Zur Berechnung des mittleren Brechungsverhältnisses aus den meteorologischen Messungen an den Streckenendpunkten bei Distanzmessungen mittels Mikrowellenträgern

Sivert Bakkelid [1]

[1] *Norges geografiske oppmäling, Boks 1368, Oslo-Vika, Norwegen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (2), S. 40–45

1965

weiters auf den Fall $n = 6$ des allgemeinen Problems der Projektivität (siehe oben Nr. 1) übertragen werden können.

Literatur:

[1] Enzykl. Math., Wiss. III A B 5 *(A. Schönflies)*, S. 442, sowie III C 11 *(L. Berzolari)*, S. 2032, Anm. 620—622.

[2] *A. Cayley*, Proceedings of the London math. soc. (1) 4 (1873), S. 396, sowie *A. Cayley*, The collected math. papers, Cambridge 1895, S. 200.

[3] *M. Chasles*, Nouv. Ann. de math., 14 (1855), S. 50.

[4] *R. Sturm*, Math. Ann. I (1869), S. 533—574.

[5] Ein Modell zur mechanischen Ausführung einer solchen Bewegung wurde nach den Angaben des Verfassers im eingangs erwähnten Bundesamt hergestellt.

[6] *J. Krames*, Darstellende und kinematische Geometrie, 2. Aufl. Wien 1952, Nr. 34.

Zur Berechnung des mittleren Brechungsverhältnisses aus den meteorologischen Messungen an den Streckenendpunkten bei Distanzmessungen mittels Mikrowellenträgern

Von *Sivert Bakkelid*, Oslo

Zusammenfassung

Der Maßstab elektronischer Entfernungsmessungen wird durch die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen in der Atmosphäre bestimmt. Ihre Ermittlung erfolgt mit Hilfe des mittleren Brechungskoeffizienten, der eine Funktion der Mittelwerte der Lufttemperatur, des Luftdruckes und des Dampfdruckes längs des Wellenweges ist. Da die zur Bestimmung der Mittelwerte der meteorologischen Elemente notwendigen direkten Messungen längs des Wellenweges im allgemeinen nicht möglich sind, werden diese näherungsweise und unter Annahme eines dreifach linearen Aufbaues des atmosphärischen Feldes nur aus den meteorologischen Messungen an den Streckenendpunkten bestimmt.

Ist dieser Vorgang an sich schon problematisch, so ergeben sich aber außerdem noch, wie der Verfasser zeigt, Probleme, je nachdem wie der Berechnungsgang für den mittleren Brechungskoeffizienten angesetzt wird, ob als Integration für den Bereich $T_2 - T_1$, ob für den Streckenmittelpunkt oder durch Mittelung der zu den Endpunkten gehörenden Brechungskoeffizientenwerte. Es ergibt sich dabei, daß außer für extremste Temperatur- und Dampfdruckverhältnisse, d. i. $(T_2 - T_1)/T_1 <$ $< 1/20$ bzw. $e < 22$ Torr die Rechnung mit Mittelwerten T_m, p_m und e_m zulässig ist.

Eine weitere Untersuchung gilt der Berechnung des mittleren Dampfdruckes unter verschiedenen Linearitätsannahmen. Sie ergeben Differenzen, die nicht mehr vernachlässigbar sind, eine Entscheidung über die physikalische Realität der verschiedenen Ansätze kann jedoch nicht getroffen werden.

Abstract

The scale of electronic distance measurements is defined by the average propagation velocity of the carrier in the atmosphere. It is determined by means of the refraction coefficient which in turn is a function of the mean values of the atmospheric temperature, the pressure and the vapor pressure along the wave path. Since in general direct measurements along the path, necessary for the determination of the average values of the meteorological elements, are not possible, these elements are approximately determined from meteorological measurements at the terminals assuming a threefold-linear composition of the atmospheric field.

This procedure, in itself being rather problematic, gives rise to additional problems, as the author points out, by the way the computation of the refraction coefficient is approached, i. e. whether as integration over the region $T_2 - T_1$, or for the central point of the side, or by taking the mean of the refraction coefficients of the terminals. It is shown that the computation with mean values T_m, p_m and e_m is permissible, except for extreme conditions in temperature and vapor pressure.

Further investigations concern the calculation of the mean vapor pressure, using different linear assumptions, e. g. linear variation of e, or of t, or of the relative humidity. The resulting discrepancies are not to be tolerated, a decision on the physical reality of the different suppositions, however, can not be given.

Wir suchen das mittlere Brechungsverhältnis n längs des Strahles [2, S. 18—22].

Wenn wir die Änderungen von Druck, Temperatur und Feuchtigkeit längs des Strahles kennen, können wir n durch Integration längs des Strahles zwischen den Endpunkten P_1 und P_2 berechnen mit

$$n = \frac{1}{s} \int_1^2 n' \, ds = 1 + Q \cdot 10^{-6}, \qquad \ldots (1)$$

worin n' das Brechungsverhältnis in einem beliebigen Punkt des Strahles und $Q = (n - 1) \cdot 10^6$ ist.

Für elektromagnetische Wellen im Wellenbereich 10—100 cm erhält man n' aus der Formel von *Essen und Froome* mit

$$Q' = (n' - 1) \cdot 10^6 = \frac{103{,}49}{T'} (p' - e') + \frac{86{,}26}{T'} \left(1 + \frac{5748}{T'}\right) e'. \qquad \ldots (2)$$

Nimmt man an, daß p (Luftdruck), T (Lufttemperatur) und e (Dampfdruck) sich zwischen den beiden Endpunkten linear ändern, so findet man, wenn wir

$$T_2 - T_1 = \Delta T \text{ und } 103{,}49\,(p_m - e_m) + 86{,}26\, e_m = 75000$$

setzen,

$$Q = \frac{75000}{T_1}\left[1 - \frac{\Delta T}{2 T_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right] + \frac{500000}{T_1^2}\left[1 - \frac{\Delta T}{T_1} + \left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right]. \qquad \ldots (3)$$

Zur Berechnung der Zahlenkonstanten wurden die Annahmen in [2] benutzt. Sie lauten:

$$T_1 = +273^0 K,\; T_2 = +298\,^0 K$$
$$e_1 = 4{,}6 \; Torr,\; e_2 = 23{,}8 \; Torr$$
$$p_m = 720 \; Torr$$
$$e_m = 14{,}2 \; Torr$$

(e_1, e_2: Sättigungsdampfdruck bei T_1 und T_2)

Es ist allerdings nicht üblich, Q aus dieser Formel zu berechnen, sondern man setzt Q gleich Q_m *im Mittelpunkt des Strahles* und erhält dann

$$Q \sim Q_m \frac{75000}{T_1}\left[1 - \frac{\Delta T}{2 T_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right] + \frac{500\,000}{T_1^2}\left[1 - \frac{\Delta T}{T_1} + \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right]. \qquad \ldots (4)$$

Aber auch der Mittelwert von Q *in den Endpunkten des Strahles* wird verwendet:

$$Q \sim \frac{Q_1 + Q_2}{2} = Q_{12} = \frac{75000}{T_1}\left[1 - \frac{\Delta T}{2 T_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{500000}{T_1^2}\left[1 - \frac{\Delta T}{T_1} + \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2\right]. \qquad \ldots (5)$$

Die Fehler, die hiedurch entstehen, sind die folgenden:

$$1.\ \Delta Q_{12} = Q_{12} - Q = \left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2 \cdot (44 + 3{,}1\, e_m),$$

$$2.\ \Delta Q_m = Q_m - Q = -\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2 \cdot (22 + 1{,}55\, e_m) = -\frac{1}{2}\Delta Q_{12}.$$

(Die Zahlenfaktoren entstehen durch Annahme von $T_1 \sim (T_1 + T_2) \,.\, {}^1/_2 = 285{,}5^0\ K$.)

Normalerweise ist $\frac{\Delta T}{T} < \frac{1}{20}$ und $e < 22$ *Torr*. Damit sind

$$\Delta Q_{12} < 0{,}25 \text{ und } \Delta Q_m < 0{,}13.$$

Die Einführung der Mittelwerte von T, p und e aus den Endpunktmessungen in die Formel (2) ergibt also nur einen unbeträchtlichen Fehler.

Wir wollen nun einige Betrachtungen zu den vorausgesetzten linearen Änderungen von T, p und e zwischen den Endpunkten P_1 und P_2 machen.

Zuerst eine Information über die Art und Größe der Einzeleinflüsse von T, p und e auf Q durch die folgenden Differentialformeln.

Haben die benutzten Mittelwerte von T, p und e die Fehler dT, dp und de, so betragen die entsprechenden Fehler von Q

$$dQ_T = \left(\frac{-\,103{,}49\,p + 17{,}23\,e}{T^2} - \frac{991\,644}{T^3}\right) dT$$

$$dQ_p = \frac{103{,}49}{T}\, dp$$

$$dQ_e = \left(\frac{-17{,}23}{T} + \frac{495\,822}{T^2}\right) de$$

In der Atmosphäre zeigen sich folgende Verteilungsverhältnisse für die Temperatur, den Druck und die Luftfeuchtigkeit.

Die Temperatur zeigt oft eine unregelmäßige Änderung zwischen den beiden Endpunkten, auch wenn man von den Gipfelanomalien [2, S. 23—31] absieht. Stehen nur Messungen an den beiden Endpunkten zur Verfügung, so ist es am wahrscheinlichsten, eine lineare Änderung anzunehmen. Wir wissen nämlich, daß z. B. vertikale Konvektionsströmungen, wie sie im Sommer bei Schönwetter nachmittags üblich sind, einen ganz konstanten, vertikalen Temperaturgradienten hervorrufen.

Weiters wird ein allfälliger Wind auch horizontale Schwankungen der Temperatur ausgleichen, falls die Topographie nicht zu unregelmäßig ist.

Der Luftdruck hat normalerweise eine verhältnismäßig stabile und gesetzmäßige Verteilung und kann immer mit ausreichender Genauigkeit bestimmt oder berechnet werden.

Nun ist noch der Dampfdruck zu betrachten, der nicht direkt gemessen wird. Wir messen mit Aspirationspsychrometern t und t', die Temperaturen des trockenen und feuchten Thermometers. Hieraus kann e direkt nach der folgenden bekannten Formel gefunden werden:

$$e = E' - Ap\,(t - t'). \qquad \ldots (6)$$

Hierin ist E' der Sättigungsdruck für die Temperatur t' und A die Psychrometerkonstante. Nach [3, S. 85] beträgt ihr von *A. Sprung* [4] angegebener und heute als allgemein gültig angenommener Wert je nach Aggregatzustand

$$A_{WASSER} = 0{,}000662 \text{ bzw. } A_{EIS} = 0{,}000569 \text{ [5].}$$

Weiters ist es auch möglich, zur Berechnung von e den Umweg über die relative Feuchtigkeit (RF) zu gehen.

Wegen mangelnder Kenntnis der wirklichen Verhältnisse kann man also e unter verschiedenen Voraussetzungen berechnen, je nach dem, ob man eine lineare Änderung

1. des Dampfdruckes e,
2. der Temperatur der feuchten Thermometer t' oder
3. der relativen Feuchtigkeit RF

annimmt.

Um die Berechnungen durchzuführen, muß E' als eine Funktion von t' ausgedrückt werden. Zwischen 0^0 und $+15^0$ C kann man für unseren Zweck für den Sättigungsdampfdruck E' setzen:

$$E' = \frac{1}{60} t'^2 + 0{,}3\, t' + 4{,}65 \qquad \ldots (7)$$

und findet damit weiter

$$e = \frac{1}{60} t'^2 - 662.10^{-6} \cdot p\,(t - t') + 0{,}3\, t' + 4{,}65. \qquad \ldots (8)$$

Damit lassen sich für die obigen drei Fälle folgende Lösungen bestimmen:
1. Wenn e eine lineare Änderung hat, ist der Mittelwert e_m längs des Strahles durch folgende Gleichung gegeben:

$$e_m = \frac{e_1 + e_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{60}(t_1'^2 + t_2'^2) - 662.10^{-6}\{p_1(t_1 - t_1') + \right.$$
$$\left. + p_2(t_2 - t_2')\} + 0{,}3\,(t_1' + t_2')\right] + 4{,}65.$$

Wir führen hier ein:

$$t_2 = t_1 + \Delta t,\ t_2' = t_1' + \Delta t',\ p_2 = p_1 + \Delta p,$$

bilden ferner

$$t_1 - t_1' = \delta t_1,\ \Delta t - \Delta t' = \delta\Delta t$$

und erhalten damit für e_m die Gleichung

$$e_m = \frac{1}{60}\left(t_1'^2 + t_1'\,\Delta t' + \frac{1}{2}\Delta t'^2\right) - 662\cdot 10^{-6}\left(p_1\cdot\delta t_1 + \frac{1}{2}p_1\cdot\delta\Delta t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Delta p\cdot\delta t_1 + \frac{1}{2}\Delta p\cdot\delta\Delta t\right) + 0{,}3\left(t_1' + \frac{1}{2}\Delta t'\right) + 4{,}65. \qquad \ldots (9)$$

2. Wir wollen jetzt e_m unter der Voraussetzung, daß sich t' linear ändert, berechnen. Dies ist auf zwei Wegen möglich:

a) Wir können den Mittelwert von e gleich dem Wert e_m' im Mittelpunkt des Strahles setzen und finden

$$e'_m = \frac{1}{60}\left(t_1'^2 + t_1' \cdot \Delta t' + \frac{1}{4}\Delta t^2\right) - 662 \cdot 10^{-6}\left(p_1 \cdot \delta t_1 + \frac{1}{2} p_1 \,.\, \delta\Delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\Delta p \cdot \delta t_1 + \frac{1}{4}\Delta p \cdot \delta\Delta t\right) + 0{,}3\left(t_1' + \frac{1}{2}\Delta t'\right) + 4{,}65. \qquad \ldots (10)$$

b) Wir können den Mittelwert von e durch Integration nach dem Ansatz

$$e_m'' = \frac{1}{\bar{s}}\int\limits_{s=0}^{s=\bar{s}} e(t')\, ds = \frac{1}{\bar{s}}\int\limits_{s=0}^{s=\bar{s}}\left[\frac{t'^2}{60} - 662 \cdot 10^{-6} p\,(t - t') + 0{,}3\, t' + 4{,}65\right] ds$$

berechnen. In diese Gleichung führen wir die folgenden Terme ein:

$$t = t_1 + \frac{\Delta t}{\bar{s}}\, s, \qquad t_1 = t'_1 + \frac{\Delta t'}{\bar{s}}\, s, \qquad p = p_1 + \frac{\Delta p}{\bar{s}}\, s.$$

Die Integration ergibt damit

$$e_m'' = \frac{1}{60}\left(t_1'^2 + t_1'\,\Delta t' + \frac{1}{3}\,\Delta t'^2\right) - 662 \cdot 10^{\;6}\left(p_1 \cdot \delta t_1 + \frac{1}{2}\, p_1 \cdot \delta t_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\Delta p \cdot \delta t_1 + \frac{1}{3}\Delta\, p \cdot \delta\Delta t\right) + 0{,}3\left(t'_1 + \frac{1}{2}\Delta t'\right) + 4{,}65. \qquad \ldots (11)$$

3. Wir wollen nun e_m unter der Annahme, daß die relative Feuchtigkeit linear verläuft, berechnen. Wieder gibt es dieselben zwei Berechnungsmöglichkeiten wie unter 2.:

a) Man berechnet den Dampfdruck für den Mittelpunkt des Strahles und erhält

$$e_m''' = E_m \cdot (RH)_m = E(t_m)\frac{f_1 + f_2}{2}; \qquad \ldots (12)$$

doch ist es schwierig, diesen Ausdruck so umzuformen, daß er mit e_m, e_m' und e_m'' direkt — formelmäßig — verglichen werden kann.

b) Wir berechnen den mittleren Dampfdruck durch Integration nach dem Ansatz

$$e_m^{IV} = \frac{1}{s}\int\limits_0^s E \cdot (RH)\, ds. \qquad \ldots (13)$$

Die Berechnung des Integrals ist aber so kompliziert, daß sie für den praktischen Zweck kaum in Betracht kommt und hier daher auf eine nähere Ausführung verzichtet wird.

Wir wollen nun die Unterschiede zwischen e_m und den Näherungswerten e_m', e_m'' und e_m''' des mittleren Dampfdruckes berechnen.

Sie ergeben sich mit

$$\Delta\, e_m' = e_m' - e_m = -\frac{\Delta t'^2}{240} + 0{,}000165 \cdot \Delta p \cdot \delta\Delta t, \qquad \ldots (14)$$

$$\Delta e_m'' = e_m'' - e_m = -\frac{\Delta t'^2}{360} + 0{,}00011 \cdot \Delta p \cdot \delta\Delta t, \qquad \ldots (15)$$

$$\Delta\, e_m''' = e_m''' - e_m. \qquad \ldots (16)$$

Das folgende Beispiel zeigt die zahlenmäßige Größe der Differenzen. Es sei:

$$t_1 = +\ 14^0\,C, \qquad t_2 = +\ 8^0\,C,$$
$$t_1' = +\ 12^0\,C, \qquad t_2' = +\ 6^0\,C,$$
$$p_1 = 710\,Torr, \qquad p_2 = 640\,Torr.$$

Die „mittleren" Dampfdruckwerte ergeben sich daraus mit

$$e_m = 7{,}96\,Torr,\ e_m' = 7{,}81\,Torr,\ e_m'' = 7{,}86\,Torr,\ e_m''' = 7{,}70\,Torr$$

und die Differenz mit

$$\Delta e_m' = -0{,}15\,Torr,\ \Delta e_m'' = -0{,}10\,Torr \text{ und } \Delta e_m''' = -0{,}26\,Torr.$$

Zum Vergleich ergeben die Formeln (14) und (15)

$$\Delta e_m' = -0{,}15\,Torr \text{ und } \Delta e_m'' = -0{,}10\,Torr.$$

Welche Annahme im allgemeinen die beste ist, wollen wir hier nicht diskutieren. Der Hauptzweck war, zu zeigen, wie kompliziert und mehrdeutig die Berechnung des mittleren Brechungsverhältnisses ist.

Literatur:

[1] *Mitter, J.:* Über die Bestimmbarkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen bei elektronischen Entfernungsmessungen. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), *69* (1962), Heft 5, S. 153—154.

[2] *Bakkelid, S.:* Preliminary Studies of some Tellurometer Problems. Geographical Survey of Norways Publication No. 13, Oslo 1962.

[3] *Mitter, J.:* Zur Bestimmung des atmosphärischen Dampfdruckes mittels Psychrometern — Über die Psychrometerformel und ihre Auswertung. AVN, *70* (1963), Heft 3, S. 83—90.

[4] *Sprung, A.:* Über die Bestimmung der Luftfeuchtigkeit mit Hilfe des Assmannschen Aspirationspsychrometers. Das Wetter, *5* (1888), S. 105.

[5] Aspirations- Psychrometer-Tafeln. Herausgegeben vom Deutschen Wetterdienst, 3., erweit. Aufl., Braunschweig 1955.

Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

(Schluß)

Ich will die Ergebnisse der Messungen und der daraus berechneten äußeren und inneren Gradienten kurz zusammenstellen: (Gradienten in 10^{-3}mgal/m)

Punkt	H_a	H_i	V_a	V_i
Hauptfeld	15,3	7,8	316,0	168,0
Hauptfeld II	18,3	15,0	318,0	157,8
Feld 34	30,8	28,5	319,0	157,4
Nordfeld	12,5	5,9	318,7	164,8

Die Differenzen der Horizontalgradienten sind zur Dichtebestimmung nicht geeignet, da sie sich zu rasch ändern und zu klein sind. Die Differenz der Vertikalgradienten ergab mit den Bruns'schen Formeln (22) verhältnismäßig gute Dichtewerte, welche auf dem Buschberg zwischen 2,0 und 2,3 liegen.

Es kann gesagt werden, daß die Messung und Berechnung sämtlicher Gradienten bei großer Sorgfalt und geschickter Anlage heute möglich ist.