Paper-ID: VGI_196608

Unabhängigkeit und schwache Abhängigkeit der Funktionen ausgeglichener Größen von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen

Kurt Kubik [1]

[1] *ITC, Kanalweg 3, Delft, Holland*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **54** (3, 4), S. 83–89, 125–132

1966

BibTEX:


```
@ARTICLE{Kubik_VGI_196608,
Title = {Unabh{\"a}ngigkeit und schwache Abh{\"a}ngigkeit der Funktionen
   ausgeglichener Gr{\"o}{\ss}en von einzelnen urspr{\"u}nglichen
   Beobachtungen},
Author = {Kubik, Kurt},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {83--89, 125--132},
Number = {3, 4},
Year = {1966},
Volume = {54}
}
```

Unabhängigkeit und schwache Abhängigkeit der Funktionen ausgeglichener Größen von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen

Von *Kurt Kubik*, ITC-Delft

Einleitung:

Bei vielen Aufgaben der Geodäsie, Photogrammetrie und verwandten Gebieten dienen die Ergebnisse einer Ausgleichung von direkten Beobachtungen nur als Zwischenwerte in einem umfangreicheren Berechnungsgang.

Die gesuchten Endresultate der Aufgabe werden durch eine Verwendung dieser Zwischenwerte in einer weiteren Rechenoperation gewonnen. Dadurch wird der Zusammenhang zwischen eigentlichem Endziel und ursprünglichen Beobachtungen einigermaßen kompliziert und es geht der Überblick über den Einfluß von einzelnen Beobachtungen auf die Endergebnisse bis zu einem gewissen Maße verloren. Insbesondere ist dabei die Frage der Abhängigkeit der Genauigkeit der Endresultate von der Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen weniger leicht zu beantworten. Die Konsequenz davon ist, daß man sich keine Rechenschaft darüber ablegt, welche Genauigkeitsanforderungen an bestimmte ursprüngliche Beobachtungen gestellt werden müssen, bzw. ob sie im Hinblick auf die gestellte Aufgabe überhaupt notwendig sind.

Im ersten Teil dieser Untersuchung soll versucht werden, Kriterien für die vollständige Unabhängigkeit bestimmter Funktionen ausgeglichener Größen von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen aufzustellen. Diese Kriterien sollen dann dahingehend erweitert werden, daß der für die Praxis wesentlich wichtigere Fall einer schwachen Abhängigkeit erfaßt wird.

Besteht eine solche schwache Abhängigkeit, dann ist die Messung und Benutzung der betreffenden Beobachtungen vom praktischen Standpunkt eigentlich unwirtschaftlich.

An Hand einer Reihe von einfachen Beispielen wird schließlich die Anwendung der Kriterien gezeigt, wodurch oft überraschende und nicht unmittelbar plausible Beziehungen aufgezeigt werden konnten.

Mathematisch läßt sich das Problem auf folgende Weise formulieren:

Die aus einem Ausgleich gewonnenen Daten:

Die ausgeglichenen Beobachtungen $(l) = \begin{bmatrix} (l_1) \\ (l_2) \\ \vdots \\ (l_n) \end{bmatrix}$

und die Unbekannten $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}$

finden in einem weiteren Berechnungsgang

$$f_1 = F_1 X \text{ oder } f_2 = F_2 \quad (1)$$

Verwendung, wobei das Endziel der Berechnung f und sein mittlerer Fehler m_f ist.

$$m_f = m_0 \sqrt{Q_{ff}}$$

Zuerst werden Kriterien für die Unabhängigkeit von f und seiner Genauigkeit von den ursprünglichen Beobachtungen l_j aufgestellt. Darüber hinaus muß die Änderung der Genauigkeit von f bei Änderung der Gewichte p_i der ursprünglichen Beobachtungen l_i untersucht werden.

Für die Untersuchung der Genauigkeit genügt es im folgenden, den Gewichtskoeffizienten Q_{ff} zu untersuchen, obwohl in der Gleichung für m_f

$$m_f = m_0 \sqrt{Q_{ff}}$$

auch noch der Gewichtseinheitsfehler m_0 enthalten ist. Für den Gewichtseinheitsfehler wird jedoch mit Vorteil eine Schätzung m_0 verwendet, welche aus einen vorhergehenden umfangreicheren Test und damit unabhängig von dem konkreten Ausgleichsproblem erhalten wurde.

Die Schätzung $\widehat{m}_0$, welche im Zuge der Ausgleichung aus

$$\widehat{m}_0^2 = \frac{v^T P v}{n-k} \qquad n-k \text{ Anzahl der Freiheitsgrade}$$

gewonnen wird, besitzt eine sehr große Unsicherheit, da sie aus einer äußerst geringen Anzahl von Beobachtungen bestimmt wurde. Wegen der großen Streuung von $\widehat{m}_0$ sollte es nicht für weitere Genauigkeitsberechnungen verwendet werden, um nicht Gefahr zu laufen, grob verfälschte Werte für die Genauigkeit des Endresultates zu erhalten.

1. Kriterium für die Unabhängigkeit von f und Q_{ff} von einzelnen l_j und deren Gewichten p_j

Diese Kriterien werden für die Ausgleichung nach vermittelnden und bedingten Beobachtungen getrennt abgeleitet, da sie sich damit in verständlicherer Form ergeben als bei einer Ableitung für die allgemeine Ausgleichsaufgabe.

1.1. *Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen*

Mit einer Gruppe von Beobachtungen l als Anfangsdaten werden durch einen Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen die Unbekannten X und ihre Kofaktor Matrix Q_{xx} aus folgenden Formeln gefunden[1]):

$$\text{Verbesserungsgl.} \quad v = BX + w, \quad B = \begin{bmatrix} a_1, b_1 \ldots\ldots k_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_n, b_n \ldots\ldots k_n \end{bmatrix}$$

Gewichtsmatrix der Beobachtungen $P = [p_{ik}]$ $i, k \ldots . n$

Widersprüche $w = l_0 - l$

Normalgleichungen $NX + B^T P w = 0$

Normalgleichungskoeffizienten $N = B^T P B$ . . . (1)

Unbekannte $X = -N^{-1} B^T P w$

Gewichtskoeffizienten der Unbekannten $Q_{xx} = N^{-1} = Q$

1) Matrix-Notation analog zu [1.]

Das Endresultat f und sein Gewichtskoeffizient Q_{ff} ergibt sich mit

$$f = FX \qquad F = [F_1, F_2 \ldots . F_k]$$
$$Q_{ff} = FQF^{\mathrm{T}} \qquad (f \text{ und } Q_{ff} \text{ sind Skalare}). \qquad \ldots (2)$$

Dargestellt in Funktion der ursprünglichen Beobachtungen folgt f mit

$$f = FX = FQB^{\mathrm{T}}Pl - FQB^{\mathrm{T}}Pl_0 \qquad \ldots (3)$$

wobei nur das erste Glied von den Beobachtungen l abhängig ist.

Soll nun f von der Beobachtung l_j unabhängig sein, so muß in der Matrix

$$C = FQB^{\mathrm{T}}P \quad \text{mit} \quad C = [C_1, C_2 \ldots . C_n] \qquad \ldots (4)$$

der Faktor C_j gleich 0 sein.

Ist insbesondere P eine Diagonalmatrix, dann geht diese Bedingung über in

$$FQB^{\mathrm{T}}\frac{\partial P}{\partial p_j} = O \quad \text{mit} \quad \frac{\partial P}{\partial p_j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array} \end{array} \quad \text{und } p_j = p_{jj} \qquad \ldots (5)$$

Für Q_{ff} folgt

$$Q_{ff} = FQB^{\mathrm{T}}PQ_{ll}\,PBQF^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad Q_{ll} = P^{-1} \qquad \ldots (6)$$

oder $Q = CQ_{ll}C^{\mathrm{T}}$

so daß auch für Q_{ff} gilt:

Q_{ff} ist dann nur dann unabhängig von der Beobachtung l_j oder der Variation deren Gewichtes p_j, wenn in der Matrix $C = FQB^{\mathrm{T}}P$ der Faktor C_j gleich 0 ist.

1.2. *Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen*

Mit den Beobachtungen l als Anfangsdaten ergeben sich die Korrelaten und die ausgeglichenen Beobachtungen aus[2])

Bedingungsgleichungen $Av + w = 0$
Gewichtsmatrix der Beobachtungen $P = [p_{ik}]$, $i, k = 1 \ldots . n$
Gewichtskoeffizienten der Beobachtungen $Q_{ll} = P^{-1} = [q_{ik}]$, $i, k = 1 \ldots . n$
Normalgleichungen $Nk + w = 0$ mit $N = AP^{-1}A^{\mathrm{T}}$
Lösung der Normalgleichungen $k = -N^{-1}w = -Qw$ $\qquad \ldots (7)$
Verbesserungen $v = Q_{ll}A^{\mathrm{T}}k = -Q_{ll}A^{\mathrm{T}}Qw$
ausgeglichene Beobachtungen $(l) = l + v = l - Q_{ll}A^{\mathrm{T}}Qw$

und das Endresultat f als lineare Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen mit

$$f = F\,.\,(l) \qquad\qquad f \text{ Skalar}$$

Dargestellt in Funktion der ursprünglichen Beobachtungen folgt f mit

$$f = F\,.\,l - FQ_{ll}A^{\mathrm{T}}Qw \qquad \ldots (8)$$

wobei w, die Matrix der Widersprüche in der Bedingungsgleichungen, ebenfalls eine lineare Funktion von l ist.

---

2) Notation analog zu [1.]

Soll f nun unabhängig sein von der Beobachtung l_j, müssen folgende Bedingungen gelten:

a) In der Matrix $F = [F_1, F_2, \ldots\ldots F_n]$
muß der Faktor F_j gleich θ sein

b) Die Matrix $FQ_{ll}A^{\mathrm{T}}Q$
hat θ Stellen an den Stellen $\varkappa$, wenn $w_\varkappa$ die Widersprüche aller jener Bedingungsgleichungen sind, in denen die Beobachtung l_j auftritt. Dies kann auch in folgender Form geschrieben werden

$$FQ_{ll}A^{\mathrm{T}}Q\frac{\partial w}{\partial l_j} = 0$$

Der Gewichtskoeffizient Q_{ff} ist sicher unabhängig von der Beobachtung l_j oder der Variation des Gewichtes p_j dieser Beobachtung, wenn f unabhängig ist von der Beobachtung l_j.

Daher ist der Gewichtskoeffizient unabhängig von der Beobachtung l_j oder der Variation des Gewichtes p_j dieser Beobachtung, wenn

a) Der Faktor F_j in der Matrix F gleich 0 ist.

b) Gleichung $FQ_{ll}A^{\mathrm{T}}Q\,\dfrac{\partial w}{\partial l_l} = \theta$ erfüllt ist.

2. Abhängigkeit des Kofaktors Qff von einzelnen Beobachtungen

Hier soll im besonderen die schwache Abhängigkeit des Kofaktors Q_{ff} von einzelnen l_i betrachtet werden. Da die Formeln nur für Genauigkeitsabschätzungen dienen sollen, ist es zulässig, mit Differentialformeln zu arbeiten und Glieder höherer Ordnung zu vernachlässigen.

Weiter wird die Gewichtsmatrix der ursprünglichen Beobachtungen als Diagonalmatrix angenommen, was keine Einschränkung des allgemeinen Problems ist, da man korrelierte Größen immer auf unkorrelierte Größen zurückführen kann. Somit ergeben sich für die Ausgleichung nach vermittelnden und bedingten Beobachtungen folgende Abhängigkeiten:

2. 1. *Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen*

2. 1. 1 Ableitung der Formel für $\dfrac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j}$:

Der Gewichtskoeffizient des Endresultates f ergibt sich aus (1) mit:

$$Q_{ff} = FQF^{\mathrm{T}}$$

worin

$$Q = N^{-1}$$

Die Ableitung Q_{ff} nach dem Gewicht p_j einer Beobachtung l_j gibt

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j} = F\frac{\partial Q}{\partial p_j}F^{\mathrm{T}} \qquad \text{mit } p_j = p_{jj} \text{ der Matrix } P\text{, ein Skalar} \qquad \ldots (9)$$

Mit $NQ = I$ $\qquad I$ Einheitsmatrix

$$\frac{\partial N}{\partial p_j} Q + N \frac{\partial Q}{\partial p_j} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p_j} = - Q \frac{\partial N}{\partial p_j} Q \quad , \quad \text{wobei} \frac{\partial N}{\partial p_j} = \begin{bmatrix} a_j^2, & a_j b_j \ldots\ldots & a_j k_j \\ \vdots & & \vdots \\ k_j a_j, & k_j b_j \ldots\ldots & k_j^2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (10)$$

$a_j, b_j, \ldots k_j$ Koeffizienten der j-ten Verbesserungsgleichung

folgt

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j} = - FQ \frac{\partial N}{\partial p_j} QF^{\mathrm{T}} \qquad \ldots (11)$$

Durch den Übergang auf ein endliches Intervall ergibt sich

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = - FQB^{\mathrm{T}} \frac{\partial P}{\partial p_j} BQF^{\mathrm{T}} \quad \text{oder mit} \quad D = FQB^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta Q_{ff} = - D \frac{\partial P}{\partial p_j} D^{\mathrm{T}} \,.\, \Delta p_j \qquad \ldots (12)$$

Es kann gezeigt werden, daß ΔQ_{ff} existiert und stetig ist für das Intervall $0 \leqq p_j \leqq P_0$, wobei Δp_j endlich, und P_0 beliebig groß ist. Dadurch gilt diese Gleichung für ΔQ_{ff} auch bei Hinzunahme einer neuen Beobachtung l_j (p_j geht über von 0 in p_{j0}).

Für $\dfrac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = 0$ ergibt Gleichung (12) ebenfalls die unter Kapitel 1 angeführte Bedingung (5).

2.1.2. Schwache Abhängigkeit des Gewichtskoeffizienten Q_{ff} von Beobachtungen $\overline{l}_j$, nahe jener l_j vorgenommen, von denen Q_{ff} unabhängig ist:

Wenn statt der Verbesserungsgleichung

$$v_j = a_j x_1 + b_j x_2 + \ldots. + k_j x_k + w_j \text{ mit Gewicht } p_j \qquad \ldots (13)$$

von der und von deren Gewicht Q_{ff} unabhängig ist:

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = 0 \qquad \ldots (13\text{a})$$

eine Verbesserungsgleichung

$$\overline{v}_j = \overline{a}_j x_1 + \overline{b}_j x_2 + \ldots. + \overline{k}_j x_k + \overline{w}_j \qquad \ldots (14)$$

mit Gewicht $\overline{p}_j$ im Ausgleichsverfahren verwendet wird, deren Koeffizienten sich von denen der j-ten Verbesserungsgleichung nur um Größen 1. Ordnung unterscheiden

$$\begin{aligned} \overline{a}_j &= a_j + da \\ \overline{b}_j &= b_j + db \\ &\vdots \\ \overline{k}_j &= k_j + dk \end{aligned} \qquad \ldots (15)$$

so gilt für diese Verbesserungsgleichung, daß Q_{ff} nur schwach abhängig ist von ihrer Verwendung in der Berechnung, da sich $\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta \bar{p}_j}$ nur aus Größen zweiter Ordnung zusammensetzt.

Dies ergibt sich aus den nachfolgenden Beziehungen:

Bei Verwendung der Verbesserungsgleichung $\bar{v}_j$ anstatt Verbesserungsgleichung v_j geht die Matrix B der Gleichungen (1) über in eine Matrix

$$\bar{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_1, b_1 \ldots\ldots k_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_j, b_j \ldots\ldots k_j \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_n, b_n \ldots\ldots k_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{array}$$

Die Änderung dB ist daher

$$dB = \bar{B} - B = \begin{bmatrix} o, o, \ldots\ldots o \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ da, db, \ldots dk \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ o, o, \ldots\ldots o \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{array}$$

Die Relation $\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j}$ ändert sich dadurch um ein

$$d\left(\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j}\right) = \frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j}\right) dB \qquad \ldots (16)$$

so daß sich die Abhängigkeit von Q_{ff} von dem Gewicht $\bar{p}_j$ der Beobachtung $\bar{l}_j$ ergibt aus

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j} + d\left(\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j}\right) \qquad \ldots (17)$$

Mit (13a) und Übergang zu einem endlichen Intervall folgt

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta \bar{p}_j} = d\left(\frac{\partial Q_{ff}}{\partial p_j}\right) \qquad \ldots (17\text{a})$$

welches sich aus Gleichung (11) durch Differentiation unter Beobachtung von (16) ergibt mit

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta \bar{p}_j} = 2\left\{FdQB^{\mathrm{T}}\frac{\partial P}{\partial p_j}BdQF^{\mathrm{T}} + FQdB^{\mathrm{T}}\frac{\partial P}{\partial p_j}dBQF^{\mathrm{T}} + \right.$$

$$\left. + FdQB^{\mathrm{T}}\frac{\partial P}{\partial p_j}dBQF^{\mathrm{T}} + \left(FdQB^{\mathrm{T}}\frac{\partial P}{\partial p_j}dBQF^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \ldots (17\text{b})$$

mit $\qquad dQ = -QdNQ$

oder $\qquad dQ = -QdB^{\mathrm{T}}PBQ - QB^{\mathrm{T}}PdBQ$

Daraus kann bei bekannten dB und $\Delta\bar{p}_j$ die Änderung ΔQ_{ff} oder bei festgesetzten ΔQ_{ff} und $\Delta\bar{p}_j$ die Werte dB und damit die Änderungen da, $db, \ldots,$ dk

berechnet werden. Mit diesen und mit Hilfe von (15) ergeben sich die Verbesserungsgleichungen $\bar{v}_j$, welche die Grenzen jenes Intervalles bilden, innerhalb dessen die Hinzunahme einer Verbesserungsgleichung eine Änderung des Kofaktors um $\leq \Delta Q_{ff}$ bedingt.

Dadurch kann für die Beobachtung l_j ein Intervall berechnet werden, innerhalb dessen eine zusätzliche Beobachtung $\bar{l}_j$ mit dem Gewicht $\bar{p}_j$ eine Verbesserung des Kofaktors Q_{ff} um $\leq k\%$ bedingen. Die Größe d des Intervalls ist abhängig von der gewählten Schranke k,

$$d = d(k).$$

Durch die Änderung von Q_{ff} um $k\%$ ändert sich der mittl. Fehler des Endresultates um

$$\Delta m_f \simeq \frac{1}{2} \Delta Q_{ff} m_0 = \frac{k\%}{2} m_f \qquad \ldots (17c)$$

(Schluß folgt)

Mitteilungen

Der XI. Internationale Geometerkongreß 1965 in Rom

Von *Walter Kamenik*, Wien

Das Consiglio Nationale dei Geometri hatte die Fédèration Internationale des Géomètres (F.I.G.) eingeladen, den XI. Internationalen Geometerkongreß 1965 in Rom abzuhalten. Seine Veranstaltungen fanden vom 25. Mai bis 5. Juni 1965 in der Kongreßhalle der EUR (Exposition Universelle de Rome), dem für 1942 vorbereiteten Weltausstellungsgelände im Westen Roms, statt.

Die Beratungen des XI. Internationalen Geometerkongresses und die Fachausstellung standen unter dem Leitmotiv „Der Fortschritt der modernen Technik im Beruf des Geometers". Namhafte Vertreter Italiens aus Politik, Wissenschaft, Verwaltung und Wirtschaft hatten den Ehrenschutz übernommen.

Aus den folgenden Mitgliedsstaaten der F.I.G. waren Teilnehmer anwesend: Argentinien, Belgien, Bulgarien, Dänemark, Deutschland, Finnland, Frankreich, Großbritannien, Israel, Italien, Jugoslawien, Kanada, Liberia, Luxemburg, Marokko, Niederlande, Österreich, Polen, Schweden, Schweiz, Südafrika, Tschechoslowakei, Ungarn, USA, den neu aufgenommenen Geometerverbänden von Australien, Griechenland, Kongo und Indien sowie Beobachter aus folgenden Ländern: Brasilien, China (Formosa), Ghana, Kambodscha, Nigeria, Norwegen, Tanzania, Thailand, Türkei, Portugal, Elfenbeinküste, das sind 39 Länder mit über 900 Geometern.

Die Gesamtleitung des Kongreßgeschehens oblag dem Präsidenten der F.I.G. *Ennio de Biagi* und seinen Mitarbeitern.

Neben Fragen rein verwaltungstechnischer Art, welche in den Sitzungen der Finanzkommission und des Comité Permanent abgewickelt wurden, fanden erstmals die Beratungen der neuorganisierten technischen Kommissionen der F.I.G. statt, wie sie beim X. Internationalen Geometerkongreß 1962 in Wien beschlossen und im Bericht über die Tagung des Comité Permanent 1964 in Sofia erläutert sind.

Das Interesse der österr. Delegierten konzentrierte sich auf die in der Gruppe B „Vermessung und Kartographie" (Vorsitzender Vizepräsident der F.I.G. Prof. Dr. A. Barvir) vereinigten Kommissionen IV, V und VI zur Verhandlung stehenden Themen.

Technische Studienkommission IV
„Kataster und Flurbereinigung"

Im Rahmen der technischen Studienkommission IV „Kataster- und Flurbereinigung" wurde in Zusammenarbeit mit den Office International du Cadastre et du Regime Foncier (OICRF) ein

Fernrohres gemacht wird. Es kann weiters das Verhältnis der Brennweite des Fernrohres und des sogenannten imaginären Teilkreishalbmessers außer eins auch in einem anderem Verhältnis gewählt werden, usw. wie einige davon — aber alle ohne unmittelbare Bestimmung des Höhenunterschiedes — durch verschiedene Konstruktionen von *Filotechnica Salmoiraghi* und *Bors* verwirklicht wurden (Vgl. [28; S. 281]). Hier wollen wir nur kurz bemerken, daß die radiale Anordnung der Teilstriche die Verwendung der Transversalteilungen an der Latte nicht beeinträchtigt, da bei einem zwischen zwei Tangensteilungen erscheinenden größten Winkel von rund 63^c die Abweichung von der Horizontalen wesentlich unterhalb der in Frage stehenden Beobachtungsgrenze liegt.

Es ist bekannt, daß die durch mechanische Lösung verwirklichte geistreiche Idee der logarithmischen Tachymetrie *Tichy*'s durch die *Jänich*sche optische Lösung [29; insbes. S. 165—172 und 193—197] zu einem neuen Leben erwacht ist. Wir glauben, daß auch die für die Tangententachymeter geltenden grundlegenden Beziehungen des Wiener Professors *Stampfer* in optischer Form verwirklicht, bei vielen tachymetrischen Arbeiten sowohl für die unmittelbare Bestimmung der Horizontaldistanz, als auch für die des Höhenunterschiedes auch in unserer Zeit mit Erfolg und Nutzen verwendet werden können. Unsere Messungen mit einem nunmehr zur Verfügung stehenden Versuchsinstrument scheinen dies zu bestätigen. So hoffen wir, daß der Name *Stampfer* auch in den erneuerten Tangententachymetern weiterleben wird. Er gehört jedenfalls in die Reihe jener großen Geodäsie-Professoren der Wiener Technischen Hochschule, die das hohe internationale Ansehen der Wiener geodätischen Schule begründet, bzw. gesichert haben. Und diese Reihe wächst zum Ruhme der Technischen Hochschule, aber auch zum Gedeihen der Wissenschaft weiter!

Unabhängigkeit und schwache Abhängigkeit der Funktionen ausgeglichener Größen von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen

Von *Kurt Kubik*, ITC-Delft

(Schluß)

2.2. *Ausgleich nach bedingten Beobachtungen*

$\left(\text{Ableitung der Beziehung } \frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j}\right)$

In diesem Falle wird zuerst die Änderung ΔQ_{ff} dargestellt als Funktion eines Δq_j mit $q_j = p_j^{-1}$

woraus $\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j}$ folgt mit

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = - q_j^2 \frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta q_j} \qquad \dots (18)$$

Mit den Gewichtskoeffizienten der ausgeglichenen Beobachtungen (1)

$$Q_{(l)(l)} = P^{-1} - P^{-1} A^T Q A P^{-1} \quad {}^{3)} \qquad \dots (19)$$

3) Ableitung der Beziehung siehe [1].

ergibt sich der Gewichtskoeffizient des Endresultates mit

$$Q_{ff} = F Q_{(l)(l)} F^T \qquad \dots (20)$$

Die Ableitung von Q_{ff} nach q_j ergibt sich mit

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial q_j} = F \, \frac{\partial Q_{(l)(l)}}{\partial q_j} \, F^{\mathrm{T}} \qquad \dots (21)$$

wobei

$$\frac{\partial Q_{(l)(l)}}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} A^{\mathrm{T}} Q A Q_{ll} - Q_{ll} A^{\mathrm{T}} \frac{\partial Q}{\partial q_j} A Q_{ll} - Q_{ll} A^{\mathrm{T}} Q A \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j}$$

oder nach einiger Umformung

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial q_j} = F \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} P Q_{(l)(l)} F^{\mathrm{T}} + \left(F \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} P Q_{(l)(l)} F^{T} \right)^{\mathrm{T}} - F \frac{\partial Q_{ll}}{\partial p_j} F^{\mathrm{T}} + F Q_{ll} A^{\mathrm{T}} Q \frac{\partial N}{\partial p_j} Q A Q_{ll} F^{\mathrm{T}}$$

Mit den Abkürzungen

$$H = \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} = \begin{array}{c} 1 \dots j \dots n \\ \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array}$$

$$G = \frac{\partial Q_{ll}}{\partial q_j} P Q_{(l)(l)} = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i Q_{(1)(i)} \, , & \sum_{i=1}^{n} p_i Q_{(2)(i)} \, , & \sum_{i=1}^{n} p_i Q_{(3)(i)} & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_i Q_{(n)(i)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & - & - & - & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{array} \qquad (22)$$

wobei $Q_{(r)(i)} = Q_{(lr)(li)}$, ein Faktor der Matrix $Q_{(l)(l)}$, $r = 1 \dots n$
und

$$W = Q \, \frac{\partial N}{\partial q_j} \, Q \quad \text{mit} \quad \frac{\partial N}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} a_j^1 a_j^1, & a_j^1 a_j^2 \dots & a_j^1 a_j^k \\ \vdots & & \vdots \\ a_j^k a_j^1, & \dots\dots\dots & a_j^k a_j^k \end{bmatrix} \qquad \dots (23)$$

a_j^i Koeffizient der Verbesserung v_j in Bedingungsgleichung i

ergibt sich

$$\frac{\partial Q_{(l)(l)}}{\partial q_j} = G + G^{\mathrm{T}} - H + Q_{ll} A^{\mathrm{T}} W A Q_{ll} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial Q_{ff}}{\partial q_j} = F G F^{\mathrm{T}} + (F G F^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - F H F^{T} + J W J^{\mathrm{T}} \ \text{mit} \ J = F Q_{ll} A^{\mathrm{T}}$$

Der Übergang zu einem endlichen Intervall ergibt

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta q_j} = F G F^{\mathrm{T}} + (F G F^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - F H F^{\mathrm{T}} + J W J^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \qquad \dots (24)$$

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = - q_j{}^2 \frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta q_j} \qquad \ldots (24a)$$

Es kann hier ebenfalls gezeigt werden, daß ΔQ_{ff} existiert und stetig ist im Intervall $0 \leqq qj \leqq q$ (q endliche beliebig große Zahl, Δq_j endlich, klein). Dadurch kann ΔQ_{ff} auch berechnet werden für die Hinzunahme der Beobachtung l_j (q_j geht von 0 über zu einem q_{j0}).

Eine wesentliche Vereinfachung der Änderung ΔQ_{ff}, Formel (24a) ergibt sich für Beobachtungen l_j, deren ausgeglichene Werte (l_j) nicht mehr direkt in der Funktion

$$f = F\,.\,(l)$$

enthalten sind (Die Faktoren F_j der Matrix F sind 0).

Für diesen Fall folgt:

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta p_j} = - q_j{}^2\, JWJ^{\mathrm{T}} = - q_j{}^2\, FQ_{ll}\, A^{\mathrm{T}} Q \,\frac{\partial N}{\partial q_j}\, (FQ_{ll}\, A^{\mathrm{T}}\, Q)^{\mathrm{T}}$$

mit $\dfrac{\partial N}{\partial q_j}$ siehe Gleichung (23).

Daraus läßt sich der Einfluß der Beobachtung l_j und ihres Gewichtes p_j auf Q_{ff} abschätzen.

3. Beispiele

3.1. *Mehrfaches Vorwärtseinschneiden eines Punktes A mit anschließender Verwendung von A zur Bestimmung einer Richtung nach B*

3.1.1. Unter der Annahme einer gegebenen Anordnung von Bestimmungsvisuren für den Neupunkt A soll jene Visur Rp_{jA} gefunden werden, deren zusätzliche Verwendung keine Genauigkeitssteigerung der Richtung R_{AB} zur Folge hat (Beispiel zu Absatz 1.1).

Das Endresultat

$$R_{AB}{}' = arc\; tg \frac{\Delta y_{AB}{}'}{\Delta x_{AB}{}'}$$

ergibt linearisiert

$$dR_{AB}{}' = a_B{}'\, dx_A{}' + b_B{}' dy_A{}' \text{ mit } a_B{}' = \frac{\rho}{s_{AB}} \sin R_{AB}{}',\; b_B{}' = - \frac{\rho}{s_{AB}} \cos R_{AB}{}',$$

s_{AB} ...... Distanz A—B

oder allgemein

$$f' = F'\,.\,X' \;,\; Q_{ff}{}' = F' Q'_{xx} F'^{T} \quad \text{mit} \quad F' = [a_B{}', b_B{}'],\; X' = \begin{bmatrix} dx_A{}' \\ dy_A{}' \end{bmatrix}$$

Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems kann immer b_B gleich 0 gemacht werden, so daß f wird

$$f = F\,.\,X \;,\; Q_{ff} = FQ_{xx}F^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad F = \left[\frac{\rho}{s_{AB}}, o\right],\; X = \begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \end{bmatrix}$$

Die Matrix X (und damit die Koordinaten des Neupunktes A) wurde durch Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen aus den Beobachtungen

$$l = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \text{und deren Gewichtsmatrix } P$$

mit den Verbesserungs- und Normalgleichungen

$$v = BX + w$$

$$NX + B^T P w = 0 \qquad \text{mit } B = \begin{bmatrix} a_1, b_1 \\ \vdots \\ a_n, b_n \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_i &= \frac{\rho}{s_i} \sin R_i \\ b_i &= -\frac{\rho}{s_i} \cos R_i \\ i &= 1 \, .. \, n \end{aligned}$$

$$\text{und } R_i = R_{APi} \,, \quad s_i = s_{APi}$$

berechnet.

Damit der Gewichtskoeffizient der Richtung R_{AB} unabhängig wird von der Beobachtung l_j, muß Gleichung (5) erfüllt sein.

Dies ergibt die Beziehung

$$a_j Q_{11} + b_j Q_{12} = 0 \quad \text{mit } Q_{ik} \text{ Koeffizienten der Matrix } Q = N^{-1}$$

woraus folgt

$$\frac{a_j}{b_j} = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}$$

oder mit

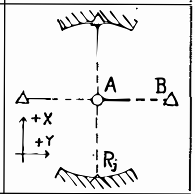
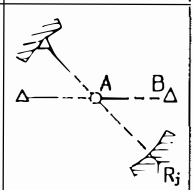
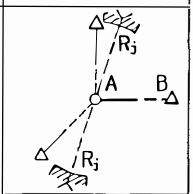
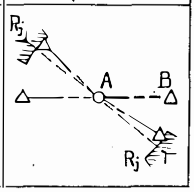
$$Q_{11} = \frac{1}{[paa.1]} \,, \quad Q_{12} = -\frac{[pab]}{[pbb]\,[paa.1]} \quad \text{mit } [paa\ 1] = [paa] - \frac{[pab]^2}{[pbb]}$$

[ ] Gauß'sches Summensymbol

schließlich

$$\frac{a_j}{b_j} = \frac{[pab]}{[pbb]}$$

Eine Verbesserungsgleichung, die der obigen Beziehung genügt, hat keinen Einfluß auf das Endresultat. Für jede Anordnung bereits vorhandener Bestimmungsvisuren können nun jene zusätzlichen Visuren R_j berechnet werden, deren Mitverwendung das Endresultat und dessen Genauigkeit nicht ändern. Dies wurde für einige numerische Beispiele durchgerechnet (Tafel 1). In den Beispielen 1 und 2 mag es trivial erscheinen, daß die berechneten zusätzlichen Richtungen R_j keinen Einfluß auf die gesuchte Richtung R_{AB} haben.

Nº	1	2	3	4	5	6	7
1	300^g00 0^g00	1 1	100^g00	1,00	200^g00 (0^g00)	$170^g40 \leq \bar{R}_j \leq 229^g60$ $370^g40 \leq \bar{R}_j \leq 29^g60$	
2	300^g00 350^g00	1 1	100^g00	1,00	150^g00 (350^g00)	$128^g70 \leq \bar{R}_j \leq 171^g30$ $328^g70 \leq \bar{R}_j \leq 371^g30$	
3	0^g00 250^g00	1 1	100^g00	3,00	20^g30 220^g30	$6^g80 \leq \bar{R}_j \leq 33^g80$ $206^g80 \leq \bar{R}_j \leq 233^g80$	
4	133^g33 300^g00 350^g00	1 1 1	100^g00	0,94	143^g10 343^g10	$128^g50 \leq \bar{R}_j \leq 157^g70$ $328^g50 \leq \bar{R}_j \leq 357^g70$	

Tafel 1

Erklärung: Spalte 1: Richtungen R_i zur Bestimmung des Punktes A

2: Gewichte dieser Richtungen, p_i

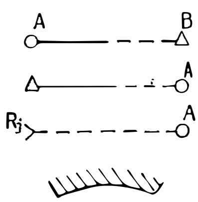
3: Gesuchte Richtung R_{AB}

4: Gewichtskoeffizient Q_{RR} von R_{AB} nach deren Berechnung mit Hilfe der R_i

5: Richtungen R_j, welche keinen Einfluß auf die berechneten R_{AB}, Q_{RR} haben. Falls diese mit einer der Bestimmungsvisuren für den Punkt A zusammenfällt, wurde sie in Klammer gesetzt.

6: Intervall, innerhalb dessen die zusätzliche Verwendung einer Richtung $\bar{R}_j$ mit Gewicht $\bar{p}_j = 1$ eine Verbesserung von Q_{RR} um kleiner als 10% bedingt.

7: Situationsskizze: Zeichenerklärung:



Endresultat; Richtung R_{AB}

Gegebene Bestimmungsrichtungen

Zusätzliche Richtungen R_j ohne Einfluß auf das Endresultat

Intervall der Richtungen $\bar{R}_j$

Abb. 1

Bei den Beispielen 3 und 4 ist es jedoch nicht mehr unmittelbar ersichtlich, daß die gefundenen Richtungen zu keiner Genauigkeitssteigerung des Endresultates führen.

3.1.2. Berechnung des Intervalles, innerhalb dessen die Hinzunahme von Beobachtungen $\bar{R}_j$ mit dem Gewicht $\bar{p}_j = 1$ eine Verbesserung von Q_{ff} um weniger als einen bestimmten vorgegebenen Wert ergibt.

Dieser Wert wurde willkürlich so gewählt, daß sich der mittl. Fehler der Richtung mu weniger als 5% ändert, unter der Annahme, daß eine Verbesserung von m_f um $\leqq 5\%$ im Hinblick auf die notwendige Mehrarbeit, eine zusätzliche Bestimmungsvisur zu gewinnen, unwirtschaftlich ist.

Nach Gleichung (17c) berechnet sich damit ΔQ_{ff} aus

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{Q_{ff}} \simeq 2 \frac{\Delta m_f}{m_f}$$

mit $\Delta Q_{ff} = 10\% \, Q_{ff}$.

Mit dieser Änderung und der Änderung des Gewichtes der Beobachtung $\bar{p}_j$, $\Delta \bar{p}_j = 1$ (Übergang von $\bar{p}_j$ von 0 gegen 1) ergibt sich der Quotient

$$\frac{\Delta Q_{ff}}{\Delta \bar{p}_j} = 0{,}10 \, Q_{ff}$$

Daraus folgen mit Hilfe der unter 3.1.1. angegebenen Größen die Werte da und db aus der für diesen Fall quadratischen Gleichung (17b).

Die Grenzen des Intervalls ergeben sich mit

$$\frac{a + da}{b + db} = - \, tg \, \bar{R}_{j1} \quad \text{und} \quad \frac{a - da}{b - db} = - \, tg \, \bar{R}_{j2}$$

und die Größe des Intervalles, d, mit

$$d = | \bar{R}_{j2} - \bar{R}_{j1} |$$

mit R_j Visur, von der das Endresultat unabhängig ist.

s_j Distanz des Punktes P_j nach A, so gewählt, daß das Gewicht p_j der Visur R_j gleich $\bar{p}_j = 1$ ist.

a, b Koeffizient der Verbesserungsgleichung für Richtung R_j.

Es wurden für die unter 3.1.1. angegebenen numerischen Beispiele jene Intervalle berechnet, innerhalb deren die Hinzunahme von Beobachtungen $\bar{R}_j$ (Gewicht $\bar{p}_j = 1$) den Gewichtskoeffizienten Q_{ff} um $\leqq 10\%$ verbessert (Tafel 1).

Durch Verwendung einer Differentialformel ergibt sich dR um höchstens 10—15% verfälscht, was für eine Abschätzung als ausreichend erscheint.

3.2. *Beispiel zu Absatz* 1.2.

Es wird angenommen, daß eine Reihe von Größen Φ absolut gemessen wurden und unabhängig davon auch die Differenzen $\Delta \, \Phi$ zwischen den aufeinanderfolgenden Größen Φ.

Der gesuchte Endwert sei die Summe dieser ausgeglichenen Werte (Φ). Es wird gezeigt, daß die Summe der ausgeglichenen Größen und ihre Genauigkeit unabhängig von der Messung der Differenzen ist.

Gemessen wurden die absoluten Werte Φ und die Differenzen $\Delta\,\Phi$.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} \quad , \qquad \Delta\Phi = \begin{bmatrix} \Delta\Phi_{21} \\ \vdots \\ \Delta\Phi_{n,\,n-1} \end{bmatrix}$$

Anordnung der Messungen: siehe Abb. 2.

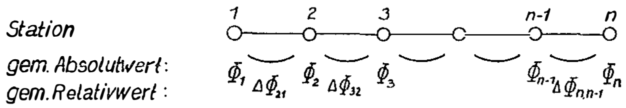


Abb. 2

Dieser Fall ergibt sich z. B. in der Photogrammetrie bei freier Aerotriangulation mit Horizontbilddaten. Aus den Horizontbildern können ausgeglichene Längsneigungen (Φ) der einzelnen Modelle berechnet werden aus den Beobachtungen:

Φ absolut Messungen der Längsneigung im einzelnen Horizontbild,
$\Delta\Phi$ relative Messungen der Neigungsunterschiede in aufeinanderfolgenden Horizontbildern.

Aus den Bedingungsgleichungen

$$(\Phi_i) - (\Phi_{i-1}) - (\Delta\Phi_{i,\,i-1}) = 0 \qquad i = 2 \,\ldots\, n$$

$$\text{mit } (\Phi_i) = \Phi_i + v_{\Phi i} \quad , \quad (\Delta\Phi_{i,\,i-1}) = \Delta\Phi_{i,\,i-1} + v_{\Delta\Phi i,\,i-1}$$

folgt $Av + w = 0$

$$\begin{array}{rl} & \begin{matrix} 1 & 2 & & & n & n+1 & & & 2n-1 \end{matrix} \\ A = & \begin{bmatrix} -1, & +1 & & & \cdot & +1 & & & \\ & -1, & +1 & & \cdot & & +1 & & \\ & & -1, & +1 & \cdot & & & +1 & \\ & & & \ddots & \vdots & & & & \ddots \\ & & & -1, & +1 & & & & +1 \end{bmatrix} \end{array} , \quad \underset{i=1\ldots 2n\ \ 1}{v = [v_i]} = \begin{bmatrix} v_{\Phi_1} \\ \vdots \\ v_{\Phi_n} \\ v_{\Delta\Phi_{2,1}} \\ \vdots \\ v_{\Delta\Phi_{n,n-1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ 2n \quad 1 \end{matrix}$$

mit der Gewichtsmatrix der Beobachtungen

$$\begin{array}{rl} & \begin{matrix} 1 \,..\, n & n+1 \,.\, 2n-1 \end{matrix} \\ P = & \left[\begin{array}{c:c} I & o \\ \hdashline o & cI \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{I Einheitsmatrix} \\ c \text{ skalar} \end{array}$$

Das Endresultat ergibt sich als lienare Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen mit

$$f = F\,.\,(l) \qquad F = \begin{array}{c} \scriptstyle 1\;2\,\ldots\ldots\,n \quad n+1\,\ldots\ldots\,2n-1 \\ [1, 1, 1 \ldots\ldots 1 \;\vdots\; 0, 0, \ldots\ldots 0] \end{array}$$

Um zu untersuchen, ob die Funktion f und deren Gewichtskoeffizient Q_{ff} abhängig ist von der ursprünglichen Beobachtungen $\Delta\Phi_i$, wird das Kriterium von Absatz 1.2. verwendet. Dies besagt:

a) Die Koeffizienten F_i der Matrix F müssen 0 sein für $i = n+1, \ldots .\, 2n-1$. Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt.

b) Außerdem muß gelten

$$F Q_{ll} A^{\mathrm{T}} \frac{\partial w}{\partial l_i} = 0 \qquad\qquad i = n+1, \ldots .\, 2n-1$$

Dies ist erfüllt, da die Matrix $F Q_{ll} A^{\mathrm{T}}$ ident gleich 0 ist, wie sich leicht nachprüfen läßt.

Daher ist das Endresultat und dessen Gewicht unabhängig von der Messung der relativen Werte.

In diesem Fall ist es nicht notwendig, die relativen Messeungn vorzunehmen und diese in einem Ausgleich zu verwenden, da sie auf das Endresultat keinen Einfluß haben.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß lineare Funktionen von ausgeglichenen Größen ebenso wie ihre Gewichtskoeffizienten unabhängig oder schwach abhängig von einzelnen ursprünglichen Beobachtungen und deren Gewichtskoeffizienten sein können. Eine Verwendung solcher Beobachtungen im Rechnungsgang wird daher unnötig oder unwirtschaftlich.

Für Ausgleich nach vermittelnden und bedingten Beobachtungen werden Kriterien abgeleitet, mit deren Hilfe konkrete Beobachtungen, bzw. Bereiche für solche Beobachtungen bestimmt werden können, von denen die gesuchten Endwerte unabhängig bzw. schwach abhängig sind.

An Hand einiger durchgerechneter Beispiele wird gezeigt, daß sich neben trivialen Resultaten auch solche ergeben, die nicht unmittelbar plausibel sind.

Eine Benutzung der abgeleiteten Kriterien bei der Planung praktischer Aufgaben kann daher zu wirtschaftlichen Einsparungen führen.

Literatur

[1.] *Wolf, H.:* „Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate", Lieferung 3, S. 119 bis 142.

Mitteilungen

Prof. Dr.-Ing. habil., Dr.-Ing. E. h. Max Kneißl — Ehrendoktor der Technischen Hochschule Graz

Am 30. Juni 1966 verlieh die Technische Hochschule Graz dem international bekannten und anerkannten Münchener Geodäten Prof. DDr. Kneißl in Würdigung seiner großen wissenschaftlichen und organisatorischen Leistungen das Ehrendoktorat der technischen Wissenschaften. Bei dem Festakt war die Deutsche Bundesrepublik durch Prof. Dr. H. Moritz, Technische Universität Berlin, und das übrige Ausland durch die Professoren Dr. J. Böhm, Prag, Dr. F. Braum, Zagreb, und Dr. Dr. h. c. mult. Tárczy-Hornoch, Antal, Sopron, vertreten. Die Österreichische Akademie