

Paper-ID: VGI_196603



Gefährlicher Kreis und Punktlagefehler beim Rückwärtsschnitt

Kornelius Peters ¹

¹ *Techn. Hochschule Wien, IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **54** (1), S. 14–19

1966

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Peters_VGI_196603,  
Title = {Gefährlicher Kreis und Punktlagefehler beim Rückwärtsschnitt},  
Author = {Peters, Kornelius},  
Journal = {Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {14--19},  
Number = {1},  
Year = {1966},  
Volume = {54}  
}
```



Gefährlicher Kreis und Punktagefehler beim Rückwärtsschnitt

Von *Kornelius Peters*, Wien

1. Einleitung

Gemäß der Bedeutung des Rückwärtsschnittes für die Punkteinschaltung ist die entsprechende Literatur sehr groß ([1], [2]). Gerade zur Einmessung von Paßpunkten für luftphotogrammetrische Arbeiten findet der Rückwärtsschnitt auch wegen der Kürze und Einfachheit der Feldarbeit verbreitete Anwendung. In jüngster Zeit wurden daher auch Rationalitäts- [3] und Fehleruntersuchungen [4] in dieser Zeitschrift veröffentlicht, welche seine Berechnung behandeln.

Der sogenannte „gefährliche Kreis“ beim Rückwärtsschnitt ist ein bekannter Begriff. Seine ungünstige Rolle wurde bis jetzt aber nur elementar-geometrisch betrachtet, so als Unbestimmtheit der Aufgabe im Sehnenviereck, als schleifender bzw. fehlender Schnitt der Cassini'schen Kreise. Hier soll nun gezeigt werden, wie der Abstand des Neupunktes vom Umkreis des Festpunktdreieckes zur Güte der Punktbestimmung in Beziehung gesetzt werden kann. Außerdem wird für das Verfahren der Berechnung nach Cassini, welches in Österreich als das bekannteste angesehen werden kann und welches nach [3] auch zu den rationellsten zählt, ein Kriterium der Rechenschärfe und der Güte der Punktbestimmung angegeben.

2. Abstand vom gefährlichen Kreis und Punktfehler

Da unser Problem von Koordinatensystem und Maßstab unabhängig ist, sei ein lokales System mit dem Umkreismittelpunkt der Fixpunkte M als Ursprung und der ξ -Achse in der Richtung zum Neupunkt P_o angenommen. Der Radius R wird gleich 1 gesetzt. k sei im allgemeinen Fall das Verhältnis des Abstandes von P_o vom Umkreismittelpunkt zum Radius. In unserem Beispiel ist $k = P_oM$. \bar{k} ist somit in unserem Beispiel der Abstand von P_o vom Kreis, im allgemeinen Fall ist $\bar{k} = 1-k$ definiert.

Die Fixpunkte P_i sind durch ihre Polarkoordinaten v_i und $R = 1$ gegeben. $i = 1, 2, 3$. Laut [4] ist nun der mittlere Punktagefehler von P_o gleich

$$M = \frac{m}{D} \sqrt{A^2_{21} + B^2_{21} + A^2_{32} + B^2_{32}}, \text{ sowie } m_\xi = \frac{m}{D} \sqrt{B^2_{21} + B^2_{32}},$$

$$m_\eta = \frac{m}{D} \sqrt{A^2_{21} + A^2_{32}} \quad \dots \quad (1)$$

In diesen Formeln bedeuten:

m mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung,

$$A_{21} = a_{02} - a_{01}, \quad B_{21} = b_{02} - b_{01} \text{ usw.}$$

a und b die bekannten Gauss'schen Richtungskoeffizienten,

$$D = A_{21}B_{32} - B_{21}A_{32}. \quad \dots \quad (2)$$

Der zweite Sonderfall ist der des sogenannten „gefährlichen Kreises“. k wird dann näherungsweise 1, \bar{k} wird klein. Folgende Entwicklungen sind daher in erster Näherung zulässig:

$$\begin{aligned}
 \text{Aus (3) wird: } b_i &= \rho \frac{1 - \bar{k} - \cos v_i}{1 + (1 - \bar{k})^2 - 2(1 - \bar{k}) \cos v_i} = \\
 &= \rho \frac{1 - \bar{k} - \cos v_i}{2 - 2\bar{k} - 2 \cos v_i + \bar{k}^2 + 2\bar{k} \cos v_i} \doteq \rho \frac{1}{2 + \frac{2\bar{k} \cos v_i}{1 - \bar{k} - \cos v_i}} = \\
 &= \rho \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\bar{k} \cos v_i}{1 - \bar{k} - \cos v_i}} \doteq \rho \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{k} \cos v_i}{1 - \cos v_i} \right) \\
 \text{(2) wird: } D &= A_{21} \cdot \rho \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{k} \cos v_3}{1 - \cos v_3} - 1 + \frac{\bar{k} \cos v_2}{1 - \cos v_2} \right) - \\
 &- A_{32} \cdot \rho \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{k} \cos v_2}{1 - \cos v_2} - 1 + \frac{\bar{k} \cos v_1}{1 - \cos v_1} \right) = \\
 &= A_{21} \cdot \rho \cdot \frac{\bar{k}}{2} \frac{\cos v_2 - \cos v_3}{(1 - \cos v_3)(1 - \cos v_2)} - A_{32} \cdot \rho \cdot \frac{\bar{k}}{2} \frac{\cos v_1 - \cos v_2}{(1 - \cos v_2)(1 - \cos v_1)} = \\
 &= \bar{k} \left[A_{21} \cdot \frac{\rho}{2} \frac{\cos v_2 - \cos v_3}{(1 - \cos v_3)(1 - \cos v_2)} - A_{32} \cdot \frac{\rho}{2} \frac{\cos v_1 - \cos v_2}{(1 - \cos v_2)(1 - \cos v_1)} \right] \\
 &\dots (4)
 \end{aligned}$$

In den Ausdrücken A wirkt sich die Kleinheit von \bar{k} nur wenig aus, während die B_{ij} die Gestalt $\bar{k} \cdot \frac{\rho}{2} \frac{\cos v_j - \cos v_i}{(1 - \cos v_i)(1 - \cos v_j)}$ annehmen.

Der Ausdruck m_ξ aus (1) enthält somit in Zähler und Nenner jeweils \bar{k} und ist nach Durchkürzen von unserer Größe nicht mehr abhängig. m_η hat die Dimension $[\bar{k}^{-1}]$, ist also wesentlich größer als m_ξ .

Hiemit ist auch die Anschauung bestätigt, daß die Unsicherheit des Neupunktes tangential am gefährlichen Kreis wesentlich größer ist als radial. Auch die Dimension des mittleren Punktlagefehlers M wird $[\bar{k}^{-1}]$.

Je näher also der Neupunkt an den gefährlichen Kreis heranrückt, desto größer wird sein Punktlagefehler, und zwar ist die Größe des Fehlers annähernd proportional dem reziproken Abstand vom gefährlichen Kreis. Diese Beziehung ersieht man leicht, wenn man (4) in (1) einsetzt.

Im allgemeinen Fall $R \neq 1$ besitzt der Zähler von M in (1) die Dimension $[\rho \cdot s^{-1}]$, der Nenner $[\rho^2 s^{-2}]$, M also $[\rho^{-1} \cdot s]$. Abgehen vom Einheitsradius bewirkt also entsprechende lineare Änderung des Punktlagefehlers, für den mittleren Fehler einer Richtung gilt dasselbe. Je größer das Viereck Festpunkte-Neupunkt oder der mittlere Richtungsfehler werden, desto größer wird der mittlere Punktlagefehler.

Folgendes Zahlenbeispiel soll die Ableitungen erläutern:

$$R = 1000.00 \text{ m};$$

$$m^{cc} = \pm 10^{cc}. v_1 = 100^g, v_2 = 150^g, v_3 = 250^g.$$

k	\bar{k}	m_ξ	m_η	M
0,00	1,00	1,1 cm	2,3 cm	2,5 cm
0,50	0,50	1,2 cm	3,0 cm	3,2 cm
0,90	0,10	3,4 cm	80 cm	80 cm
0,98	0,02	3,7 cm	450 cm	450 cm
0,99	0,01	3,7 cm	910 cm	910 cm

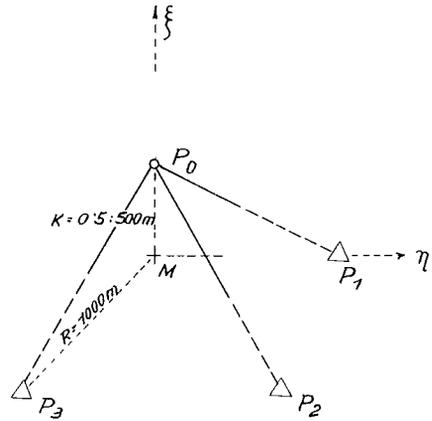


Abb. 2

Für die Praxis ergibt sich folgende Anwendung:

Hat der Neupunkt vom gefährlichen Kreis den Abstand 50 m, so liegt er fünfmal günstiger als bei einem Abstand von 10 m. Erlauben die Umstände nur eine Punktbestimmung in der Nähe des gefährlichen Kreises, lohnt eine radiale Entfernung um einen kleinen Betrag und eine exzentrische Einmessung die minimale Mühe mit gesteigerter Genauigkeit. Wenn möglich, ist der Punkt überdies durch eine Außenrichtung möglichst in der Linie Neupunkt-Kreismittelpunkt zu sichern.

3. Cassini'sche Berechnung und Punktfehler

Wie bekannt ([1], S 33) ist der im Rechenvordruck V 118 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen mit α bezeichnete Faktor auch aus einer einfachen Beziehung der geometrischen Konstruktion abzulesen:

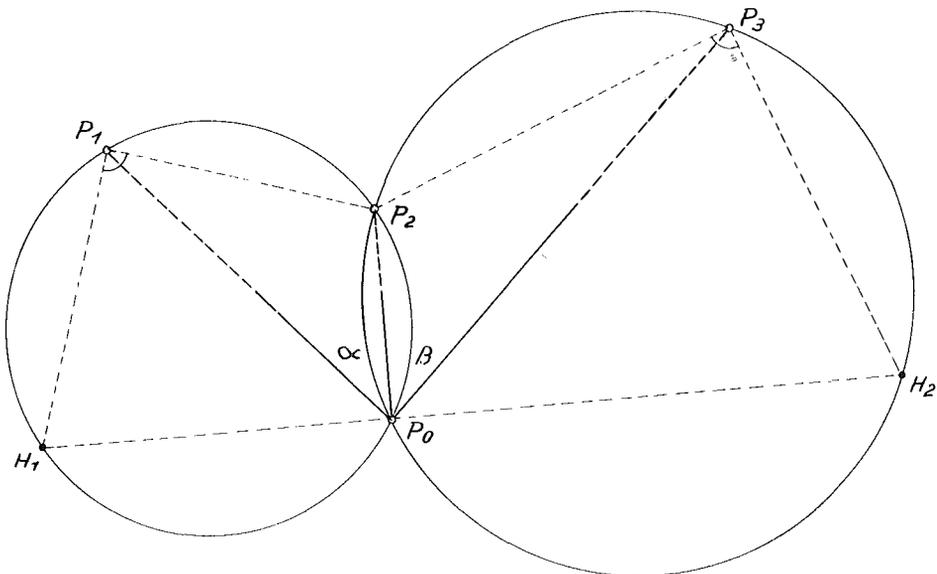


Abb. 3

$$\varkappa = \frac{P_o P_2}{H_1 H_2} \quad \dots (5)$$

Laut [4], S 124 ist nun

$$H_3 P_2 = \frac{H_1 H_2}{|\cot \alpha + \cot \beta|}, \quad \dots (6)$$

H_3 ist der Collins'sche Hilfspunkt (in der Skizze nicht eingezeichnet).

Sinngemäß (5) und (6) in Formel (13) von [4] eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{H_3 P_2}{P_o P_2} &= \frac{1}{\varkappa} \\ M &\doteq \frac{m}{\varrho} \cdot P_o P_2 \cdot \varkappa \cdot |\cot \alpha + \cot \beta| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{1 + \frac{1}{n}} \doteq \\ &\doteq P_o P_2 \cdot \varkappa \cdot |\cot \alpha + \cot \beta| \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{m}{\varrho}, \quad \dots (7) \end{aligned}$$

worin b die kleinste, a die mittlere Seite des aus [2] bekannten Reziprokdreieckes bedeutet.

Zwei Faktoren dieses Terms scheinen in der Berechnung nach Cassini explizit auf, und zwar $|\cot \alpha + \cot \beta|$, welche Summe man leicht aus dem Formular ablesen kann, und \varkappa . Verzichtet man also auf Überprüfung der Güte der Punktlage durch Zirkel und Reziprokdreieck, kann man die Qualität des Schnittes dennoch annähernd aus der Berechnung erkennen. „Großes \varkappa — schlechter Schnitt“ war schon bisher dem Praktiker aus der Erfahrung geläufig. Bei weniger wesentlichen Punkten, Ermittlung vorläufiger Werte oder Operaten geringer Genauigkeitsanforderungen dürfte die Überlegung laut (7) nützlich sein. Bei Mittelung mehrerer Schnittkoordinaten für einen Punkt wird man den Werten aus der Berechnung mit dem kleinsten \varkappa das größte Gewicht zuteilen. Bei dem graphischen Ausgleich mit Hilfe des Horsky'schen Diagrammes und V123 scheinen die Reziprokdreiecke in der Konstruktion auf, obige Überlegung wird überflüssig.

4. Erwiderung auf die Arbeit von Doz. Dr. Smetana

Nun seien noch einige Bemerkungen zu der, wie die zahlreichen Zitate beweisen, gewiß sehr eingehenden Arbeit [4] gestattet.

Das vom Verfasser dort vorgeschlagene und schon in der Praxis angewendete Verfahren hat nämlich *ausschließlich* seine Berechtigung bei graphisch entnommenen oder ähnlich unscharfen Näherungswerten, und zwar nicht nur im Bereich des „gefährlichen Kreises“. Nur dann kommt seine Vermeidung strenger, ausführlicher Rechenoperationen zur Geltung.

Zur Erzielung irgendwelcher Genauigkeitsvorteile gegenüber den in [3] angeführten Verfahren ist es aber gänzlich ungeeignet. Rechnet man das Rechenbeispiel nach der Methode von Cassini durch, erhält man Resultate, die von den angegebenen um nur 2 bzw. 3 cm abweichen. Die Rechendauer beträgt je nach Übung 10 bis 20 Min. Ändert man in [4], Abschnitt III die Visur nach 4—52 um 1^{e} , ändert sich Δx um 3,4 cm; ändert man die Visur nach 24—70 um 1^{e} , dann ändert sich Δx dort um fast 7 cm.

Wie leicht einzusehen, ist die Übereinstimmung mit dem Ergebnis der elektronischen Ausgleichung nur zufällig: hatte *EP 16* nur die vorliegende Bestimmung, kann der „Ausgleich“ auch kein besseres Ergebnis als die Rechnung zeitigen, sei sie nun nach [4] oder nach Cassini durchgeführt. Hatte *EP 16* auch andere Bestimmungen als die angegebene, kann es nur Zufall sein, daß gerade die schlechteste davon schon den endgültigen Wert nach der Ausgleichung vorwegnimmt. Die Zeilen unter Abb. 3 sind wohl schon durch die oben durchgeführte Überschlagsberechnung ad absurdum geführt worden. Nachdem die einzigen, von der Art der „grobten Auf- und Abrundung“ abhängigen Größen in [4], (8) die $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ sind, führt schon eine „gewisse Rechenungenauigkeit bei der Rückrechnung über die Richtungswinkel“ von 2^{e} , wie sie durchaus auftreten kann, zu Rechendifferenzen bis zu 14 cm. Begriffe wie „schlechte Punktbestimmung“, „Singuläre Gleichungsdeterminante“ usw. lassen sich eben nicht durch eine kleine Verschiebung des Näherungswertes umstoßen. Für den oft zitierten Praktiker ist das Verfahren wohl von geringstem Interesse, denn der wird sich in allen Fällen mit Cassini begnügen. Der elektronische Netzausgleich kann Rechenungenauigkeiten der Näherungskordinaten auch aufnehmen, wenn sie 50 cm betragen. Ist der errechnete Wert bereits als endgültig auszuweisen, weil keine weitere Bestimmung vorlag, kann die ungünstige Messung nicht durch Rechnung genauer gemacht werden. Rationeller als die in [4] in solchen Punkten angestrebte besonders hohe Winkelgenauigkeit ist auf jeden Fall eine exzentrische Beobachtung mit normaler Genauigkeit und polare Anhängung, zur Kontrolle möglichst von zwei Exzentern aus.

5. Schluß

Das Ergebnis vorliegender Arbeit ist, daß sich der Punktlagefehler ausgesprochen ungünstig („am gefährlichen Kreis der Approximations-Geometrie“) liegender Punkte unschwierig verbessern läßt. Die Diagnose der Punktlage läßt sich annähernd auch aus einem Routine-Verfahren zur Berechnung stellen.

Literatur:

- [1] *Bock*; Mathematische und geschichtliche Betrachtungen zum Einschneiden. Niedersächs. Landesverm. Amt 1956.
- [2] *Jordan*; Handbuch der Vermessungskunde, 2. Band, 1. Halbband, 1931, S. 435—453.
- [3] *Brunner*; Analyse des Rückwärtseinschneidens. ÖZfV 52 (1964) S. 46—58.
- [4] *Smetana*; Der Einschaltpunkt am gefährlichen Kreis der Approximations-Geometrie. ÖZfV 52 (1964) S. 110—125.