

Paper-ID: VGI\_196503



## Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke

Josef Krames <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Techn. Hochschule Wien, IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (2), S. 33–40

1965

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Krames_VGI_196503,  
Title = {Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke},  
Author = {Krames, Josef},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {33--40},  
Number = {2},  
Year = {1965},  
Volume = {53}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,  
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und  
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 2

Baden bei Wien, Ende April 1965

53. Jg.

---

## Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke

Von *Josef Krames*, Wien

(Mit 6 Abbildungen im Text)

**Nr. 1.** Damit zwei kollineare Felder  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  *perspektiv* liegen, ist notwendig, daß die Verbindungsgeraden von vier allgemein gelegenen Punkten **A, B, C, D** von  $\varepsilon$  mit ihren entsprechenden Punkten **A', B', C', D'** von  $\varepsilon'$  durch ein festes Zentrum **O** gehen. Diese Lagenbeziehung bildet für räumlich getrennte Felder  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  zugleich eine hinreichende Bedingung für die Perspektivität, für kollokale kollineare Felder  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  jedoch nicht. Vielmehr können zwei starre Vierecke **A, B, C, D** und **A', B', C', D'** innerhalb einer Ebene  $\varepsilon = \varepsilon'$  auf  $\infty^1$  Arten in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden, daß die vier Verbindungsgeraden **a, b, c, d** zugeordneter Eckpunkte jeweils durch ein Zentrum gehen, also einen „Vierstrahl“ bilden, womit aber im allgemeinen keine perspektiven Lagen der Vierecke herbeigeführt sind. Dabei ändert der Vierstrahl je nach der Lage der Vierecke seine Gestalt.

Demnach gibt es zu je zwei ebenen Vierecken  $\infty^1$  Paare von Punkten **P, P'**, deren Verbindungsgeraden mit den Vierecksecken **A, B, C, D** bzw. **A', B', C', D'** jeweils untereinander *kongruente* ebene Vierstrahlen bilden. Unter diesen Punktepaaren **P, P'** befinden sich insbesondere die „*winkeltreuen*“ *Fokalkpunkte* der durch die Paare **A A', B B', C C', D D'** bestimmten kollinearen Felder  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ . Alle übrigen Punkte **P, P'** sind *nur hinsichtlich der Punktquadrupel A, B, C, D bzw. A', B', C', D' winkeltreu* und sollen daher „*Pseudofokalkpunkte*“ heißen. Diese Punkte **P, P'** erfüllen innerhalb der Felder  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  im allgemeinen je zwei *zirkuläre Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht eins*, sie werden in der Folge „*Pseudofokalkurven*“ genannt. Insbesondere verteilen sich die Scheitel **P, P'** der durch **A, B, C, D** bzw. **A', B', C', D'** gelegten *gleichsinnig oder gegensinnig kongruenten* Vierstrahlen auf je ein Paar der genannten Kurven dritter Ordnung.

Deren Existenz ergibt sich unmittelbar aus unseren Kenntnissen über das sogenannte „*Problem der Projektivität*“, dessen Klarstellung u. a. *K. G. C. v. Staudt*, *M. Chasles* [1] und *A. Cayley* [2] intensiv beschäftigt hat. Es handelt sich bekanntlich um die Aufgabe, innerhalb zweier ebenen Felder  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  durch je  $n$  Punkte  $A_i$  bzw.  $B_i'$  ( $n = 5, 6, 7, i = 5, 6, 7$ ) untereinander projektive  $n$ -Strahlen zu legen. Die Zuordnung der Punkte  $A_i$  und  $B_i'$  erfolgt nunmehr mittels gleicher Indizes  $i$ . Für  $n = 6$  gibt es im besonderen  $\infty^1$  solche  $n$ -Strahlen, ihre Scheitel  $P, P'$  bilden in  $\epsilon$  und  $\epsilon'$  im allgemeinen je eine die Punkte  $A_i$  bzw.  $B_i'$  enthaltende *Kurve dritter Ordnung*. Dies hat bereits *M. Chasles* [3] erkannt.

Werden je zwei der Punkte  $A_i$  und  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) als die absoluten Punkte von  $\epsilon$  bzw.  $\epsilon'$  angenommen — es gibt hierfür zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten —, dann enthält jedes der Strahlsextupel zwei *isotrope Strahlen*. Wird von diesen abgesehen, dann liegen die kongruenten Vierstrahlen des oben besprochenen Sonderfalles vor. Dieser wurde zwar u. a. von *R. Sturm* [4] erwähnt, doch fehlen bis heute *explizite Darstellungen* der Pseudofokalkurven sowie die Diskussion der wichtigsten Sonderfälle, bei denen ein *Zerfallen* dieser Kurven eintritt. Dies nachzutragen, ist das Ziel der vorliegenden Abhandlung.

Die Anregung hierzu ergab sich anlässlich von Untersuchungen über die optisch-mechanische Entzerrung von Luftbildern, die der Verfasser vor mehreren Jahren im Auftrage des *Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien* durchgeführt hat.

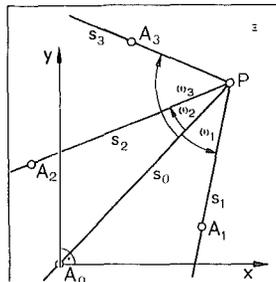


Abb. 1

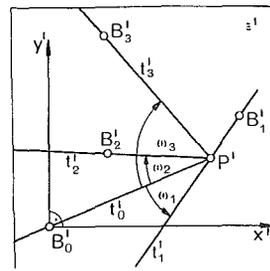


Abb. 2

**Nr. 2.** In zwei ebenen Feldern  $\epsilon$  und  $\epsilon'$  seien zwei Vierecke mit ihren durch die Indizes zugeordneten Ecken  $A_0, A_1, A_2, A_3$  und  $B'_0, B'_1, B'_2, B'_3$  gegeben (Abb. 1 und 2). Dabei wird bloß vorausgesetzt, daß keine zwei der Punkte  $A_i$  oder  $B_i'$  zusammenfallen. Wir betrachten zwei ebene Vierstrahlen mit den Scheiteln  $P, P'$ , deren Schenkel  $s_0, s_1, s_2, s_3$  und  $t'_0, t'_1, t'_2, t'_3$  durch die Punkte  $A_i$  bzw.  $B_i'$  gehen. In beiden Ebenen wird ferner je ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in  $A_0$  bzw.  $B'_0$  und dem positiven Drehsinn  $x \rightarrow y$  bzw.  $x' \rightarrow y'$  angenommen. Der positive oder negative spitze Winkel zwischen den Vierstrahlenschenkel  $s_0$  und  $s_i$  bzw.  $t'_0$  und  $t'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sei mit  $\omega_i$  bzw.  $\omega'_i$  bezeichnet.

Da diese auf das Intervall  $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$  beschränkten Winkel durch ihre Tangenswerte eindeutig bestimmt sind, lauten die Bedingungen für  $\alpha$ ) *gleichsinnig kongruente* oder  $\beta$ ) *ungleichsinnig kongruente Vierstrahlen*  $s_0, s_1, s_2, s_3$  und  $t'_0, t'_1, t'_2, t'_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \quad \operatorname{tg} \omega_i = \operatorname{tg} \omega'_i \quad \text{bzw.} \quad \beta) \quad \operatorname{tg} \omega_i = -\operatorname{tg} \omega'_i \\ (i = 1, 2, 3) \end{array} \right\} \dots(1)$$

Wie bezeichnen noch die Koordinaten der Punkte  $A_i$  und  $B_i'$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit  $a_i, b_i$  bzw.  $a_i', b_i'$ , die laufenden Koordinaten der Vierstrahlscheitel  $P, P'$  mit  $x, y$  bzw.  $x', y'$ . Sodann ergibt sich aus (1) unter Weglassung des Index  $i$ :

$$\left. \begin{aligned} & (x^2 + y^2) (b x - a y) \\ & - x' [\pm b' (x^2 + y^2 - a x - b y) + a' (b x - a y)] \\ & + y' [\pm a' (x^2 + y^2 - a x - b y) - b' (b x - a y)] = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2 \alpha, \beta)$$

Darin gelten  $\alpha$ ) die oberen Vorzeichen für gleichsinnig,  $\beta$ ) die unteren für ungleichsinnig kongruente Vierstrahlen. Nach dem Einführen der Abkürzungen\*)

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad x'^2 + y'^2 = \rho'^2 \quad \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} & b x - a y = L \\ & \pm b' \rho^2 + (a' b \mp a b') x - (a a' \pm b b') y = -M \\ & \pm a' \rho^2 - (\pm a a' + b b') x + (\mp a' b + a b') y = N \end{aligned} \right\} \dots (4 \alpha, \beta)$$

und Wiedereinsetzen des Index  $i$  erhalten die Gleichungen (2  $\alpha, \beta$ ) die Form

$$L_i \rho'^2 + M_i x' + N_i y' = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad \dots (5)$$

Jede dieser Gleichungen stellt den durch  $B_0'$  und  $B_i'$  gehenden Kreis dar, dessen Peripheriewinkel  $\omega_i'$  über der Sehne  $B_0' B_i'$  gleich  $\pm \omega_i$  ist. Damit diese drei ( $i = 1, 2, 3$ ) entsprechenden Kreise einem elliptischen Büschel angehören, also noch einen weiteren Punkt  $P'$  gemeinsam haben, ist notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$F(x, y) = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ L_3 & M_3 & N_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (6)$$

und dies ist bereits die Gleichung des in  $\varepsilon$  vorhandenen geometrischen Ortes  $p$  der Punkte  $P$ .

Setzen wir in den Gleichungen (2) und (4) vorerst unter Verwendung der oberen Vorzeichen

$$a_i b_i' - a_i' b_i = S_i, \quad a_i a_i' + b_i b_i' = T_i,$$

so ergibt sich beispielsweise:  $M_2 N_3 - M_3 N_2 =$

$$\rho^2 [\rho^2 (a_2' b_3' - a_3' b_2') + x (a_3' S_2 - a_2' S_3 + b_2' T_3 - b_3' T_2) + y (b_3' S_2 - b_2' S_3 + a_3' T_2 - a_2' T_3) + S_3 T_2 - S_2 T_3].$$

Durch zyklische Vertauschungen der Indizes  $1, 2, 3$  und Einsetzen in Gl. (6) berechnet man schließlich als Gleichung der Kurve  $p$  (bei Vernachlässigung des Faktors  $\rho^2$ ):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \Sigma (b_1 x - a_1 y) (M_2 N_3 - M_3 N_2) = \\ & (x^2 + y^2) \left\{ \begin{vmatrix} b_1 a_1' b_1' \\ b_2 a_2' b_2' \\ b_3 a_3' b_3' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 a_1' b_1' \\ a_2 a_2' b_2' \\ a_3 a_3' b_3' \end{vmatrix} y \right\} + \\ & + x^2 \Sigma b_1 (a_3' S_2 - a_2' S_3 + b_2' T_3 - b_3' T_2) + \\ & + y^2 \Sigma a_1 (b_2' S_3 - b_3' S_2 + a_2' T_3 - a_3' T_2) + \\ & + x y \Sigma [b_1 (b_3' S_2 - b_2' S_3 + a_3' T_2 - a_2' T_3) + \\ & \quad - a_1 (a_3' S_2 - a_2' S_3 + b_2' T_3 - b_3' T_2)] + \\ & + x \Sigma b_1 (S_3 T_2 - S_2 T_3) + \\ & + y \Sigma a_1 (S_2 T_3 - S_3 T_2) = 0. \quad \dots (7) \end{aligned}$$

\*) Diese vereinfachte Durchrechnung verdanke ich meinem Kollegen *A. Huber*, Wien.

Die Gleichung der in  $\epsilon'$  vorhandenen Pseudofokalkurve  $p'$  ergibt sich aus (7), wenn darin alle Striche weggelassen und alle Zeichen ohne-Strich mit einem solchen versehen werden.

Zu analogen Ergebnissen gelangt man im Fall  $\beta$ ), wo die beiden Vierstrahlen  $s_0 s_1 s_2 s_3$  und  $t_0' t_1' t_2' t_3'$  ungleichsinnig kongruent und in (2), (4) die unteren Vorzeichen zu verwenden sind\*).

Unter der Voraussetzung, daß Gleichung (7) irreduzibel ist, vor allem daß die Determinanten

$$\begin{array}{l} |a_i a_i' b_i'|, |b_i a_i' b_i'| \\ \text{bzw. } |a_i' a_i b_i|, |b_i' a_i b_i| \end{array}$$

nicht gleichzeitig verschwinden, bestehen somit die *Pseudofokalkurven* im allgemeinen aus je zwei zirkularen Kurven dritter Ordnung [4], und zwar vom *Geschlecht eins* [2].

Nr. 3. Obigen Gleichungen sind folgende Eigenschaften der Pseudofokalkurven zu entnehmen:

I) Jede Pseudofokalkurve dritter Ordnung enthält alle Ecken  $A_0, A_i$  oder  $B_0', B_i'$  des in ihrer Ebene gegebenen Vierecks. Denn setzt man in die Gleichungen (4) die Koordinaten 0, 0 bzw.  $a_i, b_i$  ( $a_i', b_i'$ ) eines dieser Punkte ein, dann werden die zugehörigen  $L_i = 0, M_i = 0, N_i = 0$  und damit ist Gl. (6) befriedigt.

Demnach liegt auf jeder Verbindungsgeraden zweier Vierecksecken  $A_i, A_k$  ( $B_i', B_k'$ ), z. B. auf der Geraden  $g = [A_0 A_1]$  ( $h' = [B_0' B_1']$ ), nur noch ein dritter

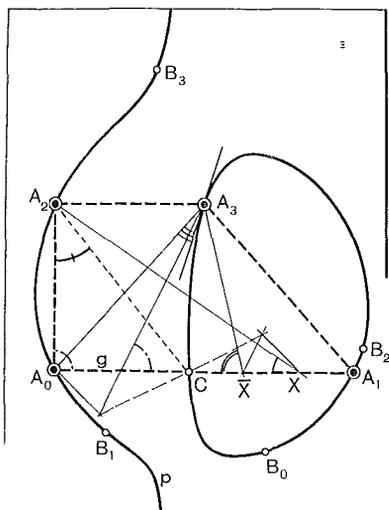


Abb. 3

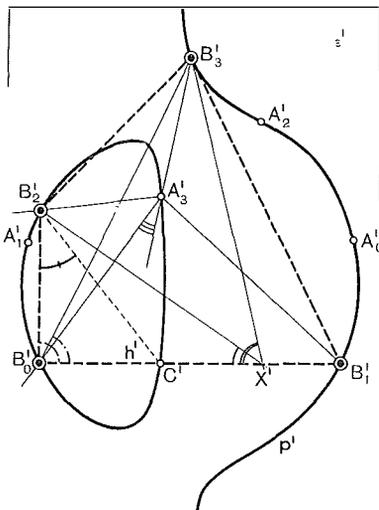


Abb. 4

Punkt  $C$  ( $C'$ ) der Kurve  $p$  ( $p'$ ). Man erhält ihn wie folgt (siehe Abb. 3, 4): Durchläuft in der Ebene  $\epsilon'$  ein Punkt  $X'$  z. B. die Verbindungsgerade  $h'$  der  $A_0, A_1$  zugeordneten Eckpunkte  $B_0', B_1'$ , so können für jeden Punkt  $X'$  auf  $h'$  jene Punkte  $X, \bar{X}$  auf  $g = [A_0 A_1]$  in  $\epsilon$  angegeben werden, für welche der spitze Winkel  $\sphericalangle A_0 X A_2 =$

\*) Bei den übrigen sechs Vorzeichenkombinationen, die in den drei Gleichungen ( $1 \alpha, \beta$ ) angenommen werden könnten, ergeben sich keine kongruenten Vierstrahlen im üblichen Sinn, ihre Scheitel  $P, P'$  erfüllen im allgemeinen zirkuläre Kurven fünfter Ordnung.

$\pm \nless B_0' X' B_2'$  sowie  $\nless A_0 \bar{X} A_3 = \pm \nless B_0' X' B_3'$  ist. Die Punktepaare  $X \bar{X}$  bilden auf  $g$  zwei kollokale ähnliche Punktreihen und deren eigentlicher Doppelpunkt ist der gesuchte Punkt  $C$ . Dieser ergibt nämlich, mit  $A_0$  (oder  $A_1$ ) und  $A_2 A_3$  verbunden, einen Vierstrahl, der wegen  $\omega_1 = 0$ , d.h.  $s_0 = s_1$ , zu einem *Dreistrahl* ausgeartet ist, und der entsprechende Dreistrahl in  $\epsilon'$  mit dem Scheitel  $C'$  auf  $h'$  ist dazu kongruent. Da es sowohl in  $\epsilon$  wie auch in  $\epsilon'$  je sechs Verbindungsgeraden  $g$  bzw.  $h'$  gibt, sind somit von jeder der Kurven  $p, p'$  je *sechs weitere Punkte* rasch gefunden.

II) Jede Pseudofokalkurve dritter Ordnung besitzt eine *reelle Asymptote\**) vom Richtungsparameter (siehe Gleichung 7)

$$k = |b_i a_i' b_i'| : |a_i a_i' b_i'|$$

bzw.  $k' = |b_i' a_i b_i| : |a_i' a_i b_i|$

Die parallel zu diesen Richtungen durch die Vierecksecken gelegten Strahlen bilden im allgemeinen *zwei ähnliche Parallelvierstrahlen*, und dies steht insofern im Einklang mit obigen Ableitungen, als hier wegen  $\omega_i = \omega_i' = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Winkelgleichheiten (1) ebenfalls erfüllt sind.

III) Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt ferner:

$$\rho'^2 = \varkappa \left| \begin{array}{c} M_1 N_1 \\ M_2 N_2 \end{array} \right|, \quad x' = \varkappa \left| \begin{array}{c} L_1 N_1 \\ L_2 N_2 \end{array} \right|, \quad y' = \varkappa \left| \begin{array}{c} L_1 M_1 \\ L_2 M_2 \end{array} \right|, \quad \dots(8)$$

wobei wegen  $x'^2 + y'^2 = \rho'^2$  der Proportionalitätsfaktor  $\varkappa$  gegeben ist durch:

$$\varkappa = \frac{\left| \begin{array}{c} M_1 N_1 \\ M_2 N_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} L_1 M_1 \\ L_2 M_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} L_1 N_1 \\ L_2 N_2 \end{array} \right|^2} . \quad \dots(9)$$

Mit (8) und (9) ist zwischen den Ebenen  $\epsilon$  und  $\epsilon'$  eine *eindeutige algebraische Punktverwandtschaft* (fünften Grades) festgelegt, in der die Scheitel der durch  $A_0 A_1 A_2$  und  $B_0' B_1' B_2'$  legbaren kongruenten Dreistrahlen, also auch die Punkte  $P, P'$  der mit den Gleichungen (6) oder (7) bestimmten Pseudofokalkurven  $p, p'$  einander entsprechen (siehe [1], [3]). Da die zugeordneten Ecken der gegebenen Vierecke auf vier Dreieckspaare verteilt werden können, gibt es vier verschiedene Verwandtschaften von der eben erwähnten Art. In diesen sind u.a. die unter I) behandelten Schnittpunkte  $C, C'$  von  $p$  und  $p'$  mit den Vierecksseiten einander zugeordnet. Hingegen bilden die Vierecksecken  $A_0, A_1, A_2, A_3$  und  $B_0', B_1', B_2', B_3'$  im allgemeinen *keine Paare entsprechender Punkte* dieser Verwandtschaften. Dies bestätigen auch folgende Überlegungen:

Läßt man den Vierstrahlscheitel  $P$  in  $\epsilon$  mit einer Ecke des gegebenen Vierecks, etwa mit  $A_3$ , zusammenfallen, dann ist der Vierstrahlschenkel  $s_3 = [P A_3]$  vorerst unbestimmt. Zu dem von den Schenkeln  $s_0, s_1, s_2$  gebildeten Dreistrahl gibt es nun innerhalb von  $\epsilon'$  einen  $\alpha$ ) *gleichsinnig* oder  $\beta$ ) *ungleichsinnig kongruenten Dreistrahl*, dessen Schenkel  $t_0', t_1', t_2'$  bzw. durch  $B_0, B_1, B_2$  gehen. Sein Scheitel  $A_3'$  ist der

\*) Diese ergibt sich auch mittels einfacher geometrischer Konstruktionen, ähnlich wie die Punkte  $C, C'$  unter I).

zweite Schnittpunkt der durch  $B_0' B_1'$  und  $B_0' B_2'$  gelegten Kreise, für deren Peripheriewinkel (mit dem einen oder anderen Vorzeichen)

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \sphericalangle B_0' A_3' B_1' = \omega_1 = \sphericalangle A_0 A_3 A_1 \quad \text{bzw.} \\ \omega_2' &= \sphericalangle B_0' A_3' B_2' = \omega_2 = \sphericalangle A_0 A_3 A_2 \quad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Ergänzt man anschließend den Dreistrahl  $t_0', t_1', t_2'$  durch den Verbindungsstrahl  $t_3'$  von  $A_3'$  mit  $B_3'$ , so ist damit auch der vierte Strahl  $s_3$  des entsprechenden kongruenten Vierstrahls in  $\epsilon$  bestimmt.  $s_3$  berührt die Pseudofokalkurve  $p$  im Punkt  $A_3$ . In gleicher Weise erhält man zu jeder Vierecksecke in  $\epsilon$  oder  $\epsilon'$  den entsprechenden Punkt auf der Pseudofokalkurve  $p'$  in  $\epsilon'$  bzw.  $p$  in  $\epsilon$ , ferner die Tangenten dieser Kurven in den auf ihnen befindlichen Vierecksecken. Demnach sind von jeder der Kurven dritter Ordnung  $p, p'$  neben  $A_0, A_1, A_2, A_3$  bzw.  $B_0', B_1', B_2', B_3'$  auch deren jeweils (in einer der erwähnten Verwandtschaften) entsprechende Punkte  $A_0', A_1', A_2', A_3'$  bzw.  $B_0, B_1, B_2, B_3$  bekannt, also einschließlich der auf den Vierecksseiten liegende Punkte  $C, C'$  (siehe I) je 14 Punkte davon je vier samt Tangenten (Abb. 5, 6).

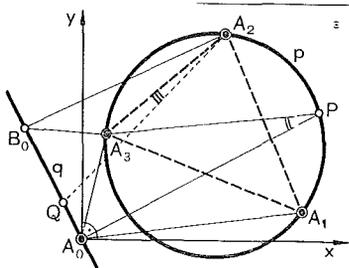


Abb. 5

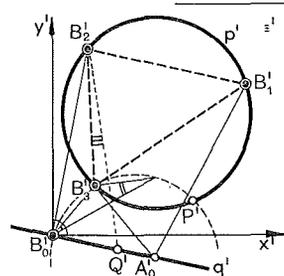


Abb. 6

IV) Sind im besonderen die Bedingungen

$$|b_i a_i' b_2'| = 0 \quad \text{und} \quad |a_i a_i' b_i'| = 0 \quad \dots(10)$$

erfüllt, so gilt – wie unschwer einzusehen ist – auch:

$$|b_i' a_i b_i| = 0 \quad \text{sowie} \quad |a_i' a_i b_i| = 0. \quad \dots(11)$$

Darnach zerfallen die beiden Pseudofokalkurven dritter Ordnung auf Grund von Gl. (7) in die Ferngeraden ihrer Ebenen und in je einen Kegelschnitt, welcher die gegebenen Punkte  $A_0, A_1, A_2, A_3$  (bzw.  $B_0', B_1', B_2', B_3'$ ) enthält. Dieser Sonderfall ist dadurch gekennzeichnet, daß die gegebenen Vierecke untereinander affine Figuren darstellen. Wären nämlich beispielsweise  $A_0, A_1, A_2, A_3$  ferner  $B_0', B_1', B_2'$  gegeben, so erhält man aus Gl. (10) und Gl. (11) die Koordinaten von  $B_3'$  als homogene lineare Funktionen von  $a_3, b_3$ , und diese bewerkstelligen – nach einem bekannten Satz über Nulldeterminanten – zugleich die Zuordnungen  $A_0 \rightarrow B_0', A_1 \rightarrow B_1', A_2 \rightarrow B_2'$ , d.h. beide Vierecke entsprechen einander in einer Affinität.

Beide Vierecke werden aus je zwei in dieser Affinität entsprechenden Fernpunkten durch untereinander ähnliche Parallelvierstrahlen projiziert, und dies erklärt, warum hier die Ferngeraden von  $\epsilon$  und  $\epsilon'$  Bestandteile der Pseudofokalkurven bilden (vgl. oben II).

Unter diesen Sonderfall sind auch folgende Annahmen einzuordnen: Drei der in  $\epsilon$  gegebenen Punkte, etwa  $A_1, A_2, A_3$ , liegen auf einer Geraden  $p$ , und die zugeord-

neten Punkte  $B_1', B_2', B_3'$  bilden auf einer Geraden  $p'$  von  $\varepsilon'$  ein Punktetripel vom selben Teilverhältnis  $v = (B_1' B_2' B_3') = A_1 A_2 A_3$ ). Wie unschwer nachzuweisen ist, bestehen sodann die Pseudofokalkurven neben den Ferngeraden der Ebenen  $\varepsilon, \varepsilon'$  aus  $p, p'$  und einem weiteren Geradenpaar  $q, q'$ . Hier verteilen sich also die Pseudofokalfpunkte beider Vierecke auf drei Geradenpaare.

V) Die beiden Pseudofokalkurven dritter Ordnung können noch in manch andere Weise zerfallen. Sind etwa zwei zugeordnete Teildreiecke der gegebenen Vierecke, z. B.  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1', B_2', B_3'$  untereinander (gleich- oder gegensinnig) ähnlich, und bilden  $A_0, B_0'$  kein Punktepaar dieser Ähnlichkeit, dann zerfallen die Kurven in die Umkreise dieser Dreiecke und in je eine (im Endlichen verlaufende) Gerade. Hiefür sei folgende geometrische Begründung angegeben (siehe Abb. 5, 6). Aus allen Punkten der den genannten Dreiecken umschriebenen Kreise  $p, p'$  werden deren Ecken durch (gleich- oder gegensinnig) kongruente Dreistrahlen projiziert. Wird nun auf  $p$  irgend ein Punkt  $P$  gewählt und dieser mit  $A_0, A_1, A_2, A_3$  durch vier Strahlen verbunden, so ergibt sich der Scheitel eines dazu kongruenten Vierstrahles in  $\varepsilon'$  als ein Punkt des Kreises  $p'$ , wenn man z. B. durch die Punkte  $B_0' B_3'$  jenen Kreis zeichnet, dessen Peripheriewinkel über dieser Sehne gleich  $\omega_3 = \sphericalangle A_0 P A_3$  ist, und den zweiten Schnittpunkt  $P'$  dieses Kreises mit  $p'$  aufsucht.

Neben den Kreisen  $p$  und  $p'$  bestehen hier die Pseudofokalkurven noch aus je einer Geraden  $q, q'$ , deren Richtung durch

$$\begin{array}{l} | b_i \ a_i' \ b_i' | : | a_i \ a_i' \ b_i' | \\ \text{bzw.} \quad | b_i' \ a_i \ b_i | : | a_i' \ a_i \ b_i | \end{array}$$

bestimmt ist. Man erhält  $q$  und  $q'$  u. a. auf graphischem Wege, indem man zu den restlichen Vierecksecken  $A_0$  und  $B_0'$  die in der Ähnlichkeit  $A_1 A_2 A_3 \leftrightarrow B_1' B_2' B_3'$  zugeordneten Punkte  $A_0'$  und  $B_0$  ermittelt und hierauf  $A_0$  mit  $B_0$  bzw.  $B_0'$  mit  $A_0'$  verbindet. Sucht man nämlich zu einem beliebig angenommenen Punkt  $Q$  auf  $q$  den in derselben Ähnlichkeit entsprechenden Punkt  $Q'$  auf  $q'$ , dann sind  $Q, Q'$  offensichtlich die Scheitel zweier kongruenten Vierstrahlen, deren Schenkel durch  $A_0, A_1, A_2, A_3$  bzw. durch  $B_0', B_1', B_2', B_3'$  gehen (Abb. 5, 6).

Nr. 4. Auf weitere Sonderfälle, etwa auf solche, wo in einer der Ebenen  $\varepsilon, \varepsilon'$  die gegebenen vier Punkte auf einer Geraden liegen, sei hier nicht mehr eingegangen. Dahin gestellt bleibe ferner die Frage, ob die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke auch rationale zirkulare Kurven dritter Ordnung sein können und welchen geometrischen Bedingungen die Vierecke allenfalls genügen müssen, damit dies der Fall ist.

Näher zu untersuchen wäre auch die zwangläufige Bewegung, bei der das mit der Ebene  $\varepsilon$  (oder  $\varepsilon'$ ) starr verbundene Viereck  $A_0 A_1 A_2 A_3$  ( $B_0' B_1' B_2' B_3'$ ) gegenüber der festgehaltenen Ebene  $\varepsilon'$  ( $\varepsilon$ ) alle jene Lagen durchläuft, in welchen die Verbindungsgeraden zugeordneter Vierecksecken jeweils durch einen — auf der Pseudofokalkurve  $p'$  ( $p$ ) gleitenden Punkt  $P'$  ( $P$ ) gehen [5]. Zu den Bewegungen dieser Art gehören als singuläre Sonderfälle (mit starrem Vierstrahl  $A_0 B_0', A_1 B_1', A_2 B_2', A_3 B_3'$ ) die ebene Ellipsenbewegung und deren inverse, die Konchoidenbewegung (siehe etwa [6]).

Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß obige Ergebnisse, insbesondere die über das Zerfallen der Pseudofokalkurven, mittels kollinearer Umformungen ohne

weilers auf den Fall  $n = 6$  des allgemeinen Problems der Projektivität (siehe oben Nr. 1) übertragen werden können.

*Literatur:*

- [1] Enzykl. Math., Wiss. III A B 5 (*A. Schönflies*), S.442, sowie III C 11 (*L. Berzolari*), S.2032, Anm.620–622.  
 [2] *A. Cayley*, Proceedings of the London math. soc. (1) 4 (1873), S.396, sowie *A. Cayley*, The collected math. papers, Cambridge 1895, S.200.  
 [3] *M. Chasles*, Nouv. Ann. de math., 14 (1855), S.50.  
 [4] *R. Sturm*, Math. Ann. I (1869), S.533–574.  
 [5] Ein Modell zur mechanischen Ausführung einer solchen Bewegung wurde nach den Angaben des Verfassers im eingangs erwähnten Bundesamt hergestellt.  
 [6] *J. Krames*, Darstellende und kinematische Geometrie, 2. Aufl. Wien 1952, Nr.34.

## Zur Berechnung des mittleren Brechungsverhältnisses aus den meteorologischen Messungen an den Streckenendpunkten bei Distanzmessungen mittels Mikrowellenträgern

Von *Sivert Bakkelid*, Oslo

### Zusammenfassung

Der Maßstab elektronischer Entfernungsmessungen wird durch die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen in der Atmosphäre bestimmt. Ihre Ermittlung erfolgt mit Hilfe des mittleren Brechungskoeffizienten, der eine Funktion der Mittelwerte der Lufttemperatur, des Luftdruckes und des Dampfdruckes längs des Wellenweges ist. Da die zur Bestimmung der Mittelwerte der meteorologischen Elemente notwendigen direkten Messungen längs des Wellenweges im allgemeinen nicht möglich sind, werden diese näherungsweise und unter Annahme eines dreifach linearen Aufbaues des atmosphärischen Feldes nur aus den meteorologischen Messungen an den Streckenendpunkten bestimmt.

Ist dieser Vorgang an sich schon problematisch, so ergeben sich aber außerdem noch, wie der Verfasser zeigt, Probleme, je nachdem wie der Berechnungsgang für den mittleren Brechungskoeffizienten angesetzt wird, ob als Integration für den Bereich  $T_2 - T_1$ , ob für den Streckenmittelpunkt oder durch Mittelung der zu den Endpunkten gehörenden Brechungskoeffizientenwerte. Es ergibt sich dabei, daß außer für extremste Temperatur- und Dampfdruckverhältnisse, d. i.  $(T_2 - T_1)/T_1 < 1/20$  bzw.  $e < 22$  Torr die Rechnung mit Mittelwerten  $T_m$ ,  $p_m$  und  $e_m$  zulässig ist.

Eine weitere Untersuchung gilt der Berechnung des mittleren Dampfdruckes unter verschiedenen Linearitätsannahmen. Sie ergeben Differenzen, die nicht mehr vernachlässigbar sind, eine Entscheidung über die physikalische Realität der verschiedenen Ansätze kann jedoch nicht getroffen werden.

### Abstract

The scale of electronic distance measurements is defined by the average propagation velocity of the carrier in the atmosphere. It is determined by means of the refraction coefficient which in turn is a function of the mean values of the atmospheric temperature, the pressure and the vapor pressure along the wave path. Since in general direct measurements along the path, necessary for the determination of the average values of the meteorological elements, are not possible, these elements are approximately determined from meteorological measurements at the terminals assuming a threefold-linear composition of the atmospheric field.

This procedure, in itself being rather problematic, gives rise to additional problems, as the author points out, by the way the computation of the refraction coefficient is approached, i. e. whether as integration over the region  $T_2 - T_1$ , or for the central point of the side, or by taking the