

Paper-ID: VGI_196415



Der Einschaltpunkt (EP) am gefährlichen Kreis der Approximations-Geometrie

Walter Smetana ¹

¹ *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII/64, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **52** (4), S. 110–125

1964

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_196415,  
Title = {Der Einschaltpunkt (EP) am gefährlichen Kreis der Approximations-  
Geometrie},  
Author = {Smetana, Walter},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {110--125},  
Number = {4},  
Year = {1964},  
Volume = {52}  
}
```



Der Einschaltpunkt (EP) am „gefährlichen Kreis der Approximations-Geometrie“

Von *Walter Smetana*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

I. Einleitung

Anlässlich der Beurteilung der Güte eines rückwärtseinzuschneidenden Einschaltpunktes (EP) auf einer Karte 1:50000 nach der bereits bekannten graphischen Methode [1], wird es in der Praxis mitunter vorkommen, daß der vorliegende EP scheinbar dem gefährlichen Kreis angehört oder aber in seine Nähe fällt und daher seine Lage für die üblichen Methoden der Berechnung unbestimmt bleibt. Bei näherer Betrachtung jedoch wird man auf den Gedanken geführt, daß z. B. der auf der Karte mit Zirkel und Lineal konstruierte, durch die drei Festpunkte und dem Neupunkt gehende Kreis zunächst gar keinen Kreis im Sinne der Präzisions-Geometrie darstellen kann, sondern je nach dem Kartenmaßstab und der Einzeichnungsgenauigkeit der Festpunkte, des EP und des Kreises, eine Kreisringfläche verschiedener Ausdehnung bedeutet. Man findet diese Tatsache in der Praxis bereits dadurch bestätigt, daß eine koordinatenmäßige Berechnung solch „unbestimmter Punkte“ etwa nach der Cassinischen Methode mittels Doppelrechenmaschine über zwei Vorwärtseinschnitte dennoch — wenn auch mit geringerer Genauigkeit — möglich ist, was im Falle der Lage eines Neupunkts auf einem Kreis im Sinne der Präzisions-Geometrie unmöglich wäre. Erst wenn die beiden Hilfspunkte immer näher zusammenrücken und schließlich zu einem Punkt zusammenfallen, was bekanntlich durch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ für die Tangente des Richtungswinkels von dem einen zum anderen Hilfspunkt sichtbar wird, liegen alle vier Punkte auf dem gefährlichen Kreis der Präzisions-Geometrie. Dieser Fall wird jedoch in der Praxis wohl niemals eintreten.

Angesichts der soeben dargelegten Gegebenheiten, soll im folgenden auf Grund von Genauigkeitsbetrachtungen, die den Inhalt des IV. Abschnittes dieser Abhandlung bilden, unter anderem auch ein einfaches Rechenverfahren entwickelt werden, das im Grunde genommen nichts Neues darstellt, dem Praktiker aber anlässlich der Vorbereitung eines EP-Netzes zur elektronischen Berechnung, die Bestimmung von vorläufigen Koordinaten auch solcher EP ermöglicht, die in der Nähe des sogenannten „gefährlichen Kreises“ liegen, deren einfache Überbestimmung im Sinne der Programmierung für die elektronische Berechnung der vorläufigen Koordinaten von Triangulierungspunkten [2], jedoch nicht möglich ist und deswegen die Berechnung vorläufiger Koordinaten von Hand aus erfolgen muß.

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, daß man sich zunächst Näherungskordinaten des betreffenden Neupunktes, etwa auf graphischem Wege oder nach amtsüblichen Methoden rechnerisch verschafft und weiters den Näherungspunkt differentiell derart verschiebt, daß die als fehlerfrei betrachteten, gemessenen

Winkel α und β zwischen je zwei Festpunkten aus der Differenzbildung entsprechend berechneter Richtungswinkel auf die Sekunde genau erhalten werden.

Die Möglichkeit einer solchen Berechnung ist bloß an die Forderung geknüpft, daß vor allem die gemessenen Winkel α und β zwischen den drei als fehlerfrei anzusehenden Festpunkten selbst möglichst fehlerfrei, also mit hoher Präzision gemessen werden und daß die durchschnittliche Entfernung des Neupunktes von den Festpunkten nicht weniger als ungefähr zwei Kilometer betragen soll, wie aus dem Abschnitt über Genauigkeitsbetrachtungen hervorgeht.

Im II. Abschnitt wird aber auch ein graphisch-mechanisches-rechnerisches Verfahren abgeleitet, das eine durchschnittliche Entfernung des Neupunktes von den Festpunkten bis zu etwa 500 m noch zuläßt.

Die Nähe des gefährlichen Kreises wird im Abschnitt IV schließlich durch den Abstand des Collins'schen Hilfspunktes vom mittleren der drei gegebenen Festpunkte in der Größe von 10 m in der Natur bzw. 0,2 mm auf einer Karte 1:50000, sowie dem Verhältnis dieses Abstandes zur Länge der Mittelvisur — als Kriterium dieses Grenzfalles — gekennzeichnet, und es wird weiters die Frage beantwortet, mit welcher Genauigkeit die beiden Winkel α und β gemessen werden müssen, um eine Punktlagegenauigkeit von etwa 5 cm desjenigen EP zu erhalten, der bereits einem Kreis im Sinne der Approximations-Geometrie, also einer Kreisringfläche von ca. 0,2 mm Stärke auf einer Karte 1:50000 angehört.

Je genauer die Winkel α und β in diesem Grenzfall gemessen werden, umso mehr verliert die Nähe des gefährlichen Kreises ihre Unbestimmtheit in bezug auf die Lage des Neupunktes. Die Lösung dieses Grenzproblems wird jedoch im allgemeinen mehr von theoretischem Interesse bleiben, da die geforderte hohe Winkelmeßgenauigkeit in der Praxis — wenn überhaupt — nur mit großem Zeitaufwand erreicht werden könnte.

Ein vollständig ausgeführtes Beispiel aus der Praxis des Verfassers im Abschnitt III dieser Abhandlung soll das entwickelte Rechenverfahren veranschaulichen und seine Richtigkeit durch Vergleich der nach diesem Verfahren ermittelten Koordinaten des betreffenden EP mit den Koordinaten desselben nach dem elektronischen Netzausgleich auch bestätigen.

Betrachtungen über die Lagegenauigkeit solcher bestimmter EP, auch für den Fall der nicht als fehlerfrei anzusehenden, sondern mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behafteten Winkel α und β , bilden den Abschluß dieser Abhandlung.

II. Theoretische Grundlagen

Sind nach Abb. 1 die Koordinaten einer Näherungslage P' von Neupunkt P auf irgendeine Weise bereits ermittelt worden, so lauten bekanntlich die Gauß'schen Relationen der Richtungsänderung in der Näherungslage P' unter Einführung von kleinen, jedoch endlichen Größen, an Stelle der differentiellen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{P'A} &= a_{P'A} \Delta x_{P'P} + b_{P'A} \Delta y_{P'P} \\ \Delta v_{P'M} &= a_{P'M} \Delta x_{P'P} + b_{P'M} \Delta y_{P'P} \\ \Delta v_{P'B} &= a_{P'B} \Delta x_{P'P} + b_{P'B} \Delta y_{P'P} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Hierin bedeuten $\nu_{P'A}$, $\nu_{P'M}$ und $\nu_{P'B}$ bzw. die Richtungswinkel von der Näherungslage P' nach den Festpunkten A , M und B , weiters:

$$\left. \begin{aligned} a_{P'A} &= \frac{\rho}{s_{P'A}} \sin \nu_{P'A} & b_{P'A} &= \frac{-\rho}{s_{P'A}} \cos \nu_{P'A} \\ a_{P'M} &= \frac{\rho}{s_{P'M}} \sin \nu_{P'M} & b_{P'M} &= \frac{-\rho}{s_{P'M}} \cos \nu_{P'M} \\ a_{P'B} &= \frac{\rho}{s_{P'B}} \sin \nu_{P'B} & b_{P'B} &= \frac{-\rho}{s_{P'B}} \cos \nu_{P'B} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\Delta x_{P'P} = x_P - x_{P'}$$

$$\Delta y_{P'P} = y_P - y_{P'}$$

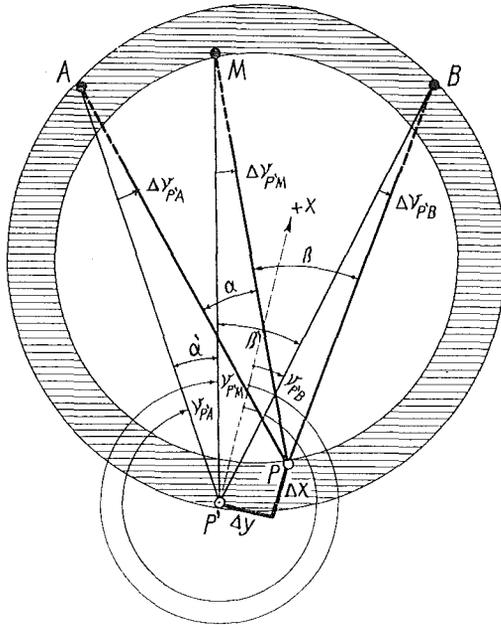


Abb. 1

Die Näherungslage P' soll nun so verändert werden, daß folgende Gleichungen koexistieren:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{P'M} + \Delta \nu_{P'M} - \nu_{P'A} - \Delta \nu_{P'A} &= \alpha \\ \nu_{P'B} + \Delta \nu_{P'B} - \nu_{P'M} - \Delta \nu_{P'M} &= \beta \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

worin

$$\begin{aligned} \nu_{P'M} - \nu_{P'A} &= \alpha' \\ \nu_{P'B} - \nu_{P'M} &= \beta'. \end{aligned}$$

α und β sind die gemessenen, zunächst als fehlerfrei angenommenen Winkel zwischen den drei gegebenen Festpunkten A , M und B .

Unter Berücksichtigung von (1) gestalten sich die beiden Gleichungen (3) bei Weglassung der Indizes P' und P zu:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x (a_M - a_A) + \Delta y (b_M - b_A) &= \alpha - \alpha' = \Delta \alpha \\ \Delta x (a_B - a_M) + \Delta y (b_B - b_M) &= \beta - \beta' = \Delta \beta \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen in Determinantenform ergibt bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{D_1}{D} \\ \Delta y &= \frac{D_2}{D} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\left. \begin{aligned} a_M - a_A &= A_{MA} \\ b_M - b_A &= B_{MA} \\ a_B - a_M &= A_{BM} \\ b_B - b_M &= B_{BM} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

so erhält man für

$$\left. \begin{aligned} D &= A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM} \\ D_1 &= B_{BM} \Delta \alpha - B_{MA} \Delta \beta \\ D_2 &= A_{MA} \Delta \beta - A_{BM} \Delta \alpha \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Unter Beachtung der Gleichungsgruppe (7) lautet (5):

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{B_{BM} \Delta \alpha - B_{MA} \Delta \beta}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}} \\ \Delta y &= \frac{A_{MA} \Delta \beta - A_{BM} \Delta \alpha}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Es ist dies sinngemäß dieselbe Formel, die bereits Jordan in [3], anlässlich der Ableitung des mittleren Punktfehlers für das Rückwärtseinschneiden erhalten hatte, jedoch mit dem Unterschied, daß bei Jordan $d\alpha$ und $d\beta$ gewisse differentielle Fehler der gemessenen Winkel α und β bedeuten, während $\Delta \alpha$ und $\Delta \beta$ nach (8) ganz bestimmte, von der Näherungslage P' abhängige, streng errechenbare Differenzen darstellen.

Die Berechnung von Δx und Δy nach (8) erfolgt am besten mit einer Rechenmaschine, da hohe Rechengenauigkeit wegen ungünstiger Fehlerfortpflanzung bei der Auswertung obiger Formeln für den Grenzfall der Nähe des gefährlichen Kreises mitunter erforderlich sein wird. Näheres hierüber ergibt sich aus dem Abschnitt IV dieser Abhandlung.

Da die Nennerdeterminante D des Gleichungssystems (8) bekanntlich die doppelte Fläche des Reziprokdreieckes bedeutet, gestaltet sich Formelgruppe (8) gemäß Abb. 2 unter Einführung eines Hilfskoordinatensystems mit den Achsen ξ und η und dem Ursprung im Punkt 2 des bezüglichen reziproken Raumes zu

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta \xi_{32} \Delta \alpha + \Delta \xi_{12} \Delta \beta}{2 \Delta_t} \\ \Delta y &= \frac{\Delta \eta_{12} \Delta \beta + \Delta \eta_{32} \Delta \alpha}{2 \Delta_t} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

in der

$$\begin{aligned} \Delta \xi_{32} &= \xi_2 - \xi_3 = t_2 \cos \nu_2 - t_3 \cos \nu_3 = B_{BM} \\ -\Delta \xi_{12} &= \xi_1 - \xi_2 = t_1 \cos \nu_1 - t_2 \cos \nu_2 = B_{MA} \\ \Delta \eta_{12} &= \eta_2 - \eta_1 = t_2 \sin \nu_2 - t_1 \sin \nu_1 = A_{MA} \\ -\Delta \eta_{32} &= \eta_3 - \eta_2 = t_3 \sin \nu_3 - t_2 \sin \nu_2 = A_{BM} \end{aligned}$$

$2\Delta_t$ bedeutet wieder die doppelte Fläche des Reziprokdreieckes für $t_{cm} = \frac{\rho^{cc}}{S_{cm}}$.

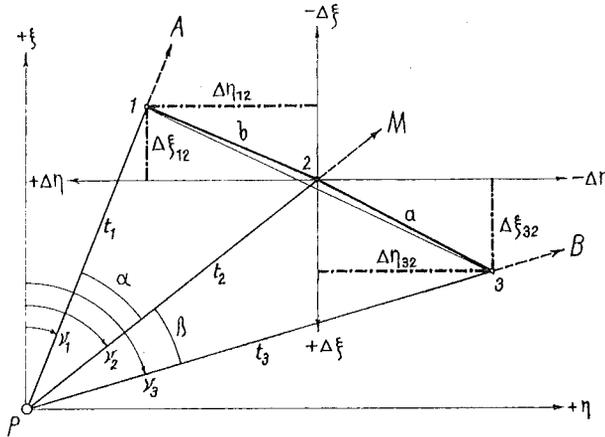


Abb. 2

Die Auswertung der Formelgruppe (9) wird zweckmäßig dann auf graphisch-mechanischem Wege erfolgen müssen, wenn eine verhältnismäßig kurze Seitenlänge von etwa 500 m und eine Unsicherheit der Näherungslage des Neupunktes von ca. 1 m eine zweimalige Berechnung der Richtungskoeffizienten wegen Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung nach Abschnitt IV notwendig macht. Die erste Berechnung erfolgt in diesem Fall nach (9) auf graphisch-mechanischem Wege und die zweite Berechnung nach (8) wird dann erst streng, allenfalls unter Zuhilfenahme einer Rechenmaschine, durchgeführt.

III. Beispiel

Die eben abgeleitete Formelgruppe (8) fand nun in meiner Praxis Anwendung zur Erprobung bei der Berechnung von vorläufigen Koordinaten des EP 16 – Kematen aus einer Rückwärtseinschnitt-Kombination in Nähe des gefährlichen Kreises, wie aus Abb. 3 ersichtlich ist. Dieser EP gehört dem zusammenhängenden und elektronisch ausgeglichenen EP-Netz Kematen in Niederösterreich an, wodurch auch ein Vergleich der streng ausgeglichenen Koordinaten dieses EP mit den nach Abschnitt II berechneten Koordinaten desselben Neupunktes die Güte des Rechenverfahrens zu beurteilen ermöglicht.

Die Koordinaten der drei gegebenen Festpunkte lauten:

	y	x
⊕ 160-52 ...	+ 105 508,92 m	5 320 508,91 m
⊕ 4-52 ...	+ 108 738,89 m	3 219 50,04 m
⊕ 24-70 ...	+ 106 693,70 m	3 185 22,22 m

Die Berechnung der Koordinaten einer Näherungslage zum EP ergab auf ganze Meter aufgerundet die folgenden Werte:

$$y = + 106065,00 \text{ m}$$

$$x = 321 638,00 \text{ m}$$

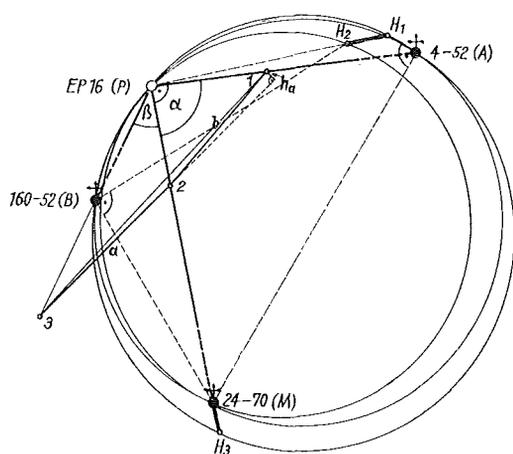


Abb. 3

Hiezu muß für den Praktiker vermerkt werden, daß im Hinblick auf das weitere Rechenverfahren eine grobe Auf- oder auch Abrundung der allenfalls nach den bekannten und amtsüblichen Methoden der Berechnung von Rückwärtseinschnitten mittels Rechenmaschine bestimmten Koordinaten unbedingt erforderlich ist, da sonst die gemessenen Winkel α und β , mit denen die betreffende Rückwärtseinschnitt-Kombination in der Nähe des gefährlichen Kreises gerechnet wurde, durch Rückrechnung über entsprechende Richtungswinkel in allen Fällen wieder genau, bis auf eine gewisse Rechenungenauigkeit erhalten werden, was jedoch im Widerspruch zu den Entwicklungen aus Abschnitt II stünde.

Die Koordinaten der Näherungslage dürfen eben zunächst nicht streng und unmittelbar aus den beiden Winkeln α und β abgeleitet sein; die Berechnung muß über eine Näherungslage erfolgen, um bessere Koordinaten des Neupunktes für den vorliegenden Grenzfall zu erhalten, als nach den bisher üblichen Methoden der unmittelbaren Berechnung zu erwarten ist.

Die gemessenen Winkel α und β lauten:

$$\alpha = 94^{\circ} 73' 38''$$

$$\beta = 41^{\circ} 82' 18''$$

Die aus den Koordinaten der Näherungslage P' und den Festpunkten berechneten Richtungswinkel v' :

$$\begin{aligned}v'_4 &= 92^\circ 60' 42'' \\v'_{24} &= 187^\circ 32' 45'' \\v'_{160} &= 229^\circ 13' 37''\end{aligned}$$

Die durch Differenzbildung entsprechender Richtungswinkel v' erhaltenen Winkel α' und β' :

$$\begin{aligned}v'_{24} - v'_4 &= \alpha' = 94^\circ 72' 03'' \\v'_{160} - v'_{24} &= \beta' = 41^\circ 80' 92''\end{aligned}$$

Die Differenz der gemessenen Winkel α und β und den aus der Näherungslage P' resultierenden Winkel α' , β' :

$$\begin{aligned}\Delta \alpha &= \alpha - \alpha' = + 135'' \\ \Delta \beta &= \beta - \beta' = + 126''\end{aligned}$$

Die Gleichungsgruppe (8) aus Abschnitt II lautet allgemein:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{B_{BM} \Delta \alpha - B_{MA} \Delta \beta}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}} \\ \Delta y &= \frac{A_{MA} \Delta \beta - A_{BM} \Delta \alpha}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}}\end{aligned}$$

Nach (6) aus Abschnitt II:

$$\begin{aligned}A_{MA} &= a_M - a_A = 39,6 - 234,9 = - 195,3 \\ B_{MA} &= b_M - b_A = 196,3 + 27,4 = + 223,7 \\ A_{BM} &= a_B - a_M = - 223,4 - 39,6 = - 263,0 \\ B_{BM} &= b_B - b_M = 453,7 - 196,3 = + 257,4\end{aligned}$$

Die zahlenmäßige Berechnung obiger Koeffizienten erfolgte mit einer Rechenmaschine.

$$\begin{aligned}\text{Daher: } \Delta x &= \frac{257,4 \cdot 135 - 223,7 \cdot 126}{- 195,3 \cdot 257,4 - 223,7 \cdot 263,0} = \frac{6562,8}{8562,9} = + 0,77 \text{ m} \\ \Delta y &= \frac{- 195,3 \cdot 126 + 263,0 \cdot 135}{- 195,3 \cdot 257,4 - 223,7 \cdot 263,0} = \frac{10897,2}{8562,9} = + 1,27 \text{ m}\end{aligned}$$

Die vorläufigen Koordinaten von EP 16 – Kematen lauten demnach:

$$\begin{aligned}y &= + 106065,00 + 1,27 = + 106066,27 \text{ m} \\ x &= 5321638,00 + 0,77 = 5321638,77 \text{ m}\end{aligned}$$

Demgegenüber stehen die Soll-Koordinaten aus dem elektronischen Ausgleich:

$$\begin{aligned}y &= + 106066,27 \text{ m} \\ x &= 5321638,80 \text{ m}\end{aligned}$$

Dies zeigt eine genaue Übereinstimmung in y , x weicht um $+ 3$ cm vom Soll-Wert ab.

IV. Genauigkeitsbetrachtungen

Sind die gemessenen Winkel α und β mit den kleinen, aber endlichen Fehlergrößen δ_α und δ_β behaftet, so erhält man durch Differentiationen der Formelgruppe (8) aus Abschnitt II die maximalen Fehler:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \frac{|B_{BM} \delta_\alpha| + |B_{MA} \delta_\beta|}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}} \\ \delta_y &= \frac{|A_{MA} \delta_\beta| + |A_{BM} \delta_\alpha|}{A_{MA} B_{BM} - B_{MA} A_{BM}} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Die Fehler sind im allgemeinen direkt proportional den Fehlern δ_α , δ_β und verkehrt proportional dem Nenner bzw. der Determinante D des Gleichungssystems. Betrachtet man nun den Aufbau dieser Determinante aus (2) und (6) von Abschnitt II, so erkennt man, daß man umso größere Werte für D erhält, je kleiner die Entfernungen s des Neupunktes von den Festpunkten sind. Diese Entfernungen müssen jedoch so begrenzt sein, daß die Glieder höherer Ordnung der Formelgruppe (1), Abschnitt II vernachlässigt werden dürfen. Da die gemessenen Winkel α und β aus (3), Abschnitt II mit Sekundengenauigkeit erhalten werden sollen, ist es erforderlich, daß die entsprechenden Differenzen der Richtungsänderungen aus (1) ebenfalls Sekundengenauigkeit aufweisen müssen. Dies wird bestimmt erreicht, wenn man z. B. festlegt, daß die Glieder zweiter Ordnung möglichst unter zwei Zehntel-Neusekunden bleiben.

Die obere Schranke für die Glieder zweiter Ordnung ergibt sich nun aus einer Differentiation der Richtungsänderung aus (1):

$$\frac{d^2 \nu}{2!} = \frac{\rho}{s^2} \cdot \left[\left| \frac{\sin 2\nu}{2} \cdot (\Delta x^2 - \Delta y^2) \right| + \left| \cos 2\nu \Delta x \Delta y \right| \right]$$

Für $\nu = 0^\circ$ erhält der Klammerausdruck seinen Maximalwert, und läßt man maximale Spannungen in den Koordinaten der Näherungslage von $|\Delta x| = |\Delta y| = 1$ m noch zu, so wird $s \geq \sqrt{5\rho} \approx 1800$ m. Das heißt also, bei 2000-m-Entfernungen des Neupunktes von den Festpunkten erreichen die Fehler in den Richtungsänderungen nach (1) bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung kaum den Betrag von zwei Zehntel-Neusekunden.

Will man jedoch noch Entfernungen bis zu 500 m des Neupunktes von den Festpunkten zulassen, so dürfen die maximalen Spannungen in den Koordinaten der Näherungslage des Neupunktes entweder nicht mehr als $|\Delta x| = |\Delta y| = 0,3$ m betragen, um die Fehler in den Richtungsänderungen bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung möglichst unter zwei Zehntel-Neusekunden zu halten,

denn $\frac{d^2 \nu}{2!} = \frac{9 \rho^{ec}}{25 \cdot 10^6} \approx 0,2^{ec}$, oder es müßte — wie bereits im Abschnitt II entwickelt — eine zweimalige Berechnung der Näherungslage des Neupunktes erfolgen, um die geforderten Genauigkeiten zu erreichen.

Andererseits bedeutet die Nennerdeterminante bekanntlich die doppelte Fläche des entsprechenden Reziprokdreiecks.

Für den vorliegenden Grenzfall, nämlich der Nähe des Neupunktes zum gefährlichen Kreis, wird die Nennerdeterminante verhältnismäßig klein ausfallen und

die Punktlagegenauigkeit des Neupunktes mitunter stark vermindern, wie aus den folgenden Darlegungen zu ersehen ist.

Geht man wieder zu mittleren Fehlern über, indem man gleichzeitig $m_\alpha = m_\beta = m$ setzt, so erhält man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{m}{D} \sqrt{B^2_{BM} + B^2_{MA}} \\ m_y &= \frac{m}{D} \sqrt{A^2_{MA} + A^2_{BM}} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

und den mittleren Punktlagefehler

$$M = \sqrt{m^2_x + m^2_y} = \frac{m}{D} \sqrt{A^2_{MA} + B^2_{MA} + A^2_{BM} + B^2_{BM}} \dots (12)$$

Eine einfache Transformation der Formel (12) liefert wieder Formel (5) aus [1]:

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{h_a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}, \text{ denn}$$

$$A^2_{MA} = \left(\frac{\rho}{s_M} \sin v_M - \frac{\rho}{s_A} \sin v_A\right)^2 = (t_2 \sin v_2 - t_1 \sin v_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2 = \Delta \eta^2_{12}$$

$$B^2_{MA} = \left(\frac{-\rho}{s_M} \cos v_M + \frac{\rho}{s_A} \cos v_A\right)^2 = (t_1 \cos v_1 - t_2 \cos v_2)^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 = \Delta \xi^2_{12}$$

$$A^2_{BM} = \left(\frac{\rho}{s_B} \sin v_B - \frac{\rho}{s_M} \sin v_M\right)^2 = (t_3 \sin v_3 - t_2 \sin v_2)^2 = (\eta_3 - \eta_2)^2 = \Delta \eta^2_{32}$$

$$B^2_{BM} = \left(\frac{-\rho}{s_B} \cos v_B + \frac{\rho}{s_M} \cos v_M\right)^2 = (t_2 \cos v_2 - t_3 \cos v_3)^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 = \Delta \xi^2_{32}$$

daher wird

$$M = \frac{m}{2\Delta_t} \cdot \sqrt{\Delta \eta^2_{12} + \Delta \xi^2_{12} + \Delta \eta^2_{32} + \Delta \xi^2_{32}},$$

weilers ist nach Abb. 2

$$\Delta \eta^2_{12} + \Delta \xi^2_{12} = b^2$$

$$\Delta \eta^2_{32} + \Delta \xi^2_{32} = a^2$$

mithin wird $M = \frac{m}{2\Delta_t} \cdot \sqrt{b^2 + a^2}$, setzt man für $2\Delta_t = a \cdot h_a$, so erhält man

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{h_a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{m^{cc}}{h_a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$\frac{1}{n}$ bedeutet hierin das Verhältnis $\frac{b}{a}$ der beiden Seiten des Reziprokdreieckes, h_a ist die auf die größere Seite a gefällte Höhe (Abb. 3 und Abb. 4).

Während nun Formel (5) aus [1] als Grundlage zur Konstruktion eines Diagrammes diente, mit dem man den Punktlagefehler des betreffenden Rückwärts-einschnittes direkt ablesen konnte, bedarf es zum Abschätzen eines mittleren Punkt-

Der Abstand des Collins'schen Hilfspunktes H_3 vom Festpunkt M der Mittelvisur ist demnach im reziproken Raum laut Abb. 4 der Abstand $\overline{22'}$,

$$\overline{H_3M} = \frac{\rho}{t'_2} - \frac{\rho}{t_2} = \frac{\rho(t_2 - t'_2)}{t_2 t'_2}$$

die Höhe h_a des Eckpunktes 1 des Reziprokdreieckes auf die längere Seite a kann in Anbetracht ihrer differentiellen Größenordnung näherungsweise gesetzt werden:

$$h_a \approx \frac{\sqrt{13}}{a} \cdot |t_2 - t'_2|.$$

Da ferner

$$\frac{\rho}{t'_2} = \overline{H_3M} + \frac{\rho}{t_2}$$

erhält man für

$$M_{cm} = \frac{m^{cc} \cdot a}{13} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\overline{H_3M} \cdot t_2} \cdot \left(\overline{H_3M} + \frac{\rho}{t_2}\right)$$

Da nun $\overline{H_3M} + \frac{\rho}{t_2} = \overline{H_3M} + s_M \approx s_M$, $\frac{\sqrt{13}}{a} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{n}$

und $\frac{a}{13} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ ist, gelangt man schließlich zur Formel

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{s_M}{\left(\frac{\overline{H_3M}}{s_M}\right)} \quad \dots (13)$$

in der m^{cc} den mittleren Fehler der beobachteten Winkel α und β , $\frac{1}{n}$ das Verhältnis von $\frac{b}{a}$ der Seiten des Reziprokdreieckes, s_M die Länge der Mittelvisur und $\overline{H_3M}$ den Abstand des Collins'schen Hilfspunktes H_3 vom Festpunkt M der Mittelvisur bedeuten.

Durch eine einfache Transformation des Verhältnisses $\frac{1}{n} = \frac{b}{a}$ des reziproken Raumes in den Festpunktraum läßt sich Formel (13) folgendermaßen ausdrücken:

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{s_M}{\left(\frac{\overline{H_3M}}{s_M}\right)} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\overline{AM} \cdot s_B}{\overline{MB} \cdot s_A}\right)^2}}{\left(1 + \frac{\overline{AM} \cdot s_B}{\overline{MB} \cdot s_A}\right)}$$

Nach Einführung von $\overline{MB} \cdot s_A = p$ und $\overline{AM} \cdot s_B = q$ gelangt man demnach zu:

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{s_M}{\left(\frac{\overline{H_3M}}{s_M}\right)} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2}} \quad \dots (14)$$

Die Berechnung des mittleren Punktlagefehlers M_{cm} für einen Neupunkt in Nähe des gefährlichen Kreises kann demnach sowohl nach Formel (13) als auch nach Formel (14) erfolgen. Da jedoch zur Beurteilung der Güte eines rückwärts-einzuschneidenden Einschaltpunktes das bezügliche Reziprokdreieck gezeichnet werden muß, wird Formel (13) zur Berechnung des mittleren Punktlagefehlers für den Grenzfall der Lage eines EP am gefährlichen Kreis der Approximations-Geometrie vorteilhaft anzuwenden sein.

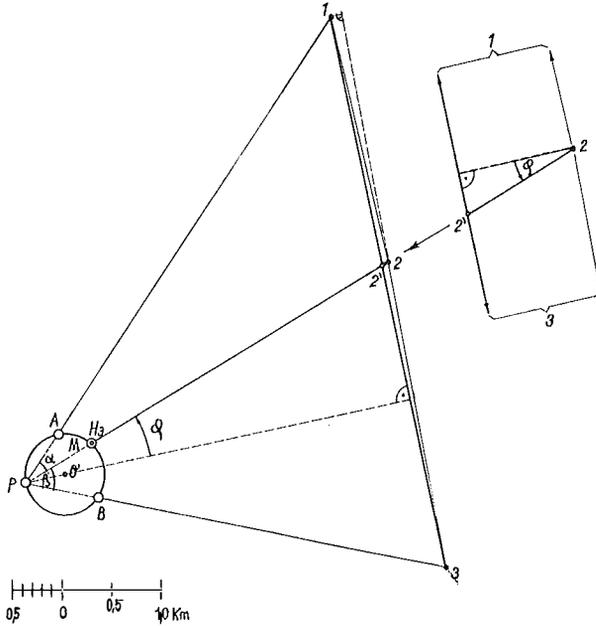


Abb. 5

Schließt nun die Mittelvisur mit der Richtung durch den Mittelpunkt des gefährlichen Kreises einen Winkel φ ein, so nehmen die Formeln (13) und (14), wie aus Abb. 5 zu ersehen ist, folgende Form an:

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{s_M}{\left(\frac{H_3 M}{s_M}\right) \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \dots (15)$$

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{s_M}{\left(\frac{H_3 M}{s_M}\right) \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{(p + q)^2} \quad \dots (16)$$

Der Winkel φ ist hierbei den Abbildungen im reziproken Raum zu entnehmen.

TABELLE

$$M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{s_M}{\frac{H_3 M}{s_M} \cos \varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\overline{H_3 M} = 10 \text{ m}$$

s_M	n	$\frac{\overline{H_3 M}}{s_M} \cdot \cos \varphi$		M_{cm} für $m^{cc} =$					s_M	n	$\frac{\overline{H_3 M}}{s_M} \cdot \cos \varphi$		M_{cm} für $m^{cc} =$				
		φ^g		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0			φ^g		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
500	1	0	1/50	2,7	4,0	5,4	6,8	8,1	700	1	0	1/70	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2
		10	1/51	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4			10	1/71	5,5	8,2	11,0	13,8	16,5
		30	1/56	3,1	4,6	6,2	7,7	9,3			30	1/78	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0
	2	0	1/50	2,9	4,3	5,8	7,2	8,7	700	2	0	1/70	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4
		10	1/51	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0			10	1/71	5,9	8,8	11,8	14,7	17,7
		30	1/56	3,3	4,9	6,6	7,9	9,9			30	1/78	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2
	3	0	1/50	3,1	4,6	6,2	7,7	9,3	700	3	0	1/70	6,1	9,1	12,2	15,2	18,3
		10	1/51	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6			10	1/71	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6
		30	1/56	3,5	5,2	7,0	8,8	10,5			30	1/78	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4
600	1	0	1/60	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	800	1	0	1/80	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0
		10	1/61	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0			10	1/81	7,1	10,6	14,2	17,8	21,3
		30	1/67	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2			30	1/90	7,9	11,8	15,8	19,8	23,7
	2	0	1/60	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	800	2	0	1/80	7,5	11,3	15,0	18,8	22,5
		10	1/61	4,3	6,4	8,6	10,7	12,9			10	1/81	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8
		30	1/67	4,7	7,1	9,4	11,7	14,1			30	1/90	8,5	12,8	17,0	21,3	25,5
	3	0	1/60	4,5	6,8	9,0	11,2	13,5	800	3	0	1/80	7,9	11,9	15,8	19,8	23,7
		10	1/61	4,5	6,8	9,0	11,2	13,5			10	1/81	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0
		30	1/67	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0			30	1/90	8,9	13,4	17,8	22,3	26,7

Der Tabelle sind nun für die Größe $\overline{H_3 M} = 10 \text{ m}$, den mittleren Fehlern der Winkelmessung $m^{cc} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5$ und $3,0$, den Seitenlängen der Mittelvisur für $s_M = 500 \dots 800 \text{ m}$, von 100 zu 100 m, sowie φ für $0^g, 10^g, 30^g$ und den Verhältnissen der Seiten a und b des Reziprokdreieckes für $n = 1, 2$ und 3 , die mittleren Punktlagefehler M_{cm} nach den entwickelten Fehlerformeln zu entnehmen.

Weiters erkennt man, daß bei einer Vergrößerung der Länge der Mittelvisur s_M von 500 m auf 800 m, das sind 60%, die mittleren Punktlagefehler, bei Annahme ein und derselben Winkelmeßgenauigkeit, um ca. 160% wachsen.

Während nun die Verhältnisse $\frac{H_3 M}{s_M} \cdot \cos \varphi$ für $\varphi = 0$ bis 30^g um ca. 11% kleiner werden, erfahren die mittleren Punktlagefehler hiedurch eine Erhöhung um ca. 12%.

Wollte man nun einen Einschaltpunkt, der sich bereits auf einem Kreis im Sinne der Approximations-Geometrie befindet, dennoch mit einer Punktlage-Genauigkeit von $M = 5 \text{ cm}$ erhalten, so darf, wie in der Tabelle ersichtlich, die Mittelvisur nicht

länger als 500 m und der mittlere Winkelfehler der beiden gemessenen Winkel α und β nicht größer als ca. $2,0^{cc}$ sein.

Läßt man andererseits bei Bestimmung von vorläufigen Koordinaten eines solchen EP mittlere Punktagefehler von ca. 25 cm noch zu, so können für $m = 3,0^{cc}$ die Mittelvisuren S_M auch 800 m betragen.

Für $m = 1^{cc}$ und eine Mittelvisur $S_M = 800$ m könnte man demnach laut Tabelle einen Punktagefehler $M = 8,0$ cm noch erreichen.

Was nun die Genauigkeit der Fehlerformeln (13) bis (16) anbelangt, so beträgt der Fehler, der bei der Ableitung dieser Formeln infolge Vernachlässigung der Größe $\overline{H_3 M}$ durch Gleichsetzung von $\overline{H_3 M} \pm s_M = s_M$ entsteht:

$$\Delta M_{cm} = \frac{m^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot \frac{\overline{H_3 M}}{\left(\frac{H_3 M}{S_M}\right) \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

So z. B. erhält man für $m = 1^{cc}$, $n = 3$, $S_M = 500$ m, $\overline{H_3 M} = 10$ m, $\varphi = 0^g$, einen Fehler $\Delta M = 0,06$ cm; bei einer Länge der Mittelvisur von $S_M = 800$ m: $\Delta M = 0,1$ cm.

Dies zeigt also, daß die in der Tabelle angegebenen mittleren Punktagefehler M_{cm} für einen Bereich der Winkelmeßgenauigkeit von $m = 1 \dots 3^{cc}$ maximal um ca. 0,3 cm von den Sollwerten abweichen können.

Am Ende dieser Betrachtungen möchte ich noch für den Praktiker einige Überlegungen über die zu erreichende Genauigkeit bei der Berechnung einer Rückwärts-einschnitt-Kombination in Nähe des gefährlichen Kreises nach der Cassinischen Methode mittels Rechenmaschine anstellen.

Unter Annahme von fehlerfreien Winkeln α und β erhält man durch eine etwa cm-Auf- oder auch -Abrundung bei der Berechnung der Koordinaten der Hilfspunkte Fehler in dem errechneten Richtungswinkel $\nu_{H_1 P}$ bzw. ν_{MP} .

Aus Formel $\operatorname{tg} \nu_{H_1 P} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ergibt sich durch Differentiation eine obere Schranke für den Fehler von $\nu_{H_1 P}$:

$$\delta \nu_{H_1 P} = \left| \frac{\cos \nu_{12}}{s_{12}} \cdot (|\delta y_2| + |\delta y_1|) \right| + \left| \frac{\sin \nu_{12}}{s_{12}} \cdot (|\delta x_2| + |\delta x_1|) \right|$$

Setzt man die Abrundungsfehler der berechneten Koordinaten der Hilfspunkte H_1 und H_2 allgemein: $|\delta y_1| = |\delta x_1| = |\delta y_2| = |\delta x_2| = \delta$, so ist

$$\delta^{cc} \nu_{H_1 P} = \frac{\rho^{cc} 2 \delta}{s_{12}} (\sin \nu_{12} + \cos \nu_{12})$$

Die obere Schranke für die lineare Verschiebung des Neupunktes am Ende der Mittelvisur beträgt demnach:

$$\overline{MP} \cdot \delta \nu_{H_1 P} = \frac{2 \overline{MP} \cdot \delta}{s_{12}} \cdot (\sin \nu_{12} + \cos \nu_{12})$$

Nimmt man z. B. $\delta = 5 \cdot 10^{-1}$ cm, $s_{12} = 100$ m, $\overline{MP} = 2000$ m, $\varphi = 100^\circ$, so ist $\overline{MP} \cdot \delta \nu_{H,P} = 20$ cm.

Auch eine Berechnung über den Collins'schen Hilfspunkt — in Abb. 2 mit H_3 bezeichnet — würde zu keinem genaueren Rechenergebnis führen.

Zwischen dem Abstand und den Koordinatendifferenzen der Cassini'schen Hilfspunkte H_1 und H_2 sowie zwischen dem Abstand und den Koordinatendifferenzen des Collins'schen Hilfspunktes H_3 und des mittleren gegebenen Festpunktes M besteht nämlich nach den Untersuchungen von Tarczy-Hornoch [4] mit sinngemäßer Bezeichnung ein interessanter Zusammenhang:

$$|y_{H_3} - y_M| = \left| \frac{x_{H_2} - x_{H_1}}{\cotg \alpha + \cotg \beta} \right|, \quad |x_{H_3} - x_M| = \left| \frac{y_{H_2} - y_{H_1}}{\cotg \alpha + \cotg \beta} \right|,$$

$$\overline{H_3 M} = \frac{\overline{H_1 H_2}}{|\cotg \alpha + \cotg \beta|}$$

Wollte man also nach den üblichen Verfahren der unmittelbaren Berechnung von Rückwärtseinschnitten mittels Rechenmaschine auch für diesen Grenzfall der Nähe des Neupunktes zum gefährlichen Kreis, die Rechengenauigkeit des in dieser Abhandlung entwickelten Rechenverfahrens erhalten, so müßten die Koordinaten der Hilfspunkte mit mindestens mm-Genauigkeit berechnet werden, was für den Praktiker bei Verwendung einer kleinen Rechenmaschine sich mitunter als umständlich erweisen würde.

V. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird erstens für den Praktiker ein einfaches Rechenverfahren entwickelt, das für den Fall der Berechnung vorläufiger Koordinaten eines in Nähe des sogenannten „gefährlichen Kreises“ liegenden Einschaltpunktes (EP), genauere Werte zu bestimmen ermöglicht, als dies nach den amtsüblichen Methoden der unmittelbaren Berechnung von Rückwärtseinschnitten zu erwarten ist.

Die Berechnung erfolgt über eine, entweder auf graphischem oder auch rechnerischem Wege, mit 1-m-Genauigkeit ermittelte Näherungslage des betreffenden EP, wobei die gemessenen Winkel α und β zwischen je zwei Festpunkten als fehlerfrei angenommen werden und die durchschnittliche Entfernung des Neupunktes von den drei Festpunkten zunächst nicht weniger als zwei Kilometer betragen soll.

Zweitens wird aber auch für den Fall, daß die durchschnittliche Entfernung des Neupunktes von den drei Festpunkten weniger als zwei Kilometer beträgt, ein graphisch-mechanisch-rechnerisches Verfahren entwickelt, das die vorläufigen Koordinaten eines EP in Nähe des gefährlichen Kreises mit zweckentsprechender Genauigkeit zu bestimmen ermöglicht.

Drittens werden Formeln zur Ermittlung der mittleren Punktlagefehler abgeleitet, in denen die Nähe des gefährlichen Kreises als Funktion des Abstandes des Collins'schen Hilfspunktes vom Festpunkt der Mittelvisur sowie dem Verhältnis dieses Abstandes zur Länge der Mittelvisur gekennzeichnet ist.

Die nach diesen Formeln, für $\overline{H_3 M} = 10$ m, $m = 1^c \dots 3^c$, $S_M = 500 \dots 800$ m errechneten Punktlagefehler M_{em} sind in der Tabelle ersichtlich gemacht.

VI. Literatur

- [1] *Smetana, Walter*: Punktlagefehler-Felddiagramm für das Rückwärtseinschneiden. *ÖZfV* 47 (1959), Nr. 1, S. 8—12.
- [2] *Boxan, Robert*: Elektronische Netzeinschaltung. *ÖZfV* 50 (1962), Nr. 5, S. 151—152.
- [3] *Jordan, W.*: Handbuch der Vermessungskunde, 2. Band, 1. Halbband 1931, S. 450—451.
- [4] *Tarczy-Hornoch, A.*: Beiträge zur Berechnung des Rückwärtseinschnittes, Sonderveröffentlichung 14 der *ÖZfV* 1952, S. 90.

Das Grundsteuergesetz 1955 und Bewertungsgesetz 1955

Von *Leopold Krepper*

Wie allgemein bekannt ist, werden zur Ermittlung der Grundsteuer nicht mehr die Katastralreinerträge herangezogen, sondern die „*Einheitswerte der wirtschaftlichen Einheiten*“. Der § 18 des österr. *Grundsteuergesetzes vom 13. Juli 1955, BGBl. Nr. 149* bestimmt, daß bei der Berechnung der Grundsteuer von einem *Grundsteuermeßbetrag* auszugehen ist, welcher aus dem Einheitswert abgeleitet wird, und — je nach Vermögensart — 1 bis 2 Promille des Einheitswertes beträgt. Dieser Grundsteuermeßbetrag, multipliziert mit einem bestimmten Hundertsatz, dem sog. *Hebesatz*, ergibt die Grundsteuer (§ 27 des Grundsteuergesetzes).

Zum Beispiel: Einheitswert S 100000, Grundsteuermeßbetrag S 200 ($2^0/_{00}$ des Einheitswertes), Hebesatz 300%, ergibt eine Grundsteuer von S 600. Der Hebesatz wird von den Gemeinden alljährlich festgesetzt und darf bestimmte Grenzen — z. B. bei landwirtschaftlichem Vermögen 400% — nicht übersteigen.

Es ist daher die Berechnung der Grundsteuer eine höchst einfache Sache, sofern der Einheitswert bekannt ist. Die Frage ist daher, wie wird der Einheitswert einer wirtschaftlichen Einheit bestimmt. Maßgebend hiefür sind die Bestimmungen des *Bewertungsgesetzes vom 13. Juli 1955 (Bew.G.) BGBl. Nr. 148*.

Ehe auf den eigentlichen Gang der Bewertung, d. h. der Ermittlung des Einheitswertes einer wirtschaftlichen Einheit, eingegangen wird, sollen einleitend einige Begriffsbestimmungen sowie der Grundsatz der Bewertung näher erläutert werden.

Unter dem Begriff *wirtschaftliche Einheit* (§ 2 Bew.G.) versteht man im allgemeinen die Gesamtheit der zu einem bestimmten wirtschaftlichen Zweck verbundenen und anhaltend gemeinsam genützten *Wirtschaftsgüter*. Ein Wirtschaftsgut ist jeder der Wirtschaft dienende, im wirtschaftlichen Verkehr stehende körperliche (Sache) oder unkörperliche (Rechte, z. B. Baurecht) Gegenstand. Allerdings bilden mehrere Wirtschaftsgüter nur dann eine wirtschaftliche Einheit, wenn sie *demselben Eigentümer* gehören. Der wirtschaftliche Zweck, der die einzelnen Güter verbindet, genügt daher allein nicht, um eine wirtschaftliche Einheit zu bilden. Eine wirtschaftliche Einheit wird durch Verwaltungsgrenzen (Katastralgemeinden usw.) nicht getrennt (§ 13 Grundsteuergesetz).

Mit Ausnahme des land- und forstwirtschaftlichen Vermögens ist den Bewertungen der *gemeine Wert* zugrunde zu legen. Der *gemeine Wert* wird durch den Preis bestimmt, der im gewöhnlichen Geschäftsverkehr nach der Beschaffenheit des Wirtschaftsgutes bei Veräußerung zu erzielen wäre (§ 10 Bew.G.). Da im gewöhn-