

Paper-ID: VGI\_196610



## Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen

Gerhard Brandstätter <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 8010 Graz, Klosterwiesgasse 19

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **54** (5), S. 137–145

1966

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_196610,  
Title = {Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher  
Orientierungsmatrizen},  
Author = {Brandstätter, Gerhard},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {137--145},  
Number = {5},  
Year = {1966},  
Volume = {54}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,  
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und  
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende Oktober 1966

54. Jg.

---

## Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen

Von *Gerhard Brandstätter*, Graz

### 0. Einleitung

Unter Orientierungsmatrizen sind nach [1] räumliche Drehmatrizen zu verstehen, welche die Orientierung von Richtungsbündeln im Raume gegenüber einem festen, einheitlichen Koordinatensystem beschreiben. Da mit jedem Richtungsbündel stets ein orthogonales Dreibein fest verbunden ist, in welchem die relative Lage der Bündelstrahlen durch orthogonale oder sphärische Koordinaten angegeben wird, kann die Orientierung durch Angabe der Lage dieses Dreibeins gegenüber dem festen Koordinatensystem erhalten werden, wozu drei Richtungsparameter (Drehwinkel) notwendig sind.

Der Aufbau einer Orientierungsmatrix aus diesen drei Parametern wird gewöhnlich anhand der geordneten Multiplikation dreier aus je einem Parameter gebildeten ebenen Drehmatrizen gezeigt ([2], [3]). In [4] wird dasselbe mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie ausgeführt. Eine dritte Möglichkeit, bei der eine Richtung des Dreibeins durch zwei Parameter festgelegt ist, wird in [5] (Seite 4) angedeutet. Hierauf soll im folgenden weiter eingegangen werden, da dieser Weg besonders anschaulich und vollkommen analog dem Aufnahme- bzw. Beobachtungsvorgang ist.

### 1. Allgemeine Betrachtung

Wie üblich ([2]) wird das zum rechtsdrehenden Landessystem parallele Dreibein im Aufnahmeort durch die Einheitsvektoren  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  bezeichnet. In diesem örtlichen System kann ein Einheitsvektor  $k$ , welcher der Beobachtungsrichtung entgegengesetzt sein soll, durch die Angabe zweier rechtssinniger Richtungsparameter

$\alpha_1$  und  $\alpha_2$  festgelegt werden. Die Komponenten dieses Einheitsvektors, die seinen Richtungscosinus  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gleich sind, werden somit aus

$$\begin{aligned} k_1 &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 \\ k_2 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2 \\ k_3 &= \cos \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

erhalten. Zur Darstellung der anderen beiden Richtungen des mit dem Bündel verbundenen Dreibeins (Fadenkreuz, Achsen des Bildkoordinatensystems) werden zwei zu  $\mathbf{k}$  normal stehende Einheitsvektoren

$$\mathbf{k}'' = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{k})}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{k}|} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}'' \times \mathbf{k} \quad \dots (1.2)$$

eingeführt, wobei  $\mathbf{k}'$  in der Ebene durch  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{k}''$  in der Ebene durch  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  liegt (Abb. 1). Aus (1.2) werden die Komponenten mit

$$\begin{aligned} k_1'' &= -\sin \alpha_2 & k_1' &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ k_2'' &= \cos \alpha_2 & k_2' &= \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ k_3'' &= 0 & k_3' &= -\sin \alpha_1 \end{aligned} \quad \dots (1.3)$$

erhalten. Zwei zueinander normale Vektoren  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  sind gewöhnlich um den Winkel  $\alpha_3$  gegen  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$  verdreht (Abb. 1), wobei  $\alpha_3$  positiv zu zählen ist, wenn  $\mathbf{k}'$  im

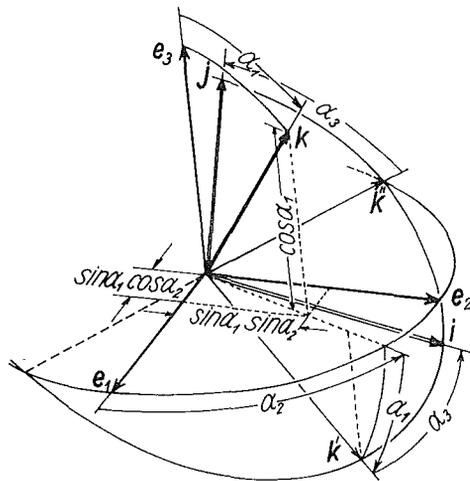


Abb. 1

Sinne einer Rechtsdrehung in  $\mathbf{i}$  übergeht.  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$  geben die Lage des Bildkoordinatensystems oder Fadenkreuzes an, wenn keine Verdrehung  $\alpha_3$  vorliegt. Die vier Vektoren sind komplanar, also linear voneinander abhängig, woraus wegen  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{j} = \cos \alpha_3$ ,  $-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{i} = \sin \alpha_3$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{k}' \cos \alpha_3 + \mathbf{k}'' \sin \alpha_3 \\ \mathbf{j} &= -\mathbf{k}' \sin \alpha_3 + \mathbf{k}'' \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad \dots (1.4)$$

folgt. Durch Einsetzen der Komponenten (1.3) in das System (1.4) werden die Komponenten von  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 \\ i_2 &= \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2 \quad \dots (1.5) \\ i_3 &= -\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_1 &= -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 \\ j_2 &= -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2 \quad \dots (1.6) \\ j_3 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Die Vektoren  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$  müssen nicht unbedingt nach den Formeln (1.2) berechnet werden. Sie lassen sich einerseits leicht aus der Anschauung anschreiben, andererseits ergeben sie sich ([1], [6]) aus den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha_2} = \cos \alpha_1 \begin{pmatrix} -\sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha_1 \cdot \mathbf{k}''$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha_1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \mathbf{k}'. \quad \dots (1.7)$$

Sie können daher auch als Tangentenvektoren an die Parameterlinien  $\alpha_1 = \text{const.}$  und  $\alpha_2 = \text{const.}$  auf der Einheitskugel interpretiert werden, die mit dem Vektor  $\mathbf{k}$  ein Koordinatensystem aufspannen, das dem Horizontsystem der sphärischen Astronomie entspricht.

Ist  $\mathbf{p}$  der Ortsvektor eines Bildpunktes im Bildkoordinatensystem (Diapositivstellung) mit den Komponenten  $x, y, -c$  und  $\mathbf{p}_1$  derselbe Vektor im System  $\mathbf{e}_i$  mit den Komponenten  $u, v, w$ , dann gilt, wenn  $\mathbf{p}_1$  in das System  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  transformiert werden soll,

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i} = ui_1 + vi_2 + wi_3 \\ y &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{j} = uj_1 + vj_2 + wj_3 \\ -c &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} = uk_1 + vk_2 + wk_3 \end{aligned} \right\} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

bzw. 
$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \mathbf{p}_1 \quad \dots (1.8)$$

Die Vektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sind also die Zeilenvektoren der orthogonalen Drehmatrix  $\mathbf{R}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$  im Sinne einer Transformation vom Landessystem in das Beobachtungssystem.

Die gewöhnlich benötigte Drehmatrix im entgegengesetzten Sinne könnte in analoger Weise abgeleitet werden, indem die Vektoren  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit Hilfe der Drehungen  $\alpha_i$  im Beobachtungssystem ausgedrückt werden. Aus (1.8) folgt jedoch

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}$$

und, da die Inverse  $\mathbf{R}^{-1}$  einer orthogonalen Matrix  $\mathbf{R}$  gleich der Transponierten  $\mathbf{R}^T$  ist,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2 \\ i_3 j_3 k_3 \end{pmatrix}, \quad \dots (1.9)$$

worin die Vektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  nunmehr als Spaltenvektoren auftreten, während die Vektoren  $\mathbf{e}_i$ , ausgedrückt im Beobachtungssystem, gleich den Zeilenvektoren sein müssen.

Die Matrix  $\mathbf{R}$  muß positiv definit sein, d. h. ihre Determinante  $D = +1$ , da sie gleichsinnige Koordinatensysteme ineinander überführt. Das in der Geodäsie vorwiegend verwendete Landessystem der Gauß-Krügerschen Form ist aber ebenso wie das ortsfeste Äquatorsystem und das Horizontsystem der sphärischen Astronomie als linksdrehend anzusehen, entsprechend der Richtungsangabe im Uhrzeigersinn und der Höhenangabe entgegengesetzt zur Lotrichtung. Die Transformation vom rechtsdrehenden Beobachtungssystem in das linksdrehende Landessystem führt zu einer negativ definiten Matrix ( $D = -1$ ), die einfach durch Einführung des entgegengesetzten Vorzeichens bei den zweiten Komponenten der Vektoren  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$  (1.3) erhalten werden kann. Dies entspricht einer Spiegelung des Vektors  $\mathbf{e}_2$  an der Ebene durch  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_3$ .

## 2. Anwendung in der analytischen Photogrammetrie

Es ist prinzipiell gleichgültig, welche Drehwinkel der Aufstellung einer Orientierungsmatrix zugrundegelegt werden. Die numerischen Werte ihrer Elemente müssen stets die gleichen sein, unabhängig davon, wie die gegenseitige Orientierung der beiden orthogonalen Dreibeine erfolgt. Aus praktischen und konstruktiven Gründen werden jedoch gewisse Kombinationen von Orientierungswinkeln bevorzugt.

Die Lage einer Kamera kann unter anderem durch Angabe der Nadirdistanz  $v$  der Aufnahme richtung, des Azimutes  $\alpha$  der Ebene durch Lot und Aufnahme richtung und der Verkantung  $\varkappa$  in der Bildebene beschrieben werden. Dieser Bezeichnungswiese bedient sich bekanntlich die Theorie der Radialtriangulation. Die Elemente der damit verbundenen Orientierungsmatrix folgen aus (1.1), (1.5) und (1.6), wenn  $\alpha_1 = v$ ,  $\alpha_2 = \alpha$  und  $\alpha_3 = \varkappa$  gesetzt wird.

In Auswertegeräten, die auf der analogen Rekonstruktion des Aufnahmevorganges beruhen, werden Parameter entsprechend der Längsauslenkung  $\varphi$  und der Querauslenkung  $\omega$  der Aufnahmeachse während des Bildfluges und der Verkantung  $\varkappa$  für die Orientierung des Bildkoordinatensystems  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  gegenüber dem Maschinenkoordinatensystem  $\mathbf{e}_i$  verwendet. Da beide Koordinatensysteme entsprechend den internationalen Normen rechtsdrehend sind, kann die Orientierungsmatrix nur positiv definit sein. Erst bei Übergang in ein linksdrehendes Landessystem treten negativ definite Orientierungsmatrizen auf.

Weist die Primärachse des Aufhängekardanes der Kammer in die Richtung  $\mathbf{e}_1$  (Flugrichtung), dann ist die Querauslenkung  $\omega$ , weist sie in Richtung  $\mathbf{e}_2$ , dann ist die Längsauslenkung  $\varphi$  als Primärdrehung anzusehen. Im zweiten Falle ist der Vektor  $\mathbf{k}$  durch die Komponenten

$$k_1 = \sin \varphi \cos \omega, \quad k_2 = -\sin \omega, \quad k_3 = \cos \varphi \cos \omega$$

gegeben (Abb. 2 a). Die partielle Ableitung

$$\frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

liefert den Vektor  $\mathbf{k}'$ , während

$$-\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} = \mathbf{k}'' = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \omega \\ \cos \omega \\ \cos \varphi \sin \omega \end{pmatrix}$$

den Vektor  $\mathbf{k}''$  bestimmt.  $\mathbf{k}' \times \mathbf{k}'' = \mathbf{k}$  zeigt die Gleichsinnigkeit des verschwenkten Systems mit dem System  $\mathbf{e}_i$ . Mit Hilfe von (1.4) können nunmehr wegen  $\alpha_3 = \kappa$  die um  $\kappa$  gegen  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$  verkanteten Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  des Bildkoordinatensystems berechnet werden. Ihre Komponenten entsprechen den in [2] Seite 34 oder [5] Seite 6 angegebenen Matrixelemente  $i_i$  und  $j_i$ , auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird.

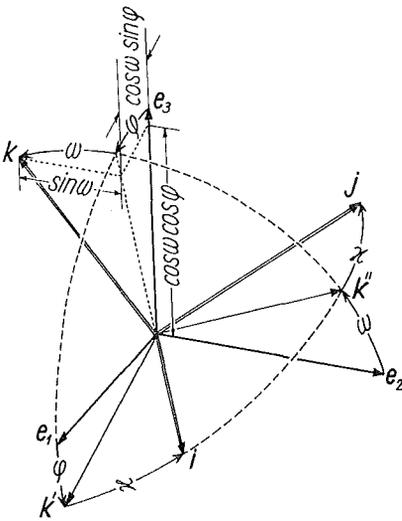


Abb. 2a

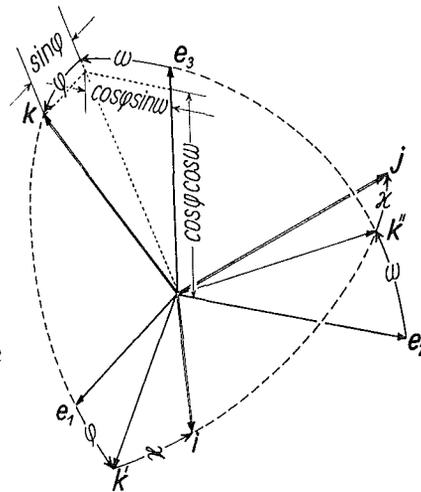


Abb. 2b

Mit  $\omega$  als Primärdrehung (Abb. 2b) hat  $\mathbf{k}$  die Komponenten

$$k_1 = \sin \varphi, \quad k_2 = -\cos \varphi \sin \omega, \quad k_3 = \cos \varphi \cos \omega,$$

$\mathbf{k}'$  folgt aus

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \omega \\ -\sin \varphi \cos \omega \end{pmatrix} = \mathbf{k}'$$

und  $\mathbf{k}''$  aus

$$-\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} = \mathbf{k}''.$$

Dieses System ist nun wieder zufolge (1.4) in der Ebene durch  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$  um  $\kappa$  zu verdrehen, womit die in [2] Seite 34 oder [5] Seite 7 angegebenen Elemente  $i_i$  und  $j_i$  erhalten werden.

In beiden Fällen muß die Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega}$  negativ genommen werden, da die Zählrichtung von  $\omega$  der Richtung des Vektors  $\mathbf{e}_2$ , der in der Ebene dieser Drehung liegt, entgegengesetzt ist.

### 3. Anwendung auf Drehungen in der Astrophotogrammetrie

Die Astrophotogrammetrie beschäftigt sich mit der Aufgabe, bewegte Objekte (Satelliten, Raketen, ballistische Flugkörper) gegen den Sternenhintergrund zu photographieren und auf diesem Wege die momentane Richtung zum beobachteten Objekt zu ermitteln. Diese durch Bildkoordinaten im Beobachtungssystem gegebene Richtung ist in ein übergeordnetes Koordinatensystem, das Horizont- oder Äquatorsystem zu übertragen. Wie die numerischen Elemente der hierzu notwendigen Orientierungsmatrix aus den Bildkoordinaten bekannter Sterne gewonnen werden, ist aus [1] zu entnehmen. Die Form dieser Elemente bei Verwendung von sphärischen Horizont- oder Äquatorkoordinaten soll hier abgeleitet werden.

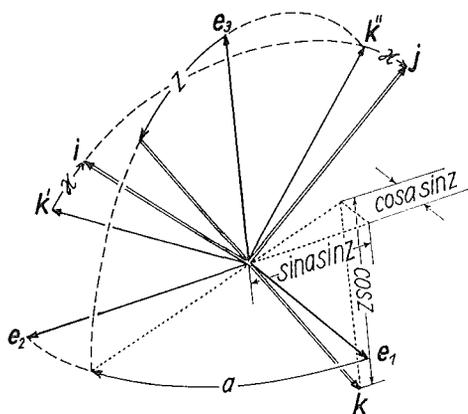


Abb. 3

Wird die Aufnahmerichtung in den Parametern  $\alpha$  (Nordazimut) und  $z$  (Zenitdistanz) des Horizontsystems angegeben, dann haben die Komponenten des Vektors  $\mathbf{k}$  die Form

$$k_1 = -\cos a \sin z, \quad k_2 = -\sin a \sin z, \quad k_3 = -\cos z \quad \dots \quad (3.1)$$

wobei  $\alpha$  im Sinne einer Linksdrehung von Nord ( $x$ -Richtung) nach Ost ( $y$ -Richtung) zu zählen ist (Abb. 3).

Aus der negativen Ableitung

$$-\frac{1}{\sin z} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial a} = \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt  $\mathbf{k}'$  und aus

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\cos a \cos z \\ -\sin a \cos z \\ \sin z \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor  $\mathbf{k}''$ . Mit der zusätzlichen Drehung  $\alpha_3 = \kappa$  zufolge (1.4) werden die Komponenten

$$\begin{aligned} i_1 &= -\sin \alpha \cos \kappa - \cos \alpha \cos z \sin \kappa \\ i_2 &= \cos \alpha \cos \kappa - \sin \alpha \cos z \sin \kappa \\ i_3 &= \sin z \sin \kappa \end{aligned} \quad \dots \quad (3.2)$$

und

$$\begin{aligned} j_1 &= \sin \alpha \sin \kappa - \cos \alpha \cos z \cos \kappa \\ j_2 &= -\cos \alpha \sin \kappa - \sin \alpha \cos z \cos \kappa \\ j_3 &= \sin z \cos \kappa \end{aligned} \quad \dots \quad (3.3)$$

erhalten. Die Elemente  $i_i$ ,  $j_i$  und  $k_i$  in (1.8) eingesetzt liefern eine wegen des Überganges vom rechtsdrehenden Bildkoordinatensystem ins linksdrehende Horizontsystem negativ definite Orientierungsmatrix. Die Orientierung des Strahlenbündels gegenüber einem ortsfesten Äquatorsystem (Stundenwinkel  $t$  und Deklination  $\delta$ ) folgt aus den Komponenten (3.1), (3.2) und (3.3), wenn  $\alpha$  durch  $t$  und  $z$  durch  $90 - \delta$  ersetzt wird.

Meist wird die Richtung zum bewegten Objekt zuerst in das auf den Frühlingspunkt bezogene himmelsfeste System  $(\alpha, \delta)$  transformiert ([1]), wobei die Orientierungsmatrix wegen der Gleichsinnigkeit von Bild- und himmelsfestem Äquatorsystem positiv definit ist, und anschließend zufolge  $t = \Theta - \alpha$  in das ortsfeste Äquatorsystem gebracht. Mit

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \delta \end{pmatrix}$$

folgen

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{\cos \delta} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}'' = -\frac{\partial \mathbf{k}'}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \delta \\ -\sin \alpha \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}$$

womit nach (1.4) die Komponenten

$$\begin{aligned} i_1 &= \sin \alpha \cos \kappa - \cos \alpha \sin \delta \sin \kappa \\ i_2 &= -\cos \alpha \cos \kappa - \sin \alpha \sin \delta \sin \kappa \\ i_3 &= \cos \delta \sin \kappa \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} j_1 &= -\sin \alpha \sin \kappa - \cos \alpha \sin \delta \cos \kappa \\ j_2 &= \cos \alpha \sin \kappa - \sin \alpha \sin \delta \cos \kappa \\ j_3 &= \cos \delta \cos \kappa \end{aligned}$$

berechnet werden können.

#### 4. Anwendung auf Drehungen in der Positionsastronomie

Messungen in der Positionsastronomie sind stets auf die Bestimmung horizontaler Richtungen  $R$ , die sich vom Azimut  $\alpha$  um eine additive Orientierungsunbe-

kannte  $o$  unterscheiden, und von Zenitdistanzen  $z$  beschränkt. Die Richtungscosinus einer Richtung  $\mathbf{s}_i$  zu einem Stern im Horizontsystem lauten dann

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} u_i = \cos(R_i + o) \sin z_i \\ v_i = \sin(R_i + o) \sin z_i \\ w_i = \cos z_i \end{pmatrix}$$

Hat der Beobachtungsstandpunkt die Breite  $\varphi$  und die Länge  $\lambda$ , d. h., daß  $\mathbf{e}_1$  in der Ebene des Meridians von Greenwich liegt, dann lauten sein Ortsvektor auf der Einheitskugel

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

die  $x$ -Achse des Horizontsystems ([6]), die nach Norden weist,

$$\mathbf{z}' = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \sin \varphi \\ -\sin \lambda \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und die  $y$ -Achse in Richtung Ost

$$\mathbf{z}'' = -\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \sin \lambda \\ -\cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Aufstellung eines Theodolits mit beliebig orientiertem Horizontalkreis entsteht ein um  $o$  gegenüber  $\mathbf{z}'$ ,  $\mathbf{z}''$  verdrehtes Koordinatensystem  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , das entsprechend (1.4) wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{z}' \cos o + \mathbf{z}'' \sin o \\ \mathbf{y} &= -\mathbf{z}' \sin o + \mathbf{z}'' \cos o \end{aligned}$$

mit jenem zusammenhängt ([6]). Die Transformationsmatrix Horizontsystem  $\rightarrow$  Äquatorsystem lautet also für den allgemeinen Fall

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} x_1 &= -\cos \lambda \sin \varphi \cos o + \sin \lambda \sin o \\ x_2 &= -\sin \lambda \sin \varphi \cos o - \cos \lambda \sin o \\ x_3 &= \cos \varphi \cos o \\ y_1 &= \cos \lambda \sin \varphi \sin o + \sin \lambda \cos o \\ y_2 &= \sin \lambda \sin \varphi \sin o - \cos \lambda \cos o \\ y_3 &= -\cos \varphi \sin o \\ z_1 &= \cos \lambda \cos \varphi \\ z_2 &= \sin \lambda \cos \varphi \\ z_3 &= \sin \varphi \end{aligned}$$

Wird die Koordinatenrichtung  $e_1$  in die Ebene des Ortsmeridians gelegt, dann geht das System  $e_i$  in das ortsfeste Äquatorsystem über, für das  $\lambda = 0$  zu setzen ist und in dem die Richtung zu einem Stern mit

$$s_{iA} = \begin{pmatrix} \cos t_i \cos \delta_i \\ \sin t_i \cos \delta_i \\ \sin \delta_i \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. Ist ferner der Horizontalkreis des Beobachtungsinstrumentes nach astronomisch Nord orientiert ( $\sigma = 0$ ), so daß  $R_i = a_i$  wird, dann erfolgt die Transformation Horizontsystem  $\rightarrow$  Äquatorsystem anhand der einfachen Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos t_i \cos \delta_i \\ \sin t_i \cos \delta_i \\ \sin \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a_i \sin z_i \\ \sin a_i \sin z_i \\ \cos z_i \end{pmatrix}$$

woraus sofort die drei grundlegenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos \delta_i \cos t_i &= \cos \varphi \cos z_i - \sin \varphi \sin z_i \cos a_i \\ \cos \delta_i \sin t_i &= \sin a_i \sin z_i \\ \sin \delta_i &= \sin \varphi \cos z_i + \cos \varphi \sin z_i \cos a_i \end{aligned}$$

des nautischen Dreieckes folgen. Es erscheint also eher angebracht, die Sätze der sphärischen Trigonometrie aus räumlichen Drehungen herzuleiten als umgekehrt Orientierungsmatrizen mittels sphärischer Beziehungen aufzustellen ([4]).

Selbstverständlich sind bei reinen Richtungstransformationen die drei Vektorkomponenten nicht unabhängig voneinander, da ihre Quadratsumme gleich eins sein muß.

### 5. Schlußbetrachtung

Bedingt durch den gegenwärtig sich vollziehenden Übergang von der klassischen zweidimensionalen zur dreidimensionalen Geodäsie und durch die Anforderungen der analytischen Photogrammetrie muß die Handhabung räumlicher Orientierungsmatrizen zu den Grundlagen geodätischen Wissens gerechnet werden. Die gründliche Beherrschung der räumlichen Drehungen ist sicher am schnellsten bei einer deutlichen geometrischen Vorstellung dieses Vorganges zu erlangen. Dementsprechend wurde der vorliegende Aufsatz mit der Absicht geschrieben, einen möglichst gut vorstellbaren Weg zur Ermittlung der Matrizelemente, der Richtungscosinus des einen Achssystemes im anderen, aufzuzeigen.

#### Literatur:

- [1] Rimmer, K.: Die Orientierung eines Richtungsbündels. ÖZfV 53 (1965), Nr. 4.
- [2] Rimmer, K.: Über räumliche Drehungen. D. G. K. Reihe A, Nr. 25.
- [3] Rosenfield, G.: The Problem of Exterior Orientation in Photogrammetry. Photogrammetric Engineering 1959, S. 537–553.
- [4] Tewinkel, G.: A Trigonometric Derivation of the Formulas for the Three-Dimensional Rotation Matrix. Photogrammetric Engineering 1964, S. 635–638.
- [5] Rimmer, K.: Einführung in die analytische Photogrammetrie. Vorlesungsscriptum T. H. Graz.
- [6] Brandstätter, G.: Über den sphärischen Rückwärtsschnitt und seine Anwendung in der geodätischen Astronomie. Diss. T. H. Graz.