



Kriterium zur Bestimmung eines fehlerhaften Ausgangspunktes beim mehrfachen Rückwärtseinschneiden

Walter Smetana ¹

¹ *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII/64, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **51** (2), S. 48–53

1963

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_196305,  
  Title = {Kriterium zur Bestimmung eines fehlerhaften Ausgangspunktes beim  
    mehrfachen R{"u}ckw{"a}rtseinschneiden},  
  Author = {Smetana, Walter},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {48--53},  
  Number = {2},  
  Year = {1963},  
  Volume = {51}  
}
```



Unbekannten an der Zahl der überschüssigen Beobachtungen nichts ändern; hingegen bewirkt die Zahl der Maßstabfaktoren eine Verringerung der überschüssigen Beobachtungen.

Die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist

$$\ddot{u} = B - m,$$

worin bedeutet:

B ... die Zahl der Bedingungsgleichungen

m ... die Zahl der Maßstabfaktoren.

b) Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Jeder beobachtete Neupunkt verursacht drei Unbekannte, nämlich zwei Koordinatenverbesserungen und die Orientierungsunbekannte.

Jeder nicht beobachtete Neupunkt hat nur die zwei Koordinatenverbesserungen.

Jeder beobachtete Altpunkt weist nur eine Orientierungsunbekannte auf.

Zu diesen Unbekannten treten noch die Maßstabfaktoren.

Die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist nach der Formel

$$\ddot{u} = R + s - (3n_1 + 2n_2 + a + m).$$

Es bedeutet:

R ... Zahl aller auf Alt- und Neupunkten gemessenen Richtungen

s ... Zahl aller Polygonseiten

n_1 ... Zahl der beobachteten Neupunkte

n_2 ... Zahl der nicht beobachteten Neupunkte

a ... Zahl der beobachteten Altpunkte

m ... Zahl der Maßstabfaktoren.

Kriterium zur Bestimmung eines fehlerhaften Ausgangspunktes beim mehrfachen Rückwärtseinschneiden

Von *Walter Smetana*, Wien

1. Einleitung

Bei der in der Praxis vorkommenden trigonometrischen Bestimmung von Einschaltpunkten (EP) [1] nach der Methode des mehrfachen Rückwärtseinschneidens wird es mitunter vorkommen, daß die analytische Berechnung der drei Schnitte mit den geringsten mittleren Punktlagefehlern [5] Koordinaten des zu bestimmenden Punktes liefert, die untereinander Streuungen aufweisen, die ein Vielfaches der in [6] entwickelten maximalen Koordinatenstreuungen betragen. Der Grund hierfür liegt darin, daß sich die Koordinaten eines Ausgangspunktes nicht auf den angezielten Punkt beziehen, also keine Identität dieses gegebenen Ausgangspunktes vorliegt.

Während nun *F. Ackerl* in den sehr ausführlichen Abhandlungen [2] [3], sowohl den Einfluß der Fehler der bekannten trigonometrischen Punkte auf das Ergebnis des Rückwärtseinschnittes als auch die Wirkung der Winkelfehler untersucht, die Koeffizienten bestimmt, mit denen der Fehler des Neupunktes zu berechnen ist, wenn die Koordinatenfehler der gegebenen Punkte und die Winkelfehler bekannt

sind, soll in der folgenden Abhandlung ein Kriterium abgeleitet werden, das dem Praktiker auf kürzestem Wege den fehlerhaften Ausgangspunkt zu erkennen gibt. Hierzu werden lediglich die bereits zur Auswahl der drei besten Rückwärtseinschnitt-Kombinationen orientiert gezeichneten Reziprokdreiecke [5] benötigt.

2. Theoretische Grundlagen

Um zunächst die differentiellen Änderungen dx und dy zu erhalten, die der rückwärtseinzuschneidende Neupunkt P erfährt, wenn die Koordinaten der Ausgangspunkte: $A = (X_A, Y_A)$, $M = (X_M, Y_M)$, $B = (X_B, Y_B)$, fallweise die differentiellen Fehler (dx_A, dy_A) bzw. (dx_M, dy_M) bzw. (dx_B, dy_B) aufweisen, werden die bestehenden Relationen

$$\left. \begin{aligned} \nu_{PM} - \nu_{PA} &= \arctg \frac{y_M - y}{x_M - x} - \arctg \frac{y_A - y}{x_A - x} = \alpha \\ \nu_{PB} - \nu_{PM} &= \arctg \frac{y_B - y}{x_B - x} - \arctg \frac{y_M - y}{x_M - x} = \beta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

nach den Koordinaten des Neupunktes sowie fallweise nach den Koordinaten der Ausgangspunkte differenziert.

In den Gleichungen (1) bedeuten ν die Richtungswinkel (x_A, y_A) , (x_M, y_M) , (x_B, y_B) die Koordinaten der Ausgangspunkte, α und β die gemessenen, als fehlerfrei angenommenen Winkel, die für die Ableitung des Kriteriums als konstante Größen gelten.

Fall I: Ausgangspunkt A fehlerhaft (dx_A, dy_A bzw. $\delta x_A, \delta y_A$ als endliche Größen)

Die Differentiation der beiden Gleichungen (1) nach y , x und y_A sowie x_A liefert folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dx \left(\frac{y_M - y}{s_M^2} - \frac{y_A - y}{s_A^2} \right) - dy \left(\frac{x_M - x}{s_M^2} - \frac{x_A - x}{s_A^2} \right) + dx_A \frac{y_A - y}{s_A^2} - dy_A \frac{x_A - x}{s_A^2} &= 0 \\ dx \left(\frac{y_B - y}{s_B^2} - \frac{y_M - y}{s_M^2} \right) - dy \left(\frac{x_B - x}{s_B^2} - \frac{x_M - x}{s_M^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Führt man die für den praktischen Gebrauch notwendige Transformation der Formeln (2) durch, setzt $t = \frac{\rho^{cc}}{s_{em}}$, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} dx (t_2 \sin \nu_2 - t_1 \sin \nu_1) - dy (t_2 \cos \nu_2 - t_1 \cos \nu_1) + \\ + dx_A t_1 \sin \nu_1 - dy_A t_1 \cos \nu_1 &= 0 \\ dx (t_3 \sin \nu_3 - t_2 \sin \nu_2) - dy (t_3 \cos \nu_3 - t_2 \cos \nu_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Die Indizes 1, 2, 3 beziehen sich bereits auf die Eckpunkte des betreffenden Reziprokdreieckes, worin 1 auf PA , 2 auf PM und 3 auf PB liegen (Abb. 1).

Beachtet man weiters, daß nach Abb. 1 der Reihe nach

$$\begin{aligned} t_1 \cos \nu_1 &= \xi_1 & t_2 \cos \nu_2 &= \xi_2 & t_3 \cos \nu_3 &= \xi_3 & \eta_2 - \eta_3 &= \Delta \eta_{32} & \eta_2 - \eta_1 &= \Delta \eta_{12} \\ t_1 \sin \nu_1 &= \eta_1 & t_2 \sin \nu_2 &= \eta_2 & t_3 \sin \nu_3 &= \eta_3 & \xi_2 - \xi_3 &= \Delta \xi_{32} & \xi_2 - \xi_1 &= \Delta \xi_{12} \end{aligned}$$

bedeuten, so nimmt die Formelgruppe (2) endlich folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} dx \Delta\eta_{12} - dy \Delta\xi_{12} + dx_A \eta_1 - dy_A \xi_1 &= 0 \\ dx \Delta\eta_{32} - dy \Delta\xi_{32} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

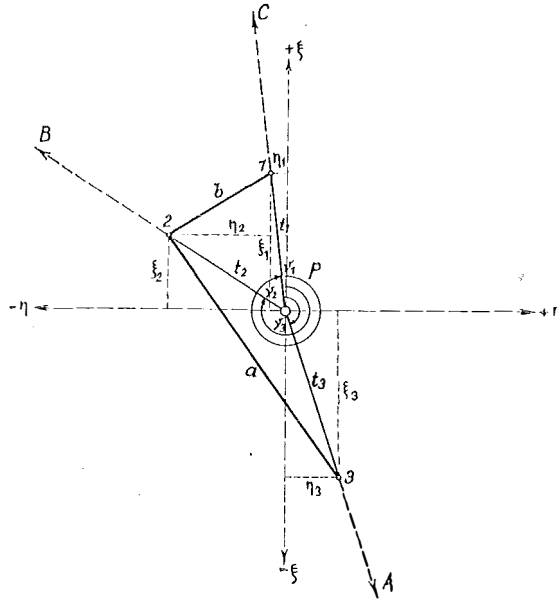


Abb. 1

Werden nun aus diesen beiden Gleichungen dx und dy errechnet, weiters die Differentiale dx, dy, dx_A, dy_A durch die kleinen, aber endlichen Fehlergrößen $\delta x, \delta y, \delta x_A$ und δy_A ersetzt, so erhält man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &\approx \frac{\Delta\xi_{32} (\delta y_A \xi_1 - \delta x_A \eta_1)}{\Delta\xi_{32} \Delta\eta_{12} - \Delta\eta_{32} \Delta\xi_{12}} \\ \delta y &\approx \frac{\Delta\eta_{32} (\delta y_A \xi_1 - \delta x_A \eta_1)}{\Delta\xi_{32} \Delta\eta_{12} - \Delta\eta_{32} \Delta\xi_{12}} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Beachtet man, daß der gemeinsame Nenner in (5) die doppelte Fläche des Reziprokendreiecks bedeutet, die in Übereinstimmung mit der Darstellung in [6] die Bezeichnung $2\Delta_t$ erhält, so nimmt (5) folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &\approx \frac{\Delta\xi_{32} (\delta y_A \xi_1 - \delta x_A \eta_1)}{2\Delta_t} \\ \delta y &\approx \frac{\Delta\eta_{32} (\delta y_A \xi_1 - \delta x_A \eta_1)}{2\Delta_t} \end{aligned} \right\} \dots (5a)$$

Bildet man den Quotient dieser beiden Fehlergrößen, so gelangt man zu dem gesuchten, überaus einfachen Kriterium, nämlich:

$$\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{\Delta \eta_{32}}{\Delta \xi_{32}} \quad \dots (6)$$

Diese Relation, die bereits aus der 2. Gleichung (4) hervorgeht, besagt, daß der Richtungswinkel von Neupunkt Soll-Lage nach Neupunkt Ist-Lage ungefähr gleichkommt dem Richtungswinkel jener Dreiecksseite des Reziprokdreieckes, die dem reziproken, fehlerhaften Ausgangspunkt gegenüberliegt.

Die Behandlung der beiden anderen Fälle, nämlich Ausgangspunkt M und Ausgangspunkt B fehlerhaft, wird nun zeigen, daß das Kriterium auch für diese Fälle Gültigkeit hat.

Fall II: Ausgangspunkt M fehlerhaft (dx_M, dy_M bzw. $\delta x_M, \delta y_M$)

Die Differentiation der beiden Gleichungen (1) nach y, x sowie y_M, x_M ergibt letztlich wieder nach Einführung der kleinen, aber endlichen Fehlergrößen $\delta x, \delta y, \delta x_M, \delta y_M$:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &\approx \frac{\Delta \xi_{13} (\delta y_M \xi_2 - \delta x_M \eta_2)}{\Delta \xi_{32} \Delta \eta_{12} - \Delta \eta_{32} \Delta \xi_{12}} \\ \delta y &\approx \frac{\Delta \eta_{13} (\delta y_M \xi_2 - \delta x_M \eta_2)}{\Delta \xi_{32} \Delta \eta_{12} - \Delta \eta_{32} \Delta \xi_{12}} \end{aligned} \right\} \quad \dots (7)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &\approx \frac{\Delta \xi_{13} (\delta y_M \xi_2 - \delta x_M \eta_2)}{2\Delta_t} \\ \delta y &\approx \frac{\Delta \eta_{13} (\delta y_M \xi_2 - \delta x_M \eta_2)}{2\Delta_t} \end{aligned} \right\} \quad \dots (7a)$$

Das Kriterium lautet daher:

$$\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{\Delta \eta_{13}}{\Delta \xi_{13}} \quad \dots (8)$$

Fall III: Ausgangspunkt B fehlerhaft (dx_B, dy_B bzw. $\delta x_B, \delta y_B$)

Die Gestalt der Ergebnisse in den vorangegangenen Fällen läßt bereits, ohne jede Ableitung, das Kriterium auch für diesen Fall erkennen, das da lautet:

$$\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{\Delta \eta_{12}}{\Delta \xi_{12}} \quad \dots (9)$$

3. Beispiel

In Abbildung 2 sind zur Bestimmung eines EP drei Rückwärtseinschnitt-Kombinationen mit dem theoretischen mittleren Punktlagefehler $M \approx 1$ cm dar-

gestellt. Die analytische Berechnung dieser drei ausgewählten Rückwärtseinschnitte hat folgende Koordinaten des *EP* ergeben:

1. Schnitt: vollausgezogen ... $Y = -13\ 884,77\ \text{m}$ $X = 5\ 352\ 995,34\ \text{m}$
2. Schnitt: strichpunktirt... $Y = -13\ 884,79\ \text{m}$ $X = 5\ 352\ 995,38\ \text{m}$
3. Schnitt: strichliert: $Y = -13\ 885,08\ \text{m}$ $X = 5\ 352\ 995,39\ \text{m}$

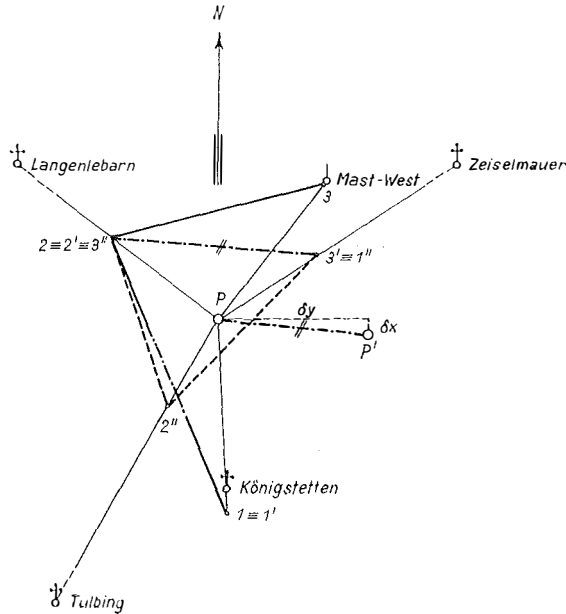


Abb. 2

Da nun alle drei Schnitte als gleichwertig anzusehen und nach [6] maximale Koordinatenstreuungen von höchstens 6 cm zu erwarten sind, ist ersichtlich, daß der dritte Schnitt mit ungefähr 30 cm Streuung im *Y* weit über dieses errechnete Maß hinausgeht. Der Grund hiefür liegt, wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, in den fehlerhaften Koordinaten des Ausgangspunktes \dagger Tulbing bzw. besteht keine Identität dieses gegebenen Ausgangspunktes. Betrachtet man nämlich die drei gezeichneten Reziprokdreiecke 1, 2, 3, 1', 2', 3' und 1'', 2'', 3'' in Abb. 2, wobei $1 \equiv 1'$, $2 \equiv 2' \equiv 3''$ und $3' \equiv 1''$, so erkennt man, daß die Seite $\overline{1'' 3''} \parallel \overline{P P'}$ und diese Seite dem Eckpunkt 2'' gegenüberliegt, daher können sich nach obigem Kriterium die Koordinaten des Ausgangspunktes \dagger Tulbing nicht auf den angezielten Punkt beziehen. Eine vorläufige Neubestimmung des Ausgangspunktes \dagger Tulbing, bei welcher sich die Koordinaten im *Y* um ungefähr 40 cm ändern, ergibt nach abermaliger analytischer Berechnung der dritten Schnittkombination:

$$Y = 13\ 884,79\ \text{m} \quad X = 5\ 352\ 995,38\ \text{m}$$

Die maximalen Koordinatenstreuungen betragen nun 2 cm im *Y* und 4 cm im *X* und stehen wieder im Einklang mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2 in [6].

4. Zusammenfassung

Hat man zur rationellen Bestimmung einer optimalen Punktlage beim mehrfachen Rückwärtseinschnitt eines EP mit Hilfe des bezüglichlichen Punktlagefehler-Diagrammes unter Zugrundelegung der Reziprokdreiecke die drei Schnitte mit den geringsten mittleren Punktlagefehlern ausgewählt, und ergibt die analytische Berechnung der Schnittpunkt-Koordinaten Werte, die untereinander Streuungen aufweisen, die ein Vielfaches der in Abschnitt 2 aus [6] errechneten Streuungen betragen, so wird, unter Annahme bloß eines fehlerhaften Ausgangspunktes, das in dieser Abhandlung entwickelte Kriterium auf kürzestem Wege, nämlich bloß durch Vergleich der Richtungen der orientiert gezeichneten Seiten des Reziprokdreiecks mit der Richtung des linearen Fehlers $\overline{PP'}$ des Neupunktes, den fehlerhaften Ort anzeigen.

Literatur:

- (1) *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen*: Dienstvorschrift Nr. 16 Einschaltpunkt- und Polygonnetz. Wien 1958.
- (2) *Ackerl, Franz*: Sull' influenza di una difettosa posizione dei Punti dati nel risultato della intersezione inversa. Estratto da „Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali“. Nuova Serie — Anno II — N. 3, 1947.
- (3) *Ackerl, Franz*: Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten. Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik 46 (1948), Nr. 2, S. 27—31, Nr. 3, S. 49—52, Nr. 4, S. 81—87.
- (4) *Smetana, Walter*: Punktlagefehler-Felddiagramm für das Rückwärtseinschneiden. ÖZfV 47 (1959), Nr. 1, S. 8—12.
- (5) *Smetana, Walter*: Näherungs-Zentroid als optimale Punktlage bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Vorwärts- und Rückwärtseinschnittes. ÖZfV 49 (1961), Nr. 2, S. 39—43.
- (6) *Smetana, Walter*: Graphisch-mechanische Ermittlung maximaler Koordinatenstreuungen bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Rückwärtseinschnittes. ÖZfV 48 (1960), Nr. 5, S. 160—165.

Referat

80 Jahre Evidenzhaltungsgesetz

Am 16. Jänner 1883 übersandte der Finanzminister dem Justizministerium den vom damaligen Finanzsekretär *Alexius Danzer* ausgearbeiteten Entwurf eines Evidenzhaltungsgesetzes und wies im Begleitschreiben darauf hin, daß das neue Gesetz nicht nur einseitige, steuerliche Zwecke verfolge, sondern daß der Grundsteuerkataster im Hinblick auf das neue Grundbuchslegungsgesetz auch die Aufrechterhaltung der Übereinstimmung mit dem Grundbuche als Ziel ins Auge gefaßt und hiezu entsprechende Bestimmungen vorgesehen habe. Diese wurden also bereits damals mit der Absicht eingebaut, den Grundsteuerkataster nicht allein für Verwaltungszwecke zu verwenden, sondern ihn auch in den Dienst der Rechtspflege zu stellen. Der im Einvernehmen mit dem Justizministerium fertiggestellte und im Ministerrat behandelte Entwurf wurde am 24. Februar 1883, also fünf Wochen nach Übermittlung des ersten Entwurfes, mit einem ausführlichen Motivenbericht dem Kaiser in einem längeren Vortrag mit der Bitte unterbreitet, den Finanzminister zu ermächtigen, diesen Entwurf zur verfassungsmäßigen Verhandlung bringen zu dürfen. Bereits am 28. Februar, also nur vier Tage nach dem Ersuchen, wurde diese Ermächtigung erteilt und am selben Tage noch der Entwurf samt Motivenbericht dem Präsidium des Abgeordnetenhauses des Reichsrates übersandt.

Der Entwurf wurde zunächst dem Steuerausschuß zugewiesen, der nach weiteren zwei Monaten, am 25. April 1883, mit einem ausführlichen Bericht die nur unwesentlich abgeänderte Regierungs-