Paper-ID: VGI_196513

Das allgemeine Niveausphäroid in Näherung achter Ordnung

Karl Ledersteger [1]

[1] *Techn. Hochschule Wien, IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (5), S. 137–144

1965

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 5 Baden bei Wien, Ende Oktober 1965 53. Jg.

Das allgemeine Niveausphäroid in Näherung achter Ordnung

Von *Karl Ledersteger*, Wien

Unter einem Niveausphäroid versteht man bekanntlich jede Niveaufläche einer rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnung, wenn ihre Abplattung e im Sinne Helmerts als kleine Größe 2. O. aufgefaßt werden kann. Mit e sind dann auch die statische Abplattung oder die erste Massefunktion J_2 und der wichtige Parameter $\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3/k^2 M$ Größen 2. O., während der erste Formparameter f_4 und die Massefunktion J_4 bereits Größen 4. O. sind. Infolge der rapiden Abnahme der Massefunktionen J_{2i} und der Formparameter f_{2i} genügt praktisch stets die Näherung 4. O. Hingegen erfordern gewisse theoretische Untersuchungen und der notwendige vertiefte Einblick in die Zusammenhänge zwischen dem System der Massefunktionen einer bestimmten Massenanordnung und der Gestalt $S(a, e, f_{2i})$ ihrer Niveauflächen die Kenntnis der Näherungssysteme 6. und 8. O. Eine generelle Entwicklung einschließlich der Glieder 6. O. wurde über meine Anregung erstmals von *G. Oliwa* [1] im Anschluß an Darwin gegeben; sie ließ sich noch etwas vereinfachen [2]. Die folgenden Entwicklungen sind bloß eine Erweiterung auf die Glieder 8. O.

Führt man in die Mittelpunktsgleichung der Ellipse die polaren Koordinaten: Radiusvektor s und zentrische Breite φ vermöge $x = s \cos \varphi$ und $y = s \sin \varphi$ ein, so findet man

$$s^2 (c^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) = a^2 c^2 \qquad \ldots (1)$$

oder

$$s^2 = a^2 [1 - (1 - a^2/c^2) \sin^2 \varphi]$$

Unter weiterer Einführung der geometrischen Abplattung $e = (1 - c/a)$ folgt leicht

$$s^2/a^2 = 1 : \left[1 + \frac{2e - e^2}{(1-e)^2} \sin^2 \varphi\right] \qquad \ldots (1\,a)$$

Setzt man $\sin^2\varphi = t$ und beachtet, daß der Bruch in der Klammer in $(2e + 3e^2 + + 4e^3 + 5e^4 + \ldots)$ entwickelt werden kann, so findet man für die Polargleichung der Ellipse einschließlich der Glieder 4. O. in e und t:

$$s = a\left[1 + \left(-e - \frac{3}{2}e^2 - 2e^3 - \frac{5}{2}e^4\right)t + \left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{2}e^3 + \frac{75}{8}e^4\right)t^2 + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{5}{2}e^3 - \frac{45}{4}e^4\right)t^3 + \frac{35}{8}e^4\,t^4\right]$$

und hieraus unter gleichzeitiger Einführung der Formparameter für den Radiusvektor des Niveausphäroides:

$$l = a\left[1 - e\sin^2\varphi + \left(f_4 - \frac{3}{2}e^2\right)(\sin^2\varphi - \sin^4\varphi) + \right.$$
$$+ \left(f_6 - \frac{1}{2}e^3\right)(4\sin^2\varphi - 9\sin^4\varphi + 5\sin^6\varphi) + \qquad \ldots (2)$$
$$\left. + \left(f_8 - \frac{1}{8}e^4\right)(20\sin^2\varphi - 75\sin^4\varphi + 90\sin^6\varphi - 35\sin^8\varphi)\right]$$

Die Differenz der beiden Radienvektoren ist:

$$(l - s) = \frac{a}{4}[f_4 + 4f_6 + 20f_8 - 5f_6\sin^2\varphi - 55f_8\sin^2\varphi +$$
$$+ 35f_8\sin^4\varphi]\sin^2 2\varphi \qquad \ldots (3)$$

Um allgemeine Relationen für das Rotations-Niveausphäroid 8. Ranges zu finden, kann man entweder mit Helmert die Potentialwerte am Pol und im Äquator gleichsetzen oder mit Darwin die Koeffizienten der zonalen Kugelfunktionen P_{2i} Null setzen, wobei man von

$$U_8 = \frac{k^2M}{a}\left[\left(\frac{a}{l}\right) - J_2P_2\left(\frac{a}{l}\right)^3 - J_4P_4\left(\frac{a}{l}\right)^5 - J_6P_6\left(\frac{a}{l}\right)^7 - \right.$$
$$\left. - J_8P_8\left(\frac{a}{l}\right)^9 + \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}\left(\frac{l}{a}\right)^2(1 - P_2)\right] \qquad \ldots (4)$$

auszugehen hat. Wir schreiben zunächst (2) in der Form:

$$\frac{l}{a} = 1 + \left(-e + f_4 - \frac{3}{2}e^2 + 4f_6 - 2e^3 + 20f_8 - \frac{5}{2}e^4\right)t +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}e^2 - f_4 - 9f_6 + \frac{9}{2}e^3 - 75f_8 + \frac{75}{8}e^4\right)t^2 + \qquad \ldots (5)$$
$$+ \left(5f_6 - \frac{5}{2}e^3 + 90f_8 - \frac{45}{4}e^4\right)t^3 + \left(\frac{35}{8}e^4 - 35f_8\right)t^4$$

Wegen der Multiplikation mit $\bar{\varepsilon} = \omega^2a^3/k^2M$ genügt es, das Quadrat dieses Ausdruckes nur bis einschließlich der Glieder 6. O. zu entwickeln:

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 = 1 + (-2e + 2f_4 - 3e^2 + 8f_6 - 4e^3)\,t + (4e^2 - 2f_4 + 12e^3 -$$
$$- 2ef_4 - 18f_6)\,t^2 + (-8e^3 + 2ef_4 + 10f_6)\,t^3 \qquad \ldots (6)$$

Sodann bilden wir den Reziprokwert von (5):

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{l}\right) = 1 &+ \left(e - f_4 + \frac{3}{2}e^2 - 4f_6 + 2e^3 - 20f_8 + \frac{5}{2}e^4\right)t + \left(f_4 - \frac{1}{2}e^2 + 9f_6 - \right.\\ &\left. - \frac{3}{2}e^3 - 2ef_4 - \frac{25}{8}e^4 - 3e^2f_4 - 8ef_6 + f_4^2 + 75f_8\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}e^3 - \right. \qquad \ldots (7)\\ &\left. - 5f_6 + 2ef_4 + \frac{9}{4}e^4 + 3e^2f_4 + 18ef_6 - 90f_8 - 2f_4^2\right)t^3 + \left(- \frac{5}{8}e^4 - 10ef_6 + \right.\\ &\left. + 35f_8 + f_4^2\right)t^4\end{aligned}$$

Die ungeraden Potenzen dieses Quotienten werden wegen ihrer Multiplikation mit den Massefunktionen J_{2i} in ihrer Genauigkeit schrittweise vermindert:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{l}\right)^3 &= 1 + \left(3e - 3f_4 + \frac{9}{2}e^2 + 6e^3 - 12f_6\right)t + \left(3f_4 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{2}e^3 - \right.\\ &\quad \left. - 12ef_4 + 27f_6\right)t^2 + \left(- \frac{1}{2}e^3 + 12ef_4 - 15f_6\right)t^3; \qquad \ldots (8)\\ \left(\frac{a}{l}\right)^5 &= 1 + \left(5e - 5f_4 + \frac{15}{2}e^2\right)t + \left(\frac{15}{2}e^2 + 5f_4\right)t^2;\\ \left(\frac{a}{l}\right)^7 &= 1 + 7et; \qquad \left(\frac{a}{l}\right)^9 = 1\end{aligned}$$

Die Formeln (6 u. 7) können geprüft werden, indem man für den Massenpunkt ($J_{2i} = 0$) das Potential (4) im Pol ($t = 1,\ l = c$) und im Äquator ($t = 0,\ l = a$) gleichsetzt:

$$U_{8,A} = \frac{k^2M}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\right) = U_{8,P} = \frac{k^2M}{a}\left(\frac{a}{c}\right) \qquad \ldots (9)$$

Denn (7) liefert für $t = 1$ leicht: $\dfrac{a}{c} = 1 + e + e^2 + e^3 + e^4$, also richtig: $\bar{\varepsilon} = 2e + 2e^2 + 2e^3 + 2e^4$. Andererseits ergibt (6) für $t = 1$ ähnlich: $(c/a)^2 = (1 - e)^2$.

Die Auflösung der Legendreschen Polynome:

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{1}{2}(3t - 1); \qquad P_4 = \frac{1}{8}(35t^2 - 30t + 3);\\ P_6 &= \frac{1}{16}(231t^3 - 315t^2 + 105t - 5); \qquad \ldots (10)\\ P_8 &= \frac{1}{128}(6435t^4 - 12012t^3 + 6930t^2 - 1260t + 35)\end{aligned}$$

nach t liefert:

$$\begin{aligned}t &= \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}; \quad t^2 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{1}{5}; \quad t^3 = \frac{16}{231}P_6 + \frac{24}{77}P_4 + \\ &+ \frac{10}{21}P_2 + \frac{1}{7}; \quad t^4 = \frac{128}{6435}P_8 + \frac{64}{495}P_6 + \frac{48}{143}P_4 + \frac{40}{99}P_2 + \frac{1}{9} \quad \ldots (11)\end{aligned}$$

Damit aber treten in (4) auch die Produkte der zonalen Kugelfunktionen auf:

$$
\begin{aligned}
&P_2{}^2 = \frac{18}{35} P_4 + \frac{2}{7} P_2 + \frac{1}{5}; \qquad P_2 P_4 = \frac{5}{11} P_6 + \frac{20}{77} P_4 + \frac{2}{7} P_2; \\
&P_2 P_6 = \frac{28}{65} P_8 + \frac{14}{55} P_6 + \frac{45}{143} P_4; \qquad \ldots (12) \\
&P_4{}^2 = \frac{490}{1287} P_8 + \frac{20}{99} P_6 + \frac{162}{1001} P_4 + \frac{100}{693} P_2 + \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man in den Gleichungen (6—8) die Koeffizienten der Potenzen von t der Reihe nach mit α, β, γ, δ und wählt zur Unterscheidung die Exponenten von a/l, resp. l/a als Indizes, so kann man (4) in der Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
&U_8 \cdot \frac{a}{k^2 M} = 1 + \alpha_1 \left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + \beta_1 \left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \gamma_1 \left(\frac{16}{231} P_6 + \right. \\
&\left. + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right) + \delta_1 \left(\frac{128}{6435} P_8 + \frac{64}{495} P_6 + \frac{48}{143} P_4 + \frac{40}{99} P_2 + \frac{1}{9}\right) - \\
&- J_2 P_2 \left[1 + \alpha_3 \left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + \beta_3 \left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \gamma_3 \left(\frac{16}{231} P_6 + \right.\right. \qquad \ldots (13) \\
&\left.\left. + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right)\right] - J_4 P_4 \left[1 + \alpha_5 \left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + \beta_5 \left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{5}\right)\right] - J_6 P_6 \left[1 + \alpha_7 \left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right)\right] - J_8 P_8 + \frac{1}{3} \bar{\varepsilon} (1 - P_2) \left[1 + \alpha_2 \left(\frac{2}{3} P_2 + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{3}\right) + \beta_2 \left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \gamma_2 \left(\frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Unter Einführung der Produkte (12) ordnet man schließlich alles nach den Legendreschen Polynomen und erhält durch Nullsetzen der Koeffizienten von P_2, P_4, P_6 und P_8 vier Gleichungen, welche die vier Massefunktionen mit $\bar{\varepsilon}$, e und den drei Formparametern, also letzthin mit ω und der Fläche S in Näherung 8. O. verbinden:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{2}{3} e - \frac{1}{3} \bar{\varepsilon} - \frac{2}{21} f_4 + \frac{5}{7} e^2 - \frac{2}{21} e \bar{\varepsilon} + \frac{2}{21} f_6 + \frac{5}{7} e^3 - \frac{4}{21} e f_4 + \frac{1}{21} e^2 \bar{\varepsilon}\right) + \right. \\
&+ \left(\frac{485}{693} e^4 - \frac{2}{7} e^2 f_4 - \frac{4}{99} e f_6 + \frac{80}{99} f_8 + \frac{16}{693} f_4{}^2 + \frac{64}{693} e^3 \bar{\varepsilon} - \frac{80}{693} \bar{\varepsilon} f_6 - \right. \\
&\left.\left. - \frac{16}{693} e \bar{\varepsilon} f_4\right)\right] - J_2 \left[\left(1 + \frac{11}{7} e - \frac{2}{7} f_4 + 3 e^2\right) + \left(\frac{1129}{231} e^3 - \frac{8}{11} e f_4 + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{832}{77} f_6\right)\right] - J_4 \left[\frac{20}{21} e + \left(\frac{460}{231} f_4 + \frac{670}{231} e^2\right)\right] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{385} (88 f_4 - 44 e^2 + 192 f_6 - 72 e^3 + 64 e f_4 + 88 e \bar{\varepsilon} - 56 \bar{\varepsilon} f_4 + 68 e^2 \bar{\varepsilon}) + \\
&+ \frac{1}{5005} (- 1115 e^4 + 1248 e^2 f_4 + 2128 e f_6 + 4200 f_8 - 296 f_4{}^2 + 272 e^3 \bar{\varepsilon} + \\
&+ 296 e \bar{\varepsilon} f_4 - 1432 \bar{\varepsilon} f_6) - J_2 \left[\frac{1}{385} (396 e + 798 e^2 + 12 f_4) + \frac{1}{5005} (17\,382 e^3 - \right.
\end{aligned}
$$

$$- 336 e f_4 + 1044 f_6)\Big] - J_4 \left[\left(1 + \frac{195}{77} e\right) + \frac{1}{1001} (6696 e^2 - 606 f_4)\right] -$$

$$- \frac{210}{143} e J_6 = 0; \qquad \ldots (14)$$

$$\frac{1}{231} (8 e^3 - 80 f_6 + 32 e f_4 - 32 e^2 \bar{\varepsilon} + 16 \bar{\varepsilon} f_4) + \frac{1}{3465} (260 e^4 + 720 e^2 f_4 -$$

$$- 160 e f_6 - 5920 f_8 - 32 f_4^2 - 608 e^3 \bar{\varepsilon} + 32 e \bar{\varepsilon} f_4 + 1120 \bar{\varepsilon} f_6) - J_2 \Big[\frac{1}{77} (12 e^2 +$$

$$+ 24 f_4) + \left(\frac{64}{165} e^3 + \frac{256}{385} e f_4 + \frac{32}{77} f_6\right)\Big] - J_4 \left[\frac{50}{33} e + \frac{1}{693} (3165 e^2 + 10 f_4)\right] -$$

$$- J_6 \left(1 + \frac{581}{165} e\right) = 0;$$

$$\frac{1}{1287} \Big(- 2288 e^4 + 1024 e f_6 + 1024 e^2 f_4 + 896 f_8 - \frac{512}{5} f_4^2 + 2080 e^3 \bar{\varepsilon} -$$

$$- 640 \bar{\varepsilon} e f_4 - 320 \bar{\varepsilon} f_6 - J_8\Big) = 0.$$

Auflösung nach den Massefunktionen liefert:

$$3 J_2 = \left[2 e - \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{9}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{2}{7} f_4\right] + \left[\frac{2}{7} f_6 - \frac{25}{49} e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{2}{7} \bar{\varepsilon} f_4 - \frac{10}{49} e f_4\right] +$$

$$+ \Big[\frac{593}{11319} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{5980}{11319} e^2 f_4 - \frac{3470}{147} e f_6 + \frac{80}{33} f_8 - \frac{52}{1617} f_4^2 + \frac{192}{539} \bar{\varepsilon} e f_4 +$$

$$+ \frac{2416}{231} \bar{\varepsilon} f_6\Big]$$

$$J_4 = \left[- \frac{4}{5} e^2 + \frac{4}{7} e \bar{\varepsilon} + \frac{8}{35} f_4\right] + \Big[\frac{4}{5} e^3 - \frac{50}{49} e^2 \bar{\varepsilon} + \frac{192}{385} f_6 - \qquad \ldots (15)$$

$$- \frac{904}{2695} e f_4 - \frac{52}{385} \bar{\varepsilon} f_4\Big] + \Big[- \frac{1}{5} e^4 + \frac{226}{343} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{49496}{2697695} e^2 f_4 -$$

$$- \frac{218208}{385385} e f_6 + \frac{120}{143} f_8 + \frac{576}{7007} f_4^2 - \frac{1084}{5005} \bar{\varepsilon} f_6 + \frac{213912}{385385} \bar{\varepsilon} e f_4\Big];$$

$$J_6 = \left[\frac{8}{7} e^3 - \frac{20}{21} e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{96}{231} e f_4 - \frac{80}{231} f_6 + \frac{40}{231} \bar{\varepsilon} f_4\right] + \Big[- \frac{12}{7} e^4 +$$

$$+ \frac{320}{147} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{43888}{53361} e^2 f_4 + \frac{1072}{7623} e f_6 - \frac{1184}{693} f_8 + \frac{416}{24255} f_4^2 - \frac{16864}{53361} \bar{\varepsilon} e f_4 +$$

$$+ \frac{320}{693} \bar{\varepsilon} f_6\Big];$$

$$J_8 = \frac{1}{1287} \Big(- 2288 e^4 + 1024 e^2 f_4 + 1024 e f_6 + 896 f_8 - \frac{512}{5} f_4^2 + 2080 e^3 \bar{\varepsilon} -$$

$$- 640 \bar{\varepsilon} e f_4 - 320 \bar{\varepsilon} f_6\Big)$$

Hieraus gewinnt man schließlich, ausgehend von der Näherung 6. O. und von rückwärts mit f_8 beginnend, die Formparameter in Funktion von $(e, \bar{\varepsilon}, J_{2i})$:

$$f_4 = \left[\frac{35}{8} J_4 + \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e \bar{\varepsilon}\right] + \left[\frac{63}{10} J_6 + \frac{143}{8} e J_4 - \frac{35}{16} \bar{\varepsilon} J_4 + \frac{18}{5} e^3 - \right.$$
$$- \frac{3}{2} e^2 \bar{\varepsilon} + \left.\frac{5}{4} e \bar{\varepsilon}^2\right] + \left[\frac{45639}{4480} J_8 + \frac{891}{20} e J_6 - \frac{24}{5} \bar{\varepsilon} J_6 + \frac{237}{4} e^2 J_4 + \right.$$
$$+ \frac{75}{32} \bar{\varepsilon}^2 J_4 - \frac{179}{8} e \bar{\varepsilon} J_4 + \frac{105}{16} J_4{}^2 + \frac{272}{35} e^4 - \frac{382}{35} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{40}{7} e^2 \bar{\varepsilon}^2 -$$
$$\left. - \frac{75}{56} e \bar{\varepsilon}^3\right];$$

$$f_6 = \left[- \frac{231}{80} J_6 - \frac{21}{4} e J_4 + \frac{35}{16} \bar{\varepsilon} J_4 - \frac{9}{10} e^3 + 2 e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{5}{4} e \bar{\varepsilon}^2\right] + \left[- \frac{15873}{2240} J_8 - \right.$$
$$- \frac{2001}{80} e J_6 + \frac{351}{80} \bar{\varepsilon} J_6 - \frac{271}{8} e^2 J_4 - \frac{65}{32} \bar{\varepsilon}^2 J_4 + \frac{151}{8} e \bar{\varepsilon} J_4 - \qquad \ldots (16)$$
$$\left. - \frac{315}{32} J_4{}^2 - \frac{584}{105} e^4 + \frac{1523}{210} e^3 \bar{\varepsilon} - \frac{39}{14} e^2 \bar{\varepsilon}^2 + \frac{65}{56} e \bar{\varepsilon}^3\right];$$

$$f_8 = \frac{1287}{896} J_8 + \frac{33}{10} e J_6 - \frac{33}{32} \bar{\varepsilon} J_6 + \frac{9}{2} e^2 J_4 + \frac{25}{32} \bar{\varepsilon}^2 J_4 - \frac{15}{4} e \bar{\varepsilon} J_4 + \frac{35}{16} J_4{}^2 +$$
$$+ \frac{55}{56} e^4 - \frac{11}{7} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{15}{14} e^2 \bar{\varepsilon}^2 - \frac{25}{56} e \bar{\varepsilon}^3$$

Die Gleichungssysteme (14 — 16) können vollständig durch die Anwendung auf das MacLaurinsche Ellipsoid und auf die Niveauflächen des Massenpunktes kontrolliert werden. Für das homogene Ellipsoid gilt allgemein

$$J_{2i} = \frac{3 (-1)^{i-1}}{(2i+1)(2i+3)} (2e - e^2)^i,$$

also

$$J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2); \quad J_4 = - \frac{12}{35} e^2 + \frac{12}{35} e^3 - \frac{3}{35} e^4;$$
$$J_6 = \frac{8}{21} e^3 - \frac{4}{7} e^4 \ldots ; \quad J_8 = - \frac{16}{33} e^4 \ldots \qquad \ldots (17)$$

wozu noch die MacLaurinsche Gleichgewichtsbedingung tritt:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e + \frac{22}{35} e^2 + \frac{2}{5} e^3 + \frac{272}{1155} e^4 + \ldots \qquad \ldots (18)$$

Andererseits hat man für die Niveauflächen des Massenpunktes

$$\bar{\varepsilon} = 2e + 2e^2 + 2e^3 + 2e^4 + \ldots \qquad \ldots (19)$$

während man für die Formparameter findet:

$$f_4 = -\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{5}e^3 + \frac{3}{35}e^4 + \ldots; \quad f_6 = -\frac{19}{10}e^3 + \frac{38}{35}e^4 \ldots; \qquad \ldots (19)$$

$$f_8 = -\frac{81}{56}e^4 \ldots$$

Das Gleichungssystem (15) zeigt, daß mit $(e, \bar{\varepsilon}, f_{2i}) = (M, a, e, \omega, f_{2i})$, also mit den Stokesschen Elementen M, ω und $S(a, e, f_{2i})$ das System der Massefunktionen J_{2i} und damit die „wesentliche" Massenkonfiguration festliegen. Bezeichnen wir alle Massenkonfigurationen, welche aus der wesentlichen Massenkonfiguration durch Massenverschiebungen hervorgehen, bei denen die Massenmomente $K_{2i} = J_{2i}a^{2i}$ unverändert bleiben, als „unwesentlich", so gehört zu jedem System der Stokesschen Elemente, wenn überhaupt, so nur eine einzige wesentliche Massenkonfiguration. Jede folgende Näherung führt zwei weitere Größen, nämlich eine Massenfunktion und einen Formparameter ein. So hat man der Reihe nach:

$$3J_2 = 2e - \bar{\varepsilon}; \quad J_4 - \frac{8}{35}f_4 = -\frac{4}{5}e^2 + \frac{4}{7}e\bar{\varepsilon}; \qquad \ldots (20)$$

$$J_6 + \frac{80}{231}f_6 = \frac{8}{7}e^3 - \frac{20}{21}e^2\bar{\varepsilon} - \frac{96}{231}ef_4 + \frac{40}{231}\bar{\varepsilon}f_4;$$

$$J_8 - \frac{896}{1287}f_8 = \frac{1}{1287}\Big(-2288e^4 + 1024e^2f_4 + 1024ef_6 - \frac{512}{5}f_4^2 + 2080e^3\bar{\varepsilon} - 640\bar{\varepsilon}ef_4 - 320\bar{\varepsilon}f_6\Big)$$

Man sieht, daß von den Entwicklungen des Parameters $\bar{\varepsilon}$ und der Formparameter f_{2i} sowie der Massefunktionen J_{2i} nach den Potenzen der Abplattung e stets nur das Hauptglied auftritt:

$$\bar{\varepsilon} = xe; \; f_4 = -\varkappa e^2; \; f_6 = -\lambda e^3; \; f_8 = -\mu e^4;$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(2 - x)e; \; J_4 = -\xi e^2; \; J_6 = +\eta e^3; \; J_8 = -\zeta e^4 \qquad \ldots (21)$$

Die Formeln (20) sind von grundlegender Bedeutung für das vertiefte Problem der Stokesschen Elemente [3].

Abschließend sei zur Illustration noch das Problem der auf die MacLaurinschen Ellipsoide folgenden Gleichgewichtsfiguren mit dem stetigen Dichtegesetz

$$\rho = \rho_{\max}\left[1 - \nu\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2 \qquad \ldots (22)$$

gestreift. Bei diesen kann die vorerst fehlende Gleichgewichtsbedingung durch die geometrische Eigenschaft ersetzt werden, daß die Änderung des Formparameters f_4 mit wachsendem Äquatorradius a an der Oberfläche ein Minimum besitzt: $df_4/da = 0$.

Wegen der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit und der Massenmomente K_{2i} in der Schar der äußeren Niveauflächen ist unmittelbar:

$$a(d\bar{\varepsilon}/da) = 3\,\bar{\varepsilon};\quad a(dJ_{2i}/da) = -\,2i\,J_{2i} \qquad \ldots (23)$$

Damit ergibt sich durch Differentiation der ersten Gleichung (16) leicht in Näherung 6. O.:

$$a(df_4/da) = \left[-\frac{35}{2}J_4 - \frac{15}{2}e\,\bar{\varepsilon} - \frac{189}{5}J_6 - \frac{143}{2}eJ_4 + \frac{35}{16}\bar{\varepsilon}\,J_4 - \frac{9}{2}e^2\bar{\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{15}{2}e\,\bar{\varepsilon}^2\right] + \left[7e - \frac{5}{2}\bar{\varepsilon} + \frac{143}{8}J_4 + \frac{54}{5}e^2 - 3e\,\bar{\varepsilon} + \frac{5}{4}\bar{\varepsilon}^2\right](ade/da)$$

und zusammen mit

$$ade/da = -\,2e + \frac{5}{2}\bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{9}{7}e\,\bar{\varepsilon} - \frac{5}{2}\bar{\varepsilon}^2 - \frac{2}{7}f_4$$

schließlich:

$$a\,(df_4/da) = \left[-\frac{35}{2}J_4 + 15e\,\bar{\varepsilon} - 14e^2 - \frac{25}{4}\bar{\varepsilon}^2\right] + \left[14e^3 - \frac{319}{14}e^2\,\bar{\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{25}{7}e\,\bar{\varepsilon}^2 + \frac{75}{8}\bar{\varepsilon}^3 + \frac{144}{11}f_6 - \frac{832}{77}ef_4 + \frac{376}{77}\bar{\varepsilon}\,f_4\right] \qquad \ldots (24)$$

Die Bedingung $df_4/da = 0$ liefert hieraus eine Bestimmungsgleichung für die Massefunktion J_4:

$$J_4 = \left[\frac{6}{7}e\,\bar{\varepsilon} - \frac{4}{5}e^2 - \frac{5}{14}\bar{\varepsilon}^2\right] + \left[\frac{4}{5}e^3 - \frac{319}{175}e^2\,\bar{\varepsilon} + \frac{10}{49}e\,\bar{\varepsilon}^2 + \frac{15}{28}\bar{\varepsilon}^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{288}{385}f_6 - \frac{1664}{2695}ef_4 + \frac{752}{2695}\bar{\varepsilon}\,f_4\right] \qquad \ldots (25)$$

Die Gleichgewichtsfiguren mit stetigem Dichtegesetz liegen demnach in Näherung 4. O. bereits eindeutig fest, da sich ja der Formparamter f_4 aus der Kombination von (25) mit der ersten Gleichung (16) ergibt:

$$f_4 = \frac{5}{4}e\,\bar{\varepsilon} - \frac{25}{16}\bar{\varepsilon}^2 \qquad \ldots (26)$$

In diesem Sinne dürfen diese Gleichgewichtsfiguren als „einparametrig" bezeichnet werden. Hingegen erfordert eine eindeutige Festlegung in Näherung 6. O. die zusätzliche Kenntnis des zweiten Formparameters f_6.

Literatur:

[1] *Oliwa, G.:* Das äußere Schwerefeld eines Rotationssphäroides, ÖZfV 48 (1960), Nr. 4, 113–119.

[2] *Ledersteger, K.:* Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde, Sonderheft 24 der ÖZfV, Wien 1964.

[3] *Ledersteger, K.:* Das Theorem von Stokes Poincaré und die sinnvolle Wahl der Stokesschen Elemente, Sitzungsbericht d. Öst. Akad. d. Wiss. (im Druck).