

Paper-ID: VGI_196402



Über ein Stellartriangulations-Verfahren

Karl Killian ¹

¹ *Wien XIV, Hadikgasse 40*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **52** (1), S. 14–24

1964

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_196402,  
Title = {\U}ber ein Stellartriangulations-Verfahren},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {14--24},  
Number = {1},  
Year = {1964},  
Volume = {52}  
}
```



teilnehmer veranstaltet hat, und mit einem Besuch in den Wiener Kammerspielen für alle sonstigen Festgäste, denen eine Aufführung des Lustspiels „Sonntag in New York“ von N. Krasna geboten wurde.

Am Freitag, dem 25. Oktober, waren alle Festgäste zu einem Tagesausflug eingeladen, der mit Autobussen über Wr.-Neustadt und Gloggnitz zunächst nach Reichenau führte, wo eine Frühstückspause gehalten wurde. Über Breitenstein folgte die Weiterfahrt auf den Semmering zum Mittagessen im Hotel Panhans. Leider konnten die Fahrtteilnehmer von der schönen Herbstfärbung der Wälder des Semmeringgebietes nur wenig sehen, weil eine dichte Nebeldecke in den Bereichen über 800 Meter Seehöhe jede Fernsicht nahm. Die Rückfahrt erfolgte über Schottwien, Bad Vöslau und Baden zum Turmhof in Gumpoldskirchen, wo die Teilnehmer der Hundertjahrfeier zu einem Heurigenabend geladen waren, der die Festveranstaltung zu einem fröhlichen Ausklang führte.

Die festliche und die heitere Note der Veranstaltungen, die Auffrischung alter Kontakte und die Anknüpfung neuer Bekanntschaften und die den Damen zum Abschlusse überreichte Damenspende in Form einer Augartenvase werden, so hoffen die Veranstalter, dazu beitragen, die Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung in guter Erinnerung zu behalten.

Literatur:

Jordan-Eggert-Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde, Zehnte Ausgabe, Band IV, Stuttgart 1958;

Die *K. k. Technische Hochschule in Wien* 1815–1915, Wien 1915;

Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Baden bei Wien, Jahrgänge 1934, 1949, 1950 und 1960;

Festschrift zur Hundertjahrfeier der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung, Sonderheft 24 der *Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen*, Wien 1964.

Über ein Stellartriangulations-Verfahren

Von *Karl Killian*, Wien

a) Einleitung

In einer vorangegangenen Arbeit wurde ein Stellartriangulations-Verfahren in Vorschlag gebracht [7]: In mehreren Stationen befinden sich Astrographen, mit denen die von Raketen ausgesandten Lichtblitze sowie die jeweils umliegenden Sterne gleichzeitig photographiert werden. Die Raketen werden ungefähr in vertikaler Richtung in verschiedenen Punkten der Erde nach beliebigen Zwischenzeiten gestartet. Diese Punkte können innerhalb weiter Grenzen gewählt werden und brauchen gegenüber den Stationen nur insofern bekannt sein, daß sie zur Einstellung der Astrographen hinreichen. Dasselbe gilt für die genannten Zwischenzeiten. Die der scheinbaren täglichen Bewegung des Sternenhimmels mitgeführten Astrographen photographieren auf jeder Platte die von einer Rakete ausgesandten Lichtblitze und die umliegenden Sterne (Belichtungszeit 2 bis 3 Min.). Die aus den Sternörter berechenbaren Fixsternkoordinaten der auf die Himmelskugel projizierten Lichtblitze ergeben Strahlenbündel, deren Mittelpunkte die Lichtblitze sind und

deren je einander entsprechende Strahlen durch einen Stationspunkt gehen. Alle Winkel zwischen den Strahlen eines Bündels sind aus den Sternörterern berechenbar.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Stationspunkte ist die gegenseitige Orientierung aller Strahlenbündel durchzuführen d. h. die Strahlenbündel sind in eine solche Lage zu bringen, daß sich je einander entsprechende Strahlen in einem Punkt schneiden. In der oben genannten Arbeit wurde gezeigt, daß bei 2 Raketenanstiegen mindestens in 5 und bei 3 Raketenanstiegen mindestens in 4 Stationen die Beobachtung erfolgen muß, damit die Stationen gegenseitig festgelegt werden können.

Dieses Ergebnis wurde aus der Analogie unseres astrometrischen Problems mit der Luftbildmessung entwickelt. Geht man in diesem Sinne noch weiter und beachtet man, daß die berechneten Fixsternkoordinaten der Projektionen eines Lichtblitzes auch den Himmelspol, in bezug auf diese Projektionen, festlegen, so ist hervorzuheben, daß mit jedem Strahlenbündel eine feste Richtung, die Richtung der Erdachse, verbunden ist. Dadurch wird die ungünstige Fehlerfortpflanzung, die der Aneinanderreihung von Strahlenbündeln anhaftet, entscheidend verbessert. Man kann nun entweder die Strahlenbündel nach bekannten analytischen Verfahren der Luftbildmessung gegenseitig orientieren und die Resultate mit der Bedingung, daß die Erdachsenrichtung unverändert bleibt, verbessern oder man kann diese Bedingung zur Formulierung anderer geometrischer Aufgaben von vornherein heranziehen. Unter d) beschreiten wir letzteren Weg.

Die Erdachse ändert zwar ihre Lage zum Erdkörper um wenige $0,1''$ pro Jahr. Diese Änderungen werden jedoch laufend vom Internationalen Breitendienst bestimmt und können daher berücksichtigt werden, falls man ihnen für die Zeit der Messungen Realität zuschreiben kann.

b) Genauigkeit astrophotographischer Messungen

Über dieses Thema gibt es eine reichhaltige Literatur, z. B. AGK₂ (= 2. Katalog d. Astron. Gesellschaft) 1. Bd. 1951, Hamburger Sternwarte und AGK₂ 11. Bd. 1957 Bonner Sternwarte. In diesen Bänden sind Eigenschaften und Verwendung von Astrographen (C. Zeiss Vierlinser $f = 2060$ mm) zur Bestimmung von Sternörterern behandelt. Es sind auch die in den Werkstätten der ersteren Sternwarte hergestellten Plattenmesser beschrieben. Nach anderen Prinzipien konstruierte Plattenmesser (Einbild-Komparatoren) findet man z. B. in Druckschriften beschrieben: Zeiss, Oberkochen; Zeiss Aerotopograph, München; Jenaer Optik, Jena; Askaniawerke, Berlin-Friedenau.

In der Hamburger und Bonner Sternwarte ergab sich ein mittlerer Fehler der Einstellung eines Sternes von $\pm 0,14''$. Für die Aufnahmen werden Spiegelgläser verwendet, die mit Interferenzbeobachtungen auf ihre Planität geprüft werden. Nur solche Platten, die Abweichungen $< 0,01$ mm aufweisen, werden verwendet. Der Aufguß ist eine hochempfindliche nichtorthochromatische Emulsion. Die Schichtverzerrung ist eine unter der Meßgenauigkeit liegende Größe $< 0,5 \mu$ [1] [5] [6]. In der photogrammetrischen Literatur werden für die Schichtverzerrung erheblich größere Werte angegeben. Dieser Widerspruch ist nur scheinbar; denn im vorliegenden Fall kann besonderer Entwicklungs- und Trockenvorgang sowie

Vermeidung der Randzonen und Verwendung von Platten, deren Emulsionsschicht überall gleiche Stärke aufweist, vorausgesetzt werden.

Neben den Eigenschaften der photographischen Schicht, dokumentarische Bilder zu liefern, kann sie über längere Zeiträume die Lichteindrücke aufsummieren und damit über sehr kurzzeitig veränderliche Refraktionseinflüsse mitteln. Die damit verbundene hohe Genauigkeit der Winkelmessung mit den Astrographen führt zu einer immer mehr steigenden Verwendung der Astrographen zur Bestimmung der Sternörter. Auch bei dem behandelten Verfahren können nachträglich die Fixsternkoordinaten der auf den Platten abgebildeten Sterne durch Differenzmessungen ermittelt werden, und zwar mit einer Genauigkeit, die etwa so groß ist wie die der Fundamentalsterne.

c) Einfluß besonders kurzzeitiger Änderungen der Refraktion (Richtungsszintillation)

Die Lichtblitze sind nur von kurzzeitiger Dauer, so daß infolge der Richtungsszintillation verhältnismäßig sehr große Fehler in den Fixsternkoordinaten der projizierten Lichtblitze entstehen können. *Nur infolge der Richtungsszintillation kann bei dem behandelten Verfahren die hohe Winkelmeßgenauigkeit der Astrographen nicht ausgenützt werden.* Für dieses Verfahren ist es daher von größter Wichtigkeit, die Wirkung der Richtungsszintillation möglichst herabzudrücken.

Schon *Aristoteles* und *Ptolemäus* beobachteten die Szintillation der Fixsterne. Die Namen *Kepler*, *Descartes*, *Huygens*, *Hooke*, *Newton*, *Marian*, *Arrago*, *Montigny*, *Jamin*, *Oppolzer*, *Exner* u. a. sind mit der Erklärung und dem Studium der Szintillationserscheinungen verknüpft [3] [9] [10] [11]. Eine anschauliche Erklärung gab zuerst *Hooke* (Zeitgenosse Newtons und bedeutender Vorläufer der Newton'schen Gravitationsmechanik). Als Ursache der Szintillation beschreibt er die Brechung des Lichtes, die an begrenzten kleinräumigen Teilen der Atmosphäre (Schlieren) auftritt. Sie haben gegenüber ihrer Umgebung andere Temperaturen und daher andere Brechungsexponenten und verändern dauernd ihre Lage. Somit ist die Größe der Szintillation etwa proportional der Länge des Lichtweges, also bloß etwa mit $\sec z$ zunehmend. Nach diesen Vorstellungen können die Szintillationserscheinungen wenigstens im großen Umriß erklärt werden. Genaueres liefert in neuerer Zeit die Anwendung der Beugungstheorie.

Früher nahm man die Szintillation als ein notwendiges Übel in Kauf, das man bei visuellen Beobachtungen mehr oder weniger gut ausschalten konnte. Die immer höher werdenden Genauigkeitsansprüche und die Automatisierung der astronomischen Instrumente verlangen ein genaueres Studium der Szintillationserscheinungen, die in Deutschland insbesondere an der Universität Tübingen betrieben werden [2] [8] [12] [14].

Die für das Folgende wichtigen Ergebnisse sind: mit abnehmender Zenitdistanz z und zunehmender Frequenz ν der Szintillationserscheinung nehmen die Amplituden der Richtungsszintillation ab. Die Amplituden jener Szintillationen, deren $\nu = 2,5$ bis 10 Hz (größere ν kommen kaum vor) ist, sind verhältnismäßig klein (etwa $0,2''$ bis $0,1''$). Dies gilt für alle z . Die Amplitude steigt bei $\nu < 2$ Hz steil an und erreicht im Mittel etwa $0,8''$ für $z = 0$ und etwa $2''$ für $z = 70^\circ$. Es

gibt auch Schwankungsperioden bis zu etwa einer Zeitminute. Beobachtete Amplitude 0,5'' [13].

Eine Verminderung des Einflusses der Richtungsszintillation kann auf verschiedene Weise erreicht werden: Durchführung der Messungen möglichst bei guter „Lufruhe“. Verwendung großer Objektivdurchmesser (Newton-Phänomen) [3b] [9a] [11] [12] und besonders Verwendung von Doppelastrographen. Wenn ein Stationspunkt gewählt werden kann, ist das „Mikroklima“ zu beachten [9a] S. 789 [11] S. 202. Sehr wirksam ist die Aussendung vieler Lichtblitze, die vor und nach Erreichung des höchsten Punktes der Raketenbahn erfolgen. Die Einrichtung zur automatischen Auslösung der Lichtblitze könnte z. B. so gebaut werden, daß 20 Vor- und 20 Nachblitze in Zeitabständen von etwa 0,5 sek erfolgen und daß ungefähr im höchsten Punkt der Bahn die Auslösung des Hauptblitzes, bestehend aus 5 Einzelblitzen in einer sek, erfolgt. Der Beginn der Vorblitze könnte entweder durch eine tempierte Vorrichtung, die nach Brennschluß der Rakete automatisch eingeschaltet wird, oder durch Geschwindigkeitsmessung der Rakete mit Hilfe des Dopplereffektes erfolgen. Damit die Vor- und Nachblitze im Photogramm sicher identifiziert werden können, ist es notwendig, daß die Nachblitze erst in geringerer Höhe automatisch ausgelöst werden, als die Vorblitze begonnen haben. Doppelt so viele Vorblitze und keine Nachblitze auszuführen, ist ungünstig, weil dadurch längere Refraktionsperioden schlechter erfaßt werden.

Von den mehr oder weniger zusammenfallenden Bildpunkten des Hauptblitzes wird der „photometrische Schwerpunkt“ genommen. Der Hauptblitz integriert über alle Schwingungen $\nu > 1$ Hz. Um die Vor- und Nachblitze zur Integration langfristiger Perioden und der räumlichen Verteilung der Richtungsszintillation heranzuziehen, gehen wir von den geometrischen Eigenschaften des oberen Teiles der Raketenbahn aus.

Für diesen Teil der Raketenbahn machen wir die vereinfachenden Annahmen: Fallbeschleunigung ist konstant, Lotrichtungen sind untereinander parallel, Luftwiderstand ist Null. Wir fragen: Welche Kurve erzeugt ein vertikal nach oben abgeschossener, leuchtender Massenpunkt auf der Platte eines der täglichen Bewegung mitgeführten Astrographen? Der Massenpunkt bekommt auch die im Abschlußpunkt herrschende Geschwindigkeit infolge Erdrotation mit und bleibt daher mit zunehmender Höhe zurück gegenüber der durch den Abschlußpunkt gehenden Vertikalen. Aus diesem Grund ist die auf dem Photogramm abgebildete Kurve keine Parabel zweiter Ordnung, sondern wie sich zeigen läßt, hat sie eine Gleichung von folgender Form:

$$y^3 + c_1y^2 + c_2x^2 + c_3xy + c_4y + c_5x = 0 \quad \dots \dots (1)$$

Das Koordinatensystem x, y geht durch einen Kurvenpunkt. Von der Kurve sind jedoch nur benachbarte Punkte bekannt, deren Koordinaten man z. B. in bezug auf ein durch den ersten Vorblitz gehendes Koordinatensystem $\bar{x}, \bar{y} = y$ messen kann. Setzt man $x = \bar{x} - \Delta$, $y = \bar{y}$ in die Gl. (1) ein und vernachlässigt man Δ^2 , so tritt in Gl. (1) noch eine Konstante dazu. Diese 6 Konstanten können aus 41 linearen Gln. durch Ausgleichung berechnet werden. Da die zeitlichen Abstände der Lichtblitze mit großer Genauigkeit automatisch eingehalten werden, können

die Verhältnisse der zurückgelegten Wege der Rakete angegeben werden. Sie dienen zur Ausgleichung der Lagen der Lichtblitze in Richtung der gefundenen Kurve. Für einen Raketenanstieg wären sodann 41 plausibelste Lagen der Lichtblitze bestimmbar.

Wenn es notwendig erscheint, könnte die Zahl der Lichtblitze bedeutend erhöht werden, und zwar besonders im abfallenden Ast der Kurve. Die Raketen können ohne weiteres die für die Blitze erforderliche Energie mitführen. Unserem Beispiel entsprechend ist die gesamte Höhenänderung der Rakete während 30 sek etwa 1,5 km. (Fallzeit 20 sek, $g \doteq 7,7$ m/sek² in 1000 km Höhe.) Ein Satellit, der einen mittleren Erdbestand von 1000 km hat, legt hingegen 7,4 km in einer sek zurück. Daher Beobachtung mit Spezialkameras, deren beste Ausführung die Backer-Nunn-Kamera und BC-4 Wild-Kamera ist. Die damit erreichte Genauigkeit wird aber schon von einem kleinen Astrographen übertroffen.

Oben wurde vorausgesetzt, daß die Steighöhe einer Rakete vor ihrem Start soweit bekannt ist oder im Aufstieg reguliert werden kann, daß die Einstellung der Astrographen vorher genügend genau erfolgen kann. Sollte dies zu kostspielige Einrichtungen erfordern, so könnte man in einer vorgegebenen Höhe die Lichtblitze zur Wirkung bringen. Damit müßte man jedoch auf den besonders günstigen oberen Teil der Raketenbahn verzichten.

d) Analytische Behandlung

Wenn in der Folge von zwei oder mehreren Lichtblitzen die Rede ist, so sind, wenn nichts dazu bemerkt wird, Lichtblitze gemeint, die je von verschiedenen Raketenanstiegen stammen. Zur Vereinfachung der Beschreibung nehmen wir an, die Stellartriangulation erfolge nur auf einer, und zwar auf der nördlichen Halbkugel. Wie in der Einleitung erwähnt, wird mit der Berechnung jedes Zielstrahlenbündels noch ein weiterer Strahl, die Richtung der Erdachse, festgelegt. Dies wird im nachstehenden von vornherein beachtet.

Die Frage, wieviele Stationen mindestens erforderlich sind, damit bei Beobachtung von 2 bzw. 3 Lichtblitzen die gegenseitige Festlegung der Stationen möglich ist, läßt sich, bezugnehmend auf [7] S. 6, leicht beantworten, wenn wir uns eine Station in der Erdachse unendlich fern südlich, also im Südpol des Himmels denken. Von dieser Station aus werden alle Lichtblitze in den Nordpol des Himmels projiziert. Nehmen wir außer dieser gedachten Station drei auf der Erde gelegene an und setzen wir zwei Lichtblitze voraus, so ist $z_1 = 3(6-2) = 12$, $z_2 = 5$. Ferner ist der Winkel zwischen zwei einander entsprechenden Strahlen (Erdachse) bekannt: Null. Inklusive der Basis ist also die Anzahl der voneinander unabhängigen Stücke: $2 \cdot 5 + 1 + 1 = 12$. Die Aufgabe ist daher geometrisch bestimmt (Aufgabe I). Hält man die Anzahl der Stationen bei und setzt man 3 Lichtblitze voraus, so folgt $z_1 = 3(7-2) = 15$, $z_2 = 5$. Ferner sind zwei Winkel zwischen drei einander entsprechenden Strahlen (Erdachse) bekannt: Null. Inclusive der Basis ist also die Anzahl der voneinander unabhängigen Stücke: $3 \cdot 5 + 2 + 1 = 18$. Die Aufgabe (Aufgabe II) ist daher dreifach überbestimmt. Könnte man einen Lichtblitz von einer der drei Stationen nicht beobachten, so fallen zwei Winkel weg und wir hätten eine einfach überbestimmte Aufgabe, auf die wir hier nicht eingehen.

Aufgabe I. Zwei Strahlenbündel mit je 4 Strahlen sind in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, daß sich einander entsprechende Strahlen schneiden, und zwar so, daß der Schnittpunkt eines bestimmten Strahlenpaares (Erdachse) im Unendlichen liegt. Wir bringen die Mittelpunkte beider Bündel sowie das genannte Strahlenpaar zur Deckung und legen um den gemeinsamen Mittelpunkt eine Kugel, die unendlich große Himmelskugel. (Wir verwenden diesen in der Astronomie eingeführten Begriff, können aber ebensogut an die *Gauß'sche Richtungskugel* denken.) Ihre Schnittpunkte mit den beiden Strahlenbündeln bezeichnen wir mit $P 1 2 3$ bzw. $P 1' 2' 3'$. P ist der Nordpol des Himmels und $1 2 3$ bzw. $1' 2' 3'$ sind die zentralen Projektionen der Lichtblitze $L L'$ auf die Himmelskugel. Die zwei sphärischen Vierecke $P 1 2 3$, $P 1' 2' 3'$ sind bekannt, denn nach [7] werden die Deklinationen δ und Rektaszensionsdifferenzen der Punkte $1 2 3$, $1' 2' 3'$ bestimmt. Das erste Viereck denken wir uns auf der Himmelskugel fest und das zweite drehen wir um P solange, bis sich die durch je zwei entsprechende Punkte $1 1'$, $2 2'$, $3 3'$ gehenden Großkreise in einem Punkt K (somit auch im Gegenpunkt G) schneiden. Bezugnehmend auf die analogen Beziehungen zur Photogrammetrie nennen wir die Gerade durch $K G$ Kernachse und die durch sie gehenden Ebenen Kernebenen. Verschieben wir das zweite Strahlenbündel parallel und überdies so, daß ihr Mittelpunkt auf der Kernachse wandert, so bleiben die Strahlen in ihren Kernebenen und zwei einander zugeordnete Strahlen schneiden sich daher immer. Die Änderung der Entfernung der Strahlenbündel bewirkt sodann nur eine Ähnlichkeitstransformation. Unsere Aufgabe besteht somit in der Berechnung der Lage der Kernachse.

Die Lösung der Aufgabe wird durch Anwendung der gnomonischen Projektion vereinfacht: Durch P legen wir normal zur Erdachse eine Ebene, auf die wir die zwei sphärischen Vierecke und die Großkreise zentral projizieren. Die gnomonischen Projektionen der Eckpunkte der Vierecke sind in Polarkoordinaten durch die Rektaszensionsdifferenzen und $\cot \delta$ bestimmt. Damit haben wir die Aufgabe in eine analoge Aufgabe der Ebene verwandelt. Zu dieser Aufgabe kam *S. Finsterwalder* bei der Orientierung terrestrischer Aufnahmen [4a]. Die Lotrichtung in seiner Arbeit entspricht in vorliegender Arbeit der Richtung der Erdachse. Er kommt auf eine Gl. die in ψ (gesuchter Drehwinkel der zweiten Figur gegenüber der ersten) vom 6. Grad ist und in [4b] erwähnt er, daß diese auf eine Gl. 4. Grades reduziert werden kann. Würden 2 Lichtblitze von mehr als 3 Stationen beobachtet werden, so könnte man mehrere Gln. 6. bzw. 4. Grades aufstellen und *paarweise linear* machen (*K. Killian*, Über das Rückwärtseinschneiden im Raum, *ÖZfV* [1955] Nr. 6, S. 103). Das Ergebnis kann als nicht strenge Ausgleichung gewertet werden.

Aufgabe II. Drei Strahlenbündel mit je 4 Strahlen sind in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, daß sich einander entsprechende Strahlen schneiden, und zwar so, daß der Schnittpunkt von 3 bestimmten einander entsprechenden Strahlen (Erdachse) im Unendlichen liegt. Man erkennt unmittelbar, daß diese Aufgabe durch zweimalige Anwendung der Aufgabe I gelöst werden könnte. Für die beiden Vierecke $P 1' 2' 3'$ und $P 1'' 2'' 3''$ wäre je ein Drehwinkel in bezug auf das feste Viereck $P 1 2 3$ zu berechnen. Die direkte Lösung dieser überbestimmten Aufgabe ist jedoch einfacher.

Wir bringen wieder die Mittelpunkte der Strahlenbündel und die 3 bestimmten entsprechenden Strahlen zur Deckung. Zu den Punkten 1 2 3, 1' 2' 3', 1'' 2'' 3'' gehen die Einheitsvektoren $e_1 e_2 e_3, e_1' e_2' e_3', e_1'' e_2'' e_3''$. Die Koordinaten von $e_1 e_2 e_3$ sind nach Abb. 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \delta_1 \sin t_1, & x_2 &= \cos \delta_2 \sin t_2, & x_3 &= \cos \delta_3 \sin t_3 \\ y_1 &= \cos \delta_1 \cos t_1, & y_2 &= \cos \delta_2 \cos t_2, & y_3 &= \cos \delta_3 \cos t_3 \\ z_1 &= \sin \delta_1, & z_2 &= \sin \delta_2, & z_3 &= \sin \delta_3 \end{aligned}$$

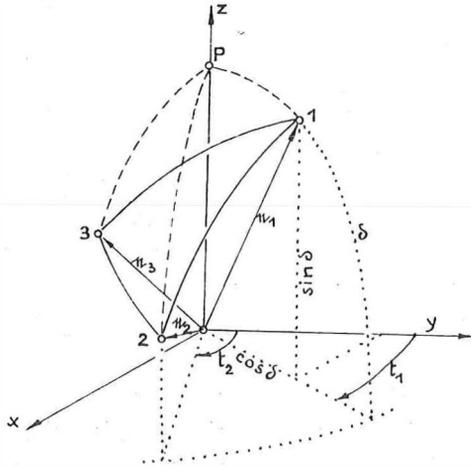


Abb. 1

Der Stundenwinkel t_1 ist beliebig aber konstant. Dazu addieren wir die Rektaszensions-Differenzen der Punkte 2 und 3 und erhalten t_2 und t_3 . Wir nehmen an, daß wir durch genügend genaue Zeitdifferenzmessung Näherungswerte für die Stundenwinkel-Differenzen der Punkte 1' und 1'' in bezug auf 1 haben. Bezeichnen wir diese Näherungswerte vermehrt um t_1 mit \bar{t}_1' und \bar{t}_1'' , so sind ihre richtigen Werte $\bar{t}_1' + dt'$ und $\bar{t}_1'' + dt''$. Die Koordinaten der anderen 6 Vektoren sind somit: $x_1' = \cos \delta_1' \sin (\bar{t}_1' + dt')$, $x_2' = \cos \delta_2' \sin (\bar{t}_2' + dt')$, $x_3' = \cos \delta_3' \sin (\bar{t}_3' + dt')$ usw.

Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine Ebene und entsprechende Strahlen verschiedener Bündel bestimmen entsprechende Ebenen. Wäre die Aufgabe gelöst, so würden sich je drei entsprechende Strahlen in einem Stationspunkt ($P_1 P_2 P_3$) schneiden und damit würden sich auch je drei einander entsprechende Ebenen in einer Geraden schneiden. Die Normalvektoren zu je drei einander entsprechenden Ebenen würden sodann in einer der Schnittgeraden dieser Ebenen normalen Ebene liegen. Z. B. stehen die Normalvektoren der Ebenen durch 1 2, 1' 2', 1'' 2'', wir nennen sie $n_{12} n_{12}' n_{12}''$, normal zur Schnittgeraden durch $P_1 P_2$. Die Komplanationsbedingung dieser Vektoren lautet:

$$n_{12} \cdot n_{12}' \times n_{12}'' = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$n_{12} = e_1 \times e_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k$$

Da $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ konstant sind, setzen wir

$$n_{12} = a i + b j + c k \quad \dots\dots (3)$$

$$n_{12}' = e_1' \times e_2' = (y_1' z_2' - z_1' y_2') i + (z_1' x_2' - x_1' z_2') j + (x_1' y_2' - y_1' x_2') k$$

Setzen wir in dieser Gl. für

$$\sin(\bar{t}_1' + dt') = \sin \bar{t}_1' + \cos \bar{t}_1' dt' \quad \text{und für} \quad \cos(\bar{t}_1' + dt') = \cos \bar{t}_1' - \sin \bar{t}_1' dt'$$

und nennen wir die konstanten Glieder a' b' c' d' , so folgt:

$$n_{12}' = (a' + b' dt') i + (c' + d' dt') j + (e' + f' dt') k \quad \dots\dots (4)$$

Analog ist

$$n_{12}'' = (a'' + b'' dt'') i + (c'' + d'' dt'') j + (e'' + f'' dt'') k \quad \dots\dots (5)$$

Gl. 2 als Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ (a' + b' dt') & (c' + d' dt') & (e' + f' dt') \\ (a'' + b'' dt'') & (c'' + d'' dt'') & (e'' + f'' dt'') \end{vmatrix} = 0$$

Entwickelt man diese Determinante, so ergibt sich eine lineare Gl. für die Unbekannten dt' und dt'' . Für diese Unbekannten findet man ebenso eine zweite lineare Gl. wenn man die Punkte 1 3, 1' 3', 1'' 3'' oder 2 3, 2' 3', 2'' 3'' heranzieht. Wir kennen somit auch die Einheitsvektoren $e_1' e_2' e_3'$, $e_1'' e_2'' e_3''$ und können damit die Kernachsen berechnen. Die durch 1 1', 2 2', 3 3' gehenden Ebenen bestimmen eine Kernachse, deren Einheitsvektor k_1 die unbekanntes Koordinaten $u v w$ hat. Die Bedingung, daß k_1 der Ebene durch 1 1' angehört, ist

$$k_1 \cdot e_1' \times e_1' = 0 = \begin{vmatrix} u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1' & y_1' & z_1' \end{vmatrix} = a_1 u + b_1 v + c_1 w$$

Die aus den bekannten Werten $x_1 y_1 z_1, x_1' y_1' z_1'$ gebildeten Größen sind in dieser Gl. mit $a_1 b_1 c_1$ bezeichnet. Auf dieselbe Weise können wir für die durch 2 2', 3 3' gehenden Ebenen je eine lineare Gl. aufstellen. Aus den drei linearen Gln. berechnen wir $u v w$ und kontrollieren diese mit $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

Der Einheitsvektor s_{12} der oberwähnten Schnittgeraden kann auf dreifache Weise berechnet werden:

$$s_{12} = n_{12} \times n_{12}' = n_{12} \times n_{12}'' = n_{12}' \times n_{12}''$$

Die Koordinaten von n_{12} sind nach Gl. 3 bekannt. Die Koordinaten von n_{12}' und n_{12}'' können nach Gl. 4 bzw. 5, bestimmt werden, indem man in diese Gln. die berechneten Werte dt' bzw. dt'' einsetzt.

Abb. 2 ist die gnomonische Projektion eines Kugelbildes. Sie zeigt die mit der Aufgabe II verbundenen geometrischen Beziehungen. Punkt-Bezeichnungen mit bzw. ohne Querstrich bedeuten gnomonisch projizierte Punkte bzw. Punkte auf der Kugel. Gerade bzw. Großkreise durch entsprechende Eckpunkte der Dreiecke schneiden sich in den gnomonischen Kernpunkten $\bar{K}_1 \bar{K}_2 \bar{K}_3$ bzw. in den Kugelnkernpunkten $K_1 K_2 K_3$. Sie liegen auf einer Geraden bzw. auf einem Großkreis, denn die 3 Kernachsen lagen ursprünglich in einer Ebene, der Ebene durch die Lichtblitze $L L' L''$. Entsprechende Dreieckseiten der gnomonischen Dreiecke bzw. Kugeldreiecke schneiden sich in den Punkten $\bar{S}_{12} \bar{S}_{13} \bar{S}_{23}$ bzw. $S_{12} S_{13} S_{23}$. Es sind dies die Schnittpunkte der Schnittgeraden von je 3 einander entsprechenden

Ebenen. Diese Punkte liegen ebenfalls auf einer Geraden bzw. auf einem Großkreis; denn die 3 Schnittgeraden lagen ursprünglich in einer Ebene, der Ebene durch die Stationspunkte $P_1 P_2 P_3$. Obwohl letztere Aussage eine Folge der vorhergehenden ist (dies kann leicht nach dem Satz von *Desargues* gezeigt werden), erkennt man die große Zahl der Bedingungen bzw. Kontrollen, die sich bei der Lösung der Aufgabe ergeben. Diese Zahl erhöht sich sehr rasch, wenn man mehr als 3 Lichtblitze oder 3 Stationen annimmt.

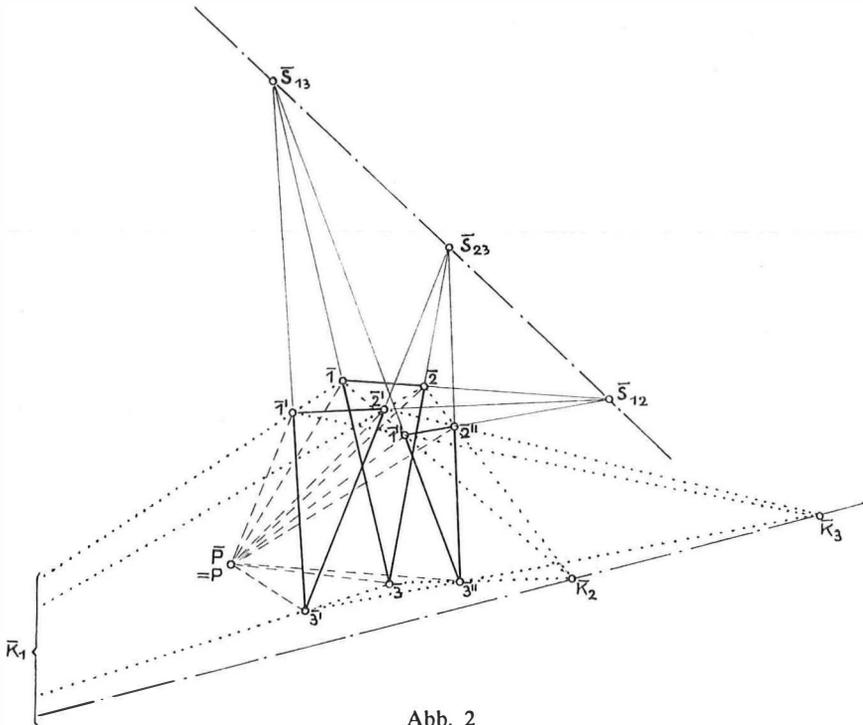


Abb. 2

Wenn man alle diese Bedingungen zur Ausgleichung ausgedehnter Stellartriangulierungen heranziehen will, so ergeben sich erhebliche Rechenarbeiten, die von Elektronenrechnern geleistet werden können, ohne daß Zerlegungen in Teilnetzen erfolgen müßten. Sollte das Verfahren zur Durchführung kommen, so wären noch bedeutende Leistungen zur Aufstellung allgemein gültiger Gln. und Programmierungen für die Ausgleichung zu erbringen. Die nach Aufgabe I und II bestimmten Größen könnten dann nur als gute Näherungswerte dienen.

Wir nehmen jetzt an, es wäre eine Stellartriangulation mit beliebig vielen Stationen und Lichtblitzen ausgeführt worden und es möge der allgemeine Fall vorliegen, daß von verschiedenen Stationen nur bestimmte Lichtblitze beobachtet werden konnten. Wir machen ferner die Annahme, es wäre gelungen, unter Berücksichtigung aller oben erwähnten Bedingungen auszugleichen. Es ist hervorzuheben, daß sodann *aus der Gesamtheit der auf der Richtungskugel festgelegten Punkte das gesamte gesuchte Polyedernetz der Stationspunkte inklusive der nicht gebrauchten Lichtblitzörter widerspruchsfrei in einen „wilden Maßstab“ rekonstruiert werden kann.* Von besonderer Bedeutung ist, daß das Polyedernetz der Stationspunkte *allein* aus

den mit S bezeichneten Punkten rekonstruiert werden kann: Durch einen beliebigen Punkt des Raumes, er heiße P_1 , legen wir eine Gerade, die parallel ist zu der durch den Kugelmittelpunkt und den Kugelpunkt S_{12} bestimmten Geraden. Darauf tragen wir eine beliebige Strecke auf und erhalten P_2 . (Richtungssinn dieser Auftragung sei bekannt.) Legen wir durch P_1 bzw. P_2 parallele Gerade zu den durch Kugelmittelpunkt und Kugelpunkt S_{13} bzw. S_{23} bestimmten Geraden, so schneiden sich diese in einem Punkt P_3 ; denn S_{12} , S_{13} und S_{23} liegen in einer Ebene. So können wir weiter fortfahren und das ganze Polyedernetz aufbauen. *S. Finsterwalder* hat für die gnomonische Projektion eine analoge Überlegung angeführt [4]. Die gnomonische Projektion liefert zwar anschauliche einfache Bilder und oft auch einfachere Lösungen von Aufgaben, aber sie eignet sich nicht zur numerischen Berechnung unseres Stellartriangulationssystems. Letzteres gilt auch für die Reziprokalprojektion. Bemerkte sei, daß die analytische Behandlung sinngemäß auch für simultane Satellitenbeobachtungen gilt.

In diesem Abschnitt blieb unbeachtet, daß mit jedem Raketenanstieg viele Lichtblitze erfolgen, von denen ihre plausibelsten Örter unter c) bestimmt wurden. Unserem Beispiel entsprechend entstehen 41 Strahlenbündel bei jedem Raketenanstieg. Die elektronische Berechnung der ganzen Triangulation kann daher mit *einer sehr großen Zahl von verschiedenen kombinierten Strahlenbündeln durchgeführt und die Ergebnisse wieder ausgeglichen werden.*

Die kosmisch bedingten Einflüsse: Refraktion (nicht rasch veränderliche), Aberration und Dispersion können so genau berücksichtigt bzw. unwirksam gemacht werden, daß sie der inneren Meßgenauigkeit großer Astrographen entsprechen. *Die Richtungsszintillation gibt hingegen die Genauigkeitsgrenze des Verfahrens,* die aber durch entsprechende Vermehrung der Lichtblitze und möglichst zeitlicher und räumlicher Ausdehnung des Lichtblitzvorganges vermutlich zum Verschwinden gebracht werden kann. Das nicht gleichzeitige Aufleuchten der Blitze in den verschiedenen Stationen infolge endlicher Geschwindigkeit des Lichtes könnte berücksichtigt werden. Die aus der Relativitätstheorie berechenbaren Korrekturen sind vernachlässigbar klein.

Eine Erweiterung des Verfahrens ergibt sich, wenn man voraussetzt, daß von einer oder mehreren Stationen Lichtblitze, aber keine Sterne photographiert werden können. Werden in diesen Stationen nach mindestens drei Lichtblitzen, die von verschiedenen Raketen stammen, die Horizontal- und Vertikalwinkel gemessen (Kamera bzw. Astrograph macht tägliche Bewegung der Sterne nicht mit, Horizontal- und Vertikalwinkel werden auf Kreisen abgelesen), so können die Lagen der Stationen in bezug auf das Polyedernetz bestimmt werden: Aus den gemessenen Winkeln werden die räumlichen Winkel gerechnet und damit sind die Lagen der gesuchten Stationen durch räumliches Rückwärtseinschneiden berechenbar. Dabei spielen die Lichtblitze die gleiche Rolle wie die Festpunkte in der Photogrammetrie. Das Resultat ist unabhängig von der Lotrichtung. Die Wirkung der Refraktion ist jedoch in diesem Fall nicht differentiell. Nur bei kleinen Zenitdistanzen wird daher dieses Verfahren genügende Genauigkeit aufweisen (mittl. Fehler der Refraktion bei $z = 45^\circ$ bzw. 60° etwa $\pm 0,4''$ bzw. $\pm 0,5''$) die Wirkung der Richtungsszintillation kann auf die beschriebene Weise weitgehend herabgedrückt werden.

Eine Erprobung des Verfahrens, bei dem sich etwa alle in Europa befindlichen Sternwarten, die Astrographen besitzen, beteiligen könnten, würde wertvolle Erfahrungen und Erkenntnisse liefern. Die Lichtblitz-Einrichtungen könnten an geo- und astrophysikalischen Forschungsraketen angebracht werden.

Literatur:

- [1] *Eckert und Jones: Astronom. Journal* 59 (1954) S. 83.
- [2] *Elsässer, H.:* Die Szintillation der Sterne, Die Naturwissenschaften, 47 (1960) Heft 1, S. 6.
- [3] *Exner, K.:* a) Zur Beziehung zwischen den atmosphärischen Strömungen und der Scintillation, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Wien, 1900, Bd. CIX. b) Zur Genesis der richtigen Erklärung der Scintillationserscheinungen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Wien, 1901, Bd. CX.
- [4] *Finsterwalder, S.:* a) Eine neue Art, die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. München 1904, S. 103. b) Die Kernpunkte, die gnomonische Projektion und die Reziprokalprojektion in der Photogrammetrie. Intern. Archiv f. Photogramm. Bd. VI, 1923, S. 22.
- [5] *Handbuch der wissenschaftlichen Photographie*, Bd. VI. 1931, S. 124.
- [6] *Joos und Schopper:* Grundriß der Photographie und ihre Anwendungen besonders in der Atomphysik. 1958, S. 321, Frankfurt a. Main.
- [7] *Killian, K.:* Über Verfahren der Stellartriangulation. ÖZfV 51 (1963) Nr. 1, S. 3.
- [8] *Mayer, U.:* Beobachtungen der Richtungsszintillation. Zeitschr. f. Astrophysik 49 (1960) S. 161.
- [9] *Meyer, R.:* a) Atmosphärische Strahlenbrechung, Handb. d. Geophysik Bd. VIII, Kap. 13, S. 769, Berlin 1955. b) Probleme der atmosphärischen Schlieren. Bericht d. Meteorol.-Geophys. Inst. zu Frankfurt a. M. Nr. 6 Frankfurt a. M., 1957.
- [10] *Oppolzer, E.:* Zur Theorie der Scintillation der Fixsterne. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch., Wien 1901, Bd. CX.
- [11] *Pernter, J. M. und Exner, F. M.:* Meteorologische Optik II. Aufl. Wien-Leipzig, 1922.
- [12] *Scheffler, H.:* Der Einfluß der Szintillation auf astronomische Beobachtungen. Sterne und Weltraum, 2 (1963) Nr. 5, S. 108.
- [13] *Schlesinger, F.:* Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 87, 506, 1927.
- [14] *Siedentopf, H. und Elsässer, H.:* Z. Astrophysik 35, 21, 1954.

Gemeinsame Ausgleichung von Richtungs- und Streckenmessungen

Von *Josef Zeger*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

A) Vorbemerkungen

Infolge der Anwendung moderner physikalischer Streckenmeßmethoden treten in steigendem Ausmaß bei der Punkt- oder Netzeinschaltung Streckenmessungen in Verbindung mit Richtungsmessungen auf.

Eine Kombination von Richtungs- und Streckenmessungen wird unter gewissen, geländemäßig bedingten Voraussetzungen nicht nur ein besonders rationelles Arbeiten auf dem Felde gestatten, sondern darüber hinaus in manchen Fällen eine Punktebestimmung überhaupt erst ermöglichen. Bei alleiniger Verwendung eines Theodoliten wäre eine Lösung vielfach nur mit einem wesentlich erhöhten Aufwand an Signalisierungs- und Beobachtungsarbeit zu erzielen. In Fällen einer ungünstigen