich von ± 10 cm auf ± 20 cm am oberen Rand ($m_0 = \pm 14$ cm angenommen).

Die Punktlagegenauigkeit der im Gemeinsamkeitsbereich gelegenen Punkte ist nach der Mittelbildung natürlich auch hier besser geworden. Sie schwankt zwischen ± 8 cm und ± 12 cm. Aber sie hat doch nicht die erwünschte Homogenität, denn die Streubreite ist wesentlich größer, als etwa im Beispiel Abb. 9.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die Anordnung von Koordinatentransformationen in diesem Fall nach zwei Gesichtspunkten vorzunehmen

ist: erstens soll allgemein durch die Auswahl sicherer, eindeutiger und gut gelegener Paßpunkte der zu erwartende Punktlagefehler möglichst klein werden und zweitens soll (bei zweimaliger, versetzter bzw. verschobener Aufnahme des Geländes) die Paßpunktanordnung über alle Modelle hinweg möglichst gleichartig sein, um ein Maximum an Homogenität in der Punktlage der Mittelwerte zu geben. Mathematisch formuliert heißt das, die Paßpunktverteilung ist so vorzunehmen, daß die Punktlagefehler der zwischen K - und A -Werten gemittelten Koordinaten, unabhängig von ihrer Lage, überall gleich groß sind. Das ist dann der Fall, wenn die Summe aus K -Modell-Gewicht und A -Modell-Gewicht konstant ist.

Die Behandlung weiterer, damit zusammenhängender Fragen (u. a. auch bezüglich der Verhältnisse bei affiner Transformation) bleibt einer anderen Veröffentlichung vorbehalten.

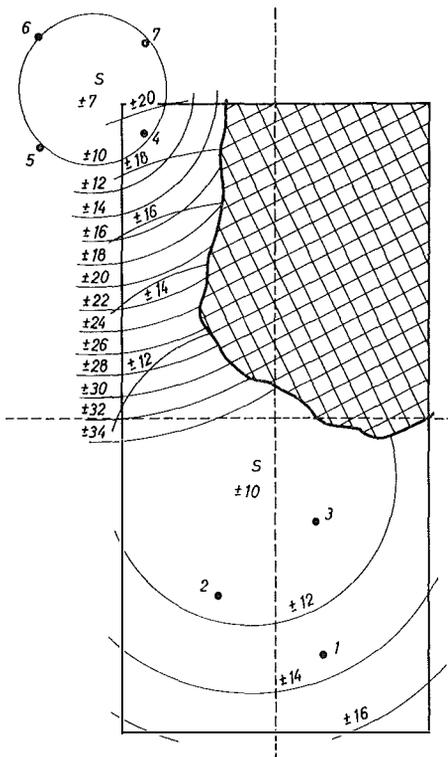


Abb. 11