Paper-ID: VGI_196303

Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung

Leopold Maly [1]

[1] *Wien 1, Salzgries 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **51** (1, 2), S. 15–22, 33–48

1963

BibTEX:

```
@ARTICLE{Maly_VGI_196303,
Title =  {Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung},
Author =  {Maly, Leopold},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {15--22, 33--48},
Number =  {1, 2},
Year =  {1963},
Volume =  {51}
}
```

Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung

Von *Leopold Maly*, Wien

A. Allgemeine Begriffe

Derzeit stehen dem Geodäten zur Lagebestimmung der Punkte vier Methoden zur Verfügung, nämlich

1. die trigonometrische,
2. die polygonometrische,
3. die photogrammetrische und
4. die astronomische

Methode der Punktbestimmung.

Von diesen Methoden ist die polygonometrische Punktbestimmung die einzige Methode, die alle Schwierigkeiten und Hindernisse bei der Lagebestimmung der Punkte, verursacht durch die Geländeform, die Bodenkultur, die Verbauung des Geländes usw., mit den einfachsten Mitteln rasch und sicher überwindet und deren Genauigkeit völlig gleichwertig jener der trigonometrischen Methode ist.

Die polygonometrische Methode der Punktbestimmung verwendet zur Lagebestimmung der Punkte Polygonzüge.

Ein Polygonzug ist ein gebrochener Linienzug, der eine beliebige Zahl aufeinander folgender Punkte der Erdoberfläche verbindet.

Von diesem Linienzug müssen alle Polygonwinkel, auch Brechungswinkel genannt, und alle Polygonseiten gemessen werden, um die gegenseitige Lage der Polygonpunkte durch ein *örtliches* Koordinatensystem in der Horizontalebene eindeutig zu bestimmen.

Sollen jedoch die Polygonpunkte in einem *vorgegebenen* Koordinatensystem eindeutig festgelegt werden, so müssen noch zusätzlich Strecken und Winkel, die Orientierungsgrößen, zwischen den Polygonpunkten, d. s. die Neupunkte, und lagemäßig gegebenen Punkten, d. s. die Altpunkte, gemessen werden.

Ein Brechungswinkel ist der Horizontalwinkel auf einem Polygonpunkt, dessen Schenkel die beiden vom Polygonpunkt ausgehenden Polygonseiten sind. Er wird immer im Uhrzeigersinn gemessen.

Eine Polygonseite ist der Abstand von zwei aufeinander folgenden Polygonpunkten.

Die Orientierungsgrößen sind Winkel und Seiten zwischen gegebenen Punkten und Polygonpunkten.

Auf Grund dieser Festsetzungen unterscheidet man zwei Arten von Polygonzügen, nämlich

freie und orientierte Polygonzüge.

Der freie Polygonzug verbindet n oder $(n\text{-}1)$ Neupunkte, je nachdem der Anfangspunkt ein Neu- oder ein Altpunkt ist.

Zur eindeutigen Bestimmung der gegenseitigen Lage der Punkte des freien Polygonzuges sind $(n\text{-}2)$ Polygonwinkel und $(n\text{-}1)$ Polygonseiten, zusammen also $(2n\text{-}3)$ Bestimmungsstücke notwendig.

Der orientierte Polygonzug legt die Lage der Punkte des freien Polygonzuges in die Horizontalebene in einem vorgegebenen Koordinatensystem eindeutig fest durch Messung von Orientierungsgrößen zu gegebenen Punkten.

Um einen freien Polygonzug zu einem orientierten Zug zu machen, müssen zu den Punkten des freien Zuges

1. noch mindestens zwei, jedoch höchstens drei Altpunkte hinzutreten und zwischen den Alt- und Neupunkten

2. noch drei Bestimmungsstücke zusätzlich gemessen werden.

Die Altpunkte können

Anschluß- oder Orientierungspunkte

sein.

Anschlußpunkte sind Altpunkte, die mit den Polygonpunkten durch Strecken verbunden sind.

Orientierungspunkte sind Altpunkte, die mit dem Polygonzug nur durch Richtungen auf den Neupunkten verbunden sind.

Die drei zusätzlichen Orientierungsgrößen sind Strecken und Winkel. Die Strecken sind die

Anschlußseiten

und die Winkel sind

Anschluß-, Anschlußpolygon- und Orientierungswinkel,

alle immer im Uhrzeigersinn gemessen.

Anschlußseiten sind Strecken von Neupunkten zu Altpunkten.

Anschlußwinkel sind Winkel auf Altpunkten, deren Schenkel die Seite zu einem zweiten Altpunkt und die Anschlußseite sind.

Anschlußpolygonwinkel ist der Polygonwinkel auf dem ersten oder letzten Polygonpunkt, dessen Schenkel die Anschlußseite und die erste oder letzte Polygonseite sind.

Orientierungswinkel, auch Zwischenorientierungen genannt, sind Winkel auf Polygonpunkten, deren Schenkel von einer Polygonseite und der Richtung zum Orientierungspunkt gebildet werden.

Je nach der Art der Orientierungsgrößen unterscheidet man vier Fälle des orientierten Polygonzuges:

1. Fall: die Orientierungsgrößen sind drei Strecken, die zwei oder drei Altpunkte mit zwei oder drei Polygonpunkten verbinden.

2. Fall: die Orientierungsgrößen sind zwei Strecken und ein Winkel. Dieser Fall tritt in drei Varianten auf, je nachdem der Winkel ein Anschlußwinkel, ein Anschlußpolygonwinkel oder ein Orientierungswinkel ist.

3. Fall: die Orientierungsgrößen sind eine Strecke und zwei Winkel. Dieser Fall tritt in vier Varianten auf, je nachdem die beiden Winkel ein Anschluß- und ein Anschlußpolygonwinkel, ein Anschluß- und ein Orientierungswinkel, ein Anschlußpolygon- und ein Orientierungswinkel oder Orientierungswinkel sind.

4. Fall: die Orientierungsgrößen sind drei Winkel, die als Orientierungswinkel auf ein, zwei oder drei Polygonpunkten gemessen sind.

B. Berechnung der Polygonzüge

Die Berechnung der Polygonzüge erfolgt praktisch immer in einem ebenen, rechtwinkeligen Koordinatensystem. Es müssen daher die auf der Erdoberfläche gemessenen Strecken und Winkel auf die Projektionsebene zuerst reduziert und mit den, dem Projektionssystem eigenen, Winkel- und Streckenreduktionen versehen werden. Zur Ermittlung dieser Höhenreduktionen und Projektionsverzerrungen ist die Kenntnis roher Meereshöhen und vorläufiger Koordinaten der Polygonpunkte notwendig. Diese Werte werden aus einer Karte entnommen oder durch vorläufige Rechnung ermittelt.

Das Ergebnis der Polygonzugsberechnung sind die vorläufigen Werte der Orientierungsgrößen und Koordinaten, die zur Ausgleichung der Polygonzüge benötigt werden.

1. Berechnung des freien Polygonzuges

Unter der Berechnung eines freien Polygonzuges versteht man die Ermittlung der ebenen Koordinaten in einem örtlichen Koordinatensystem mit einem Polygonpunkt als Ursprung und einer davon ausgehenden Polygonseite als Abszissenachse. Aus den Koordinaten der Endpunkte des Zuges sind meist noch die Entfernung $s_{1,n}$ vom Anfang- zum Endpunkt des Zuges und die Winkel der ersten und letzten Seite des Zuges mit $s_{1,n}$ zu rechnen.

Gemessen sind die Polygonwinkel $\beta_2 \ldots \beta_{(n-1)}$ und die

Polygonseiten $s_{1,2} \ldots s_{(n-1)n}$.

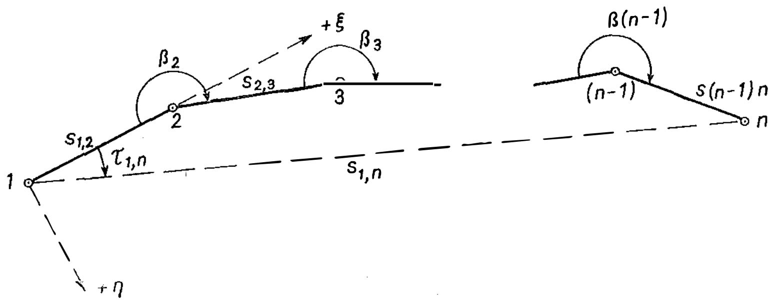

Abb. 1

Gang der Berechnung:

Man legt in den 1. Polygonpunkt den Ursprung eines örtlichen Koordinatensystems mit der positiven Abszissenachse in Richtung der ersten Polygonseite.

In diesem Koordinatensystem sind die Richtungswinkel

$$\tau_{1,2} = \emptyset$$
$$\tau_{2,3} = \beta_2 \pm 180^0$$
$$\tau_{3,4} = \tau_{2,3} + \beta_3 \pm 180^0.$$
$$\vdots$$
$$\tau_{(n-1)n} = \tau_{(n-2)(n-1)} + \beta_{(n-1)} \pm 180^0.$$

Mit diesen Richtungswinkeln werden die örtlichen Koordinatendifferenzen $\Delta\eta$ und $\Delta\xi$ berechnet

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{12} &= s_{12} \,.\, \sin\tau_{12} & \Delta\xi_{12} &= s_{12} \,.\, \cos\tau_{12} \\ \Delta\eta_{23} &= s_{23} \,.\, \sin\tau_{23} & \Delta\xi_{23} &= s_{23} \,.\, \cos\tau_{23} \\ &\vdots & &\vdots \\ \Delta\eta_{(n-1)n} &= s_{(n-1)n} \,.\, \sin\tau_{(n-1)n} & \Delta\xi_{(n-1)n} &= s_{(n-1)n} \,.\, \cos\tau_{(n-1)n} \end{aligned}$$

Aus den Summen

$$\Big[\Delta\eta\Big]_1^n = \Delta\eta_{1,n} \text{ und } \Big[\Delta\xi\Big]_1^n = \Delta\xi_{1,n}$$

werden die Strecke $s_{1,n}$ und die Winkel $\tau_{1,n}$ und β_n nach den Formeln

$$\operatorname{tg}\tau_{1,n} = \frac{\Delta\eta_{1,n}}{\Delta\xi_{1,n}}, \quad s_{1,n} = \frac{\Delta\eta_{1,n}}{\sin\tau_{1,n}} = \frac{\Delta\xi_{1,n}}{\cos\tau_{1,n}}, \quad \beta_n = \tau_{1,n} - \tau_{(n-1)n}$$

berechnet.

Durch Addition der Koordinatendifferenzen erhält man die örtlichen Koordinaten η und ξ der Polygonpunkte.

2. Berechnung des orientierten Polygonzuges

Das Ergebnis der Berechnung eines orientierten Polygonzuges sind die Koordinaten der Polygonpunkte im Landeskoordinatensystem.

In der Vermessungspraxis treten von den neun Varianten des orientierten Polygonzuges im allgemeinen nur vier auf. In allen Fällen nämlich, in denen Anschlußseiten gemessen sind, werden auch immer die Anschlußpolygonwinkel gemessen, da nach dem derzeitigen Stande der Meßtechnik die Winkelmessung noch immer wesentlich einfacher und rascher als die Streckenmessung ausgeführt werden kann.

Die Berechnung der Koordinaten des orientierten Polygonzuges erfordert unbedingt die Kenntnis des Anschlußwinkels und der Anschlußseite. Ist die Messung dieser beiden Größen unmöglich, so müssen sie zuerst aus anderen gemessenen Stücken berechnet werden.

Bei der Berechnung des Anschlußwinkels α kommt man immer auf eine Bestimmungsgleichung von der Form

$$A . \sin\alpha + B . \cos\alpha = C,$$

worin A, B und C bekannte Koeffizienten sind.

Diese Gleichung gibt im allgemeinen zwei Werte für den Anschlußwinkel α. Zur eindeutigen Bestimmung von α muß daher noch ein weiteres Bestimmungsstück vorhanden sein. Dieses zusätzliche Bestimmungsstück ist wegen der leichteren Ausführung der Winkelmessung immer ein Anschlußpolygon- oder ein Orientierungswinkel.

Die in der Praxis auftretenden vier Varianten des orientierten Polygonzuges sind:

a) Polygonzug mit Anschlußseite, Anschluß- und Anschlußpolygonwinkel

Die drei Orientierungsgrößen genügen zur eindeutigen Bestimmung des Zuges.

Es ist dies der „Schulfall" des orientierten Polygonzuges. Er ist die einzige Form des orientierten Polygonzuges, die die unmittelbare Berechnung der strengen Werte der Landeskoordinaten aus den Feldbeobachtungen gestattet.

Die Berechnung wird in folgender Weise durchgeführt:

Aus den Anschluß- und Polygonwinkeln werden die Richtungswinkel ν der Polygonseiten im Landeskoordinatensystem gebildet

$$\begin{aligned} \nu_{A,1} &= \nu_{AP} + \alpha_A \\ \nu_{1,2} &= \nu_{A1} + \beta_1 \pm 180^0 \\ &\vdots \\ \nu_{(n-1)n} &= \nu_{(n-2)(n-1)} + \beta_{(n-1)} \pm 180^0. \end{aligned}$$

Mit den Richtungswinkeln werden die Koordinatendifferenzen Δy und Δx berechnet

$$\begin{aligned} \Delta y_{A,1} &= s_{A,1} \cdot \sin \nu_{A,1} & \Delta x_{A,1} &= s_{A,1} \cdot \cos \nu_{A,1} \\ \Delta y_{1,2} &= s_{1,2} \cdot \sin \nu_{1,2} & \Delta x_{1,2} &= s_{1,2} \cdot \cos \nu_{1,2} \\ &\vdots & &\vdots \\ \Delta y_{(n-1)n} &= s_{(n-1)n} \cdot \sin \nu_{(n-1)n} & \Delta x_{(n-1)n} &= s_{(n-1)n} \cdot \cos \nu_{(n-1)n} \end{aligned}$$

Durch Addition der Koordinatendifferenzen erhält man die Landeskoordinaten der Polygonpunkte.

b) Polygonzug mit zwei Anschlußseiten und einem Anschlußpolygonwinkel

Zur eindeutigen Berechnung des Zuges ist eine vierte Orientierungsgröße notwendig, nämlich der zweite Anschlußpolygonwinkel.

Zuerst wird der Anschlußwinkel in folgender Weise berechnet:

In einem örtlichen Koordinatensystem mit dem ersten Anschlußpunkt als Ursprung und der ersten Anschlußseite als positiver Abszissenachse wird der unbekannte Richtungswinkel τ_{AB} vom Anschlußpunkt A zum Anschlußpunkt B nach der Formel des freien Polygonzuges

$$\operatorname{tg} \tau_{AB} = \frac{\eta_B}{\xi_B}$$

eindeutig ermittelt.

Der Anschlußwinkel ist dann

$$\alpha_A = 360^0 - \tau_{AB}.$$

Mit dem aus den Landeskoordinaten der gegebenen Punkte A und B errechneten Richtungswinkel ν_{AB}, dem Anschlußwinkel α_A und den Polygonwinkeln β werden die Richtungswinkel der Polygonseiten

$$\begin{aligned} \nu_{A,1} &= \nu_{AB} + \alpha_A \\ \nu_{1,2} &= \nu_{A,1} + \beta_1 \pm 180^0 \\ &\vdots \\ \nu_{nB} &= \nu_{(n-1)n} + \beta_n \pm 180^0 \end{aligned}$$

ermittelt und dann wie beim „Schulfall" die Landeskoordinaten der Polygonpunkte berechnet.

Ein zweiter Weg zur Berechnung der Landeskoordinaten der Polygonpunkte ist die Koordinatentransformation, die nach den Formeln

$$y_r = y_A + \xi_r \sin o + \eta_r \cos o$$
$$x_r = x_A + \xi_r \cos o - \eta_r \sin o$$

aus den örtlichen Koordinaten η_r und ξ_r die Landeskoordinaten des Punktes r gibt, wobei der Orientierungswinkel

$$o = \nu_{AB} - \tau_{AB}$$

ist.

Der Wert des Anschlußwinkels und alle von ihm abgeleiteten Werte sind Näherungswerte, da zur Berechnung des örtlichen Richtungswinkels τ_{AB} die gegebene Seite s_{AB} nicht verwendet wurde.

c) Polygonzug mit einer Anschlußseite, einem Anschlußpolygonwinkel und einem Orientierungswinkel

Zur eindeutigen Berechnung des Zuges ist als viertes Bestimmungsstück noch ein zweiter Orientierungswinkel notwendig.

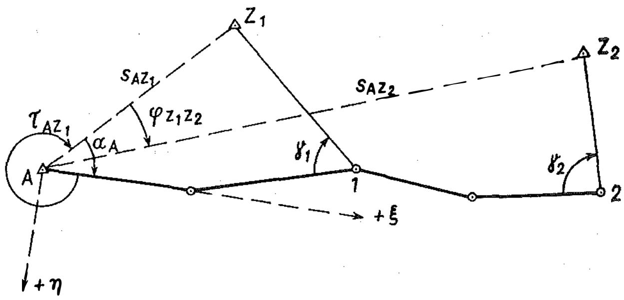

Abb. 2

Zuerst rechnet man im Landeskoordinatensystem die Richtungswinkel vom Anschlußpunkt A nach den Orientierungspunkten Z_1 und Z_2 und bestimmt den Winkel $\varphi_{Z_1Z_2}$ mit

$$\varphi_{Z_1Z_2} = \nu_{AZ_2} - \nu_{AZ_1}.$$

Dann wählt man ein örtliches Koordinatensystem mit dem Anschlußpunkt A als Ursprung und der Anschlußseite als positiver Abszissenachse.

In diesem Koordinatensystem rechnet man aus den Polygon- und Orientierungswinkeln und den Polygonseiten die Richtungswinkel τ und die Koordinatendifferenzen $\Delta\eta$ und $\Delta\xi$.

Mit diesen Größen berechnet man den Anschlußwinkel $\alpha_A = 360 - \tau_{AZ_1}$ nach den allgemeinen Formeln

$$\sin \alpha = \frac{-A.\sin \tau_{1Z_1} + B.\sin(\tau_{2Z_2} - \varphi_{Z_1Z_2})}{\sin(\tau_{1Z_1} - \tau_{2Z_2} + \varphi_{Z_1Z_2})}$$

$$\cos \alpha = \frac{A.\cos \tau_{1Z_1} = B.\cos(\tau_{2Z_2} - \varphi_{Z_1Z_2})}{\sin(\tau_{1Z_1} - \tau_{2Z_2} + \varphi_{Z_1Z_2})}.$$

Es bedeutet:

$$A = \frac{\Delta\eta_{A2} \cdot \cos \tau_{2Z_2} - \Delta\xi_{A2} \cdot \sin \tau_{2Z_2}}{s_{AZ_2}}$$

$$B = \frac{\Delta\eta_{A1} \cdot \cos \tau_{1Z_1} - \Delta\xi_{A1} \cdot \sin \tau_{1Z_1}}{s_{AZ_1}}$$

Der genauere Wert des Anschlußwinkels wird aus dem kleineren Funktionswert erhalten.

Mit diesem Anschlußwinkel wird der Polygonzug wie der „Schulfall" des orientierten Polygonzuges weiter berechnet.

Die vorstehend entwickelte Lösung ist für den allgemeinen Fall abgeleitet, daß die zwei Orientierungsrichtungen zwei Polygonpunkte mit zwei Orientierungspunkten verbinden. Die Formeln gelten auch, wenn je zwei dieser Punkte zusammenfallen, jedoch die zwei Zwischenorientierungen unbedingt erhalten bleiben.

d) Polygonzug mit drei Orientierungswinkeln

Auch in diesem Fall ist noch ein vierter Orientierungswinkel zur eindeutigen Berechnung des Zuges notwendig.

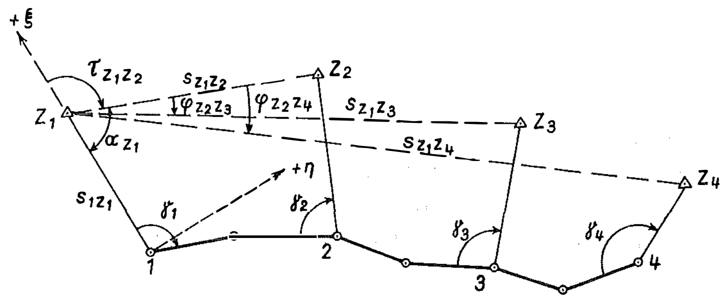

Abb. 3

Nachstehend der allgemeine Berechnungsgang:

Vorerst werden die Richtungswinkel und Seiten vom ersten Orientierungspunkt Z_1 nach den drei anderen Orientierungspunkten Z_2 bis Z_4 aus den Landeskoordinaten berechnet und die Winkel φ im Punkte Z_1 mit

$$\varphi_{Z_2Z_3} = \nu_{Z_1Z_3} - \nu_{Z_1Z_2} \text{ und } \varphi_{Z_2Z_4} = \nu_{Z_1Z_4} - \nu_{Z_1Z_2}$$

ermittelt.

Der Anschlußwinkel α_{Z_1} und die Anschlußseite s_{1Z_1} werden in einem örtlichen Koordinatensystem mit dem Polygonpunkt 1 als Ursprung und der Anschlußseite s_{1Z_1} als positiver Abszissenachse aus den örtlichen Richtungswinkeln τ und den Koordinatendifferenzen $\Delta\eta$ und $\Delta\xi$ berechnet.

1. Der Anschlußwinkel

Der Anschlußwinkel im Punkt Z_1 ist immer

$$\alpha_{Z_1} = 180 - \tau_{Z_1Z_2}$$

und wird nach den allgemeinen Formeln

$$\sin \alpha = \frac{-Ab_2 + Ba_2}{N} \text{ und } \cos \alpha = \frac{-Ab_1 + B.a_1}{N}$$

ermittelt.

Die Koeffizienten a, b und die Absolutglieder A, B sind

$$a_1 = s_{z_1z_3} . \cos \tau_{2z_2} . \sin \tau_{3z_3} - s_{z_1z_3} . \cos (\tau_{3z_3} - \varphi_{z_2z_3}) . \sin \tau_{2z_2}$$
$$a_2 = - s_{z_1z} . \sin \tau_{2z_2} . \sin \tau_{3z_3} + s_{z_1z_2} . \sin (\tau_{3z_3} - \varphi_{z_2z_3}) . \sin \tau_{2z_2}$$
$$b_1 = s_{z_1z_2} . \cos \tau_{2z_2} . \sin \tau_{4z_4} - s_{z_1z_4} . \cos (\tau_{4z_4} - \varphi_{z_2z_4}) . \sin \tau_{2z_2}$$
$$b_2 = - s_{z_1z_2} . \sin \tau_{2z_2} . \sin \tau_{4z_4} + s_{z_1z_4} . \sin (\tau_{4z_4} - \varphi_{z_2z_4}) . \sin \tau_{2z_2}$$
$$A = - \Delta\eta_{12} . \cos \tau_{2z_2} . \sin \tau_{3z_3} + \Delta\eta_{13} . \cos \tau_{3z_3} . \sin \tau_{2z_2} - \Delta\xi_{2,3} . \sin \tau_{2z_2} . \sin \tau_{3z_3}$$
$$B = - \Delta\eta_{1,2} . \cos \tau_{2z_2} . \sin \tau_{4z_4} + \Delta\eta_{14} . \cos \tau_{4z_4} . \sin \tau_{2z_2} - \Delta\xi_{2,4} . \sin \tau_{2z_2} . \sin \tau_{4z_4}$$
$$N = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Aus dem kleineren Funktionswert ergibt sich der genauere Wert des Winkels α_{z_1}.

2. Die Anschlußseite

Die Anschlußseite kann nach folgenden Formeln berechnet und kontrolliert werden:

$$s_{z1} = \frac{s_{z_1z_2} \sin (\tau_{z_1z_2} - \tau_{2z_2}) - \Delta\eta_{12} \cos \tau_{2z_2} + \Delta\xi_{12} . \sin \tau_{2z_2}}{\sin \tau_{2z_2}}$$
$$= \frac{s_{z_1z_3} \sin (\tau_{z_1z_3} - \tau_{3z_3}) - \Delta\eta_{13} \cos \tau_{3z_3} + \Delta\xi_{13} . \sin \tau_{3z_3}}{\sin \tau_{3z_3}}$$
$$= \frac{s_{z_1z_4} . \sin (\tau_{z_1z_4} - \tau_{4z_4}) - \Delta\eta_{14} . \cos \tau_{4z_4} + \Delta\xi_{14} . \sin \tau_{4z_4}}{\sin \tau_{4z_4}}.$$

Die Formeln für den Anschlußwinkel α und die Anschlußseite gelten für alle möglichen Abarten der vorstehend behandelten Aufgabe. Diese Abarten entstehen dadurch, daß sowohl die vier Polygonpunkte als auch die vier gegebenen Punkte jeweils bis auf zwei Punkte zusammenfallen können, doch müssen die vier Zwischenorientierungen unbedingt erhalten bleiben.

Mit dem Anschlußwinkel und der Anschlußseite erfolgt die Berechnung der Landeskoordinaten der Polygonpunkte wie für den „Schulfall" des orientierten Polygonzuges.

Für den Sonderfall, daß drei Orientierungswinkel in einem Polygonpunkt gemessen sind, können die Landeskoordinaten dieses Punktes durch einen Rückwärtseinschnitt ermittelt werden.

Ein zweiter Sonderfall ergibt sich, wenn von zwei Polygonpunkten je zwei Orientierungsrichtungen zu zwei Orientierungspunkten ausgehen. In diesem Fall können die Landeskoordinaten der Punkte nach den Formeln der Hansenschen Aufgabe berechnet werden. *(Fortsetzung folgt.)*

Referat

Moderne Reproduktionsverfahren im Katasterwesen

(Zum Vortrag von RdVD *Dipl.-Ing. Manfred Schenk*, Vorstand der Abteilung L 5, Reproduktion und Druck, im BA für Eich- und Vermessungswesen, am 18. Jänner 1963, in der Arbeitsgemeinschaft des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie an der Technischen Hochschule in Graz.)

Der Vortragende gab einen eindrucksvollen Überblick über die Möglichkeiten, die die Reproduktion allen amtlichen, halbamtlichen und privaten Benützern des Katasters bietet sowie über den

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. eh. K. Ledersteger und
ORdVD. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 2 Baden bei Wien, Ende April 1963 51. Jg.

Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung

Von *Leopold Maly*, Wien

(Schluß)

C. Ausgleichung der Polygonzüge

Die Berechnung der überbestimmt gemessenen Polygonzüge ist ein Ausgleichungsproblem.

Die geforderte Lagegenauigkeit der Polygonpunkte kann erreicht werden durch

1. Messung überschüssiger Bestimmungsstücke und
2. Verknotung der Polygonzüge.

Die überschüssigen Bestimmungsstücke sind Seiten, nämlich

Anschluß- und Diagonalseiten

und Winkel, bzw. Richtungen, nämlich

Anschluß- und Anschlußpolygonwinkel und

Zwischenorientierungen und Diagonalrichtungen.

Diagonalseiten und Diagonalrichtungen verbinden zwei nicht aufeinander folgende Polygonpunkte.

Von einer Verknotung der Polygonzüge spricht man dann, wenn in einem Polygonpunkt mindestens zwei Polygonzüge endigen.

Die Ausgleichung der Polygonzüge kann nach der Methode der bedingten oder vermittelnden Beobachtungen erfolgen.

Bevor jedoch auf die Ausgleichung näher eingegangen wird, muß noch die Einführung des Maßstabfaktors begründet werden.

Der Maßstabfaktor

Die Komparierung der Basislatte ist mit einem mittleren Fehler behaftet, der für jede Latte aber ein bestimmtes Vorzeichen hat, das nur zum Zeitpunkte der Komparierung noch nicht bekannt ist.

Beim Messen langer Strecken tritt jedoch dieser Fehler als regelmäßiger Fehler in Erscheinung und muß daher durch Einführung des Maßstabfaktors K berücksichtigt werden.

Der wahrscheinlichste Wert einer Strecke ist daher

$$s = s' + K.s',$$

worin

s' = der gemessene Wert der Strecke und
K = der Maßstabfaktor

sind.

I. Ausgleichung bedingter Beobachtungen

Bedingungs- und Fehlergleichungen

Die Bedingungsgleichungen sind Summen von Winkeln oder Koordinatenabschnitten. Im ersten Fall sind es Winkelgleichungen, im zweiten Fall Projektionsgleichungen.

Jedem überschüssigen Bestimmungsstück entspricht eine Bedingungsgleichung.

1. Der überbestimmt freie Polygonzug

Der überbestimmt freie Polygonzug entsteht durch Messung von Diagonalrichtungen, Diagonalseiten und den drei fehlenden Bestimmungsstücken zur Schließung des freien Polygonzuges.

Alle durch Diagonalmessungen bedingten Gleichungen enthalten nur die Winkel und Seiten, bzw. deren Verbesserungen, die der durch die Diagonalmessungen entstandenen Polygonschleife angehören.

Der Maßstabfaktor fällt aus den Fehlergleichungen des überbestimmt freien Polygonzuges heraus, wenn zur Streckenmessung ein- und dieselbe Basislatte verwendet wurde.

a) Die einseitige Diagonalrichtung

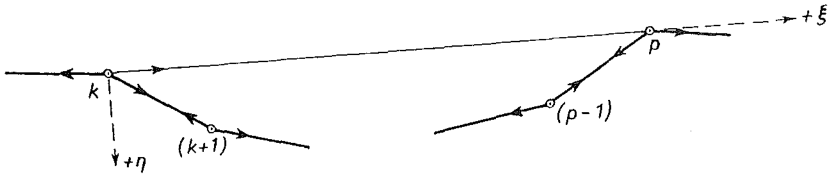

Abb. 4

Die Bedingungsgleichung, beispielsweise durch die Diagonalrichtung R_{kp} bedingt, hat die Form einer Projektionsgleichung und stellt die Projektion des Polygones von k bis p auf die Senkrechte zur Diagonalrichtung dar.

Denkt man sich im Punkt k ein örtliches Koordinatensystem mit der Diagonalrichtung R_{kp} als positiver Abszissenachse, so erhält man die örtlichen Richtungswinkel

$$\begin{aligned}
\tau_{k(k+1)} &= (R_{k(k+1)} - R_{kp}) \\
\tau_{(k+1)(k+2)} &= \tau_{k(k+1)} + (R_{(k+1)(k+2)} - R_{(k+1)k}) \pm 180^0 \\
&\vdots \\
\tau_{(p-1)p} &= \tau_{(p-2)(p-1)} + (R_{(p-1)p} - R_{(p-1)(p-2)}) \pm 180^0
\end{aligned}$$

und mit diesen die Bedingungsgleichung

$$\Big[s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)} \Big]_{i=k}^{i=(p-1)} = 0$$

Aus dieser Bedingungsgleichung entsteht durch Einführung der Messungswerte und deren Verbesserungen die Fehlergleichung:

$$\Big[(\upsilon_{i(i+1)} - \upsilon_{i(i-1)}) \cdot \frac{(+\Delta\xi_{ip})}{\rho''} \Big]_{i=k}^{i=(p-1)} + \Big[\Delta s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)} \Big]_{i=k}^{i=(p-1)} + w_d = 0$$

Es ist:

$\tau_{i(i+1)}$ = der örtliche Richtungswinkel der Seite $s_{i(i+1)}$
$\upsilon_{i(i+1)}$ = die Verbesserung der Richtung $R_{i(i+1)}$
$\Delta s_{i(i+1)}$ = die Verbesserung der Seite $s_{i(i+1)}$
$\Delta\xi_{ip}$ = die örtliche Abszissendifferenz von i bis p
ρ'' = $206265''$
w_d = Widerspruch der Bedingungsgleichung.

Die eckige Klammer bezeichnet immer die Summe der Werte, die durch Berechnung des Klammerausdruckes mit allen ganzzahligen i-Werten in den angegebenen Grenzen entsteht.

Der Widerspruch der Bedingungsgleichung wird durch strenge Auswertung der Bedingungsgleichung mit den Beobachtungswerten erhalten.

Für die Gegenrichtung R_{pk} gelten dieselben Formeln, nur wird das örtliche Koordinatensystem in den Punkt p gelegt.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten lautet:

Der Koeffizient der Richtungsverbesserungen $\upsilon_{i(i+1)}$ und $\upsilon_{i(i-1)}$ im Punkte i ist die *positive Abszissendifferenz* von i nach p, also $\Delta\xi_{ip} = (\xi_p - \xi_i)$, gebrochen durch ρ''. Der Koeffizient der Seitenverbesserung $\Delta s_{i(i+1)}$ ist der *Sinus* des örtlichen Richtungswinkels der Seite $s_{i(i+1)}$, also $\sin \tau_{i(i+1)}$.

b) Die gegenseitigen Diagonalrichtungen

Für gegenseitige Diagonalrichtungen könnten zwei Projektionsgleichungen der vorstehend abgeleiteten Form verwendet werden. Man wird aber an Stelle der zweiten Projektionsgleichung immer die Winkelgleichung verwenden, weil sie einfacher ist. Für die Polygonschleife lautet die Winkelgleichung:

$$\Big[R_{i(i+1)} - R_{i(i-1)} \Big]_{i=k}^{i=p} - m \cdot 180^0 = 0,$$

aus der die Fehlergleichung

$$\left[v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)} \right]_{i\ k}^{i=p} + w_d'' = 0$$

hervorgeht. Es ist

$m \cdot 180^0$ = die Winkelsumme der Polygonschleife k bis p.

e) Die Diagonalseite

Eine Diagonalseite gibt immer eine Distanzgleichung. Ist die Seite allein, also ohne eine Diagonalrichtung, gemessen, dann ist die Aufstellung dieser Distanzgleichung umständlich. Es ist praktischer, eine Diagonalrichtung als Unbekannte einzuführen und mit zwei einfachen Projektionsgleichungen zu rechnen.

Wird die unbekannte Diagonalrichtung durch den Winkel α im Punkte k bezeichnet, so sind die örtlichen Richtungswinkel

$$\begin{aligned}
\tau_{k(k+1)} &= \alpha \\
\tau_{(k+1)(k+2)} &= \alpha + (R_{(k+1)(k+2)} - R_{(k+1)k}) \pm 180^0 \\
&\vdots \\
\tau_{(p-1)p} &= \alpha + (R_{(k+1)(k+2)} - R_{(k+1)k} + \ldots + (R_{(p-1)p} - R_{(p-1)(p-2)}) \pm 180^0 \\
\tau_{pk} &= 180^0.
\end{aligned}$$

Mit dem Näherungswert von α aus der vorläufigen Berechnung des Zuges erhält man die Distanzgleichung

$$\left[s_{i(i+1)} \cdot \cos \tau_{i(i+1)} \right]_{i=k}^{i=p} = 0$$

und die Richtungsgleichung

$$\left[s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)} \right]_{i=k}^{i=(p-1)} = 0$$

und daraus die Fehlergleichungen

$$\left[(v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)}) \cdot \frac{(-\Delta\eta_{ip})}{\rho''} \right]_{i=k+1}^{i=(p-1)} + \left[\Delta s_{i(i+1)} \cdot \cos \tau_{i(i+1)} \right]_{i=k}^{i=p} + \\ + d\alpha'' \cdot \frac{(-\Delta\eta_{kp})}{\rho''} + w_{1d} = 0$$

$$\left[(v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)}) \cdot \frac{(+\Delta\xi_{ip})}{\rho''} \right]_{i=(k+1)}^{i=(p-1)} + \left[\Delta s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)} \right]_{i=k}^{i=(p-1)} + \\ + d\alpha'' \cdot \frac{(+\Delta\xi_{kp})}{\rho''} + w_{2d} = 0$$

Es ist

$d\alpha''$ = die unbekannte Verbesserung des Näherungswertes des Winkels α.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten der Distanzgleichung lautet:

Der Koeffizient der Richtungsverbesserungen im Punkte i ist die *negative Ordinatendifferenz* von i bis p, also $-\frac{\Delta\eta_{ip}}{\rho''} = -\frac{(\eta_p - \eta_i)}{\rho''}$.

Der Koeffizient der Seitenverbesserung $\Delta s_{i(i+1)}$ ist der *Cosinus* des Richtungswinkels der Seite $s_{i(i+1)}$, also $\cos \tau_{i(i+1)}$.

d) Der geschlossene Polygonzug

Sind der Anfangs- und Endpunkt des freien Polygonzuges durch Seiten- und Winkelmessungen verbunden, so entsteht das vollständig ausgemessene Polygon, das immer drei Bedingungsgleichungen aufweist, nämlich:

eine Winkelgleichung und zwei Projektionsgleichungen.

Der Ursprung des örtlichen Koordinatensystems wird in den ersten Polygonpunkt gelegt und die positive Abszissenachse in die erste Polygonseite $s_{1,2}$.

Die Gleichungen haben genau dieselbe Form wie die Gleichungen der Diagonalrichtungen und Diagonalseiten, nur erstrecken sie sich über den ganzen Polygonzug.

2. Der überbestimmt orientierte Polygonzug

Die in der Praxis auftretenden überbestimmt orientierten Polygonzüge unterscheiden sich nur durch die Zahl der gemessenen Anschlußgrößen. Die Messung der Anschlußgrößen ist im allgemeinen vom übergeordneten Triangulierungsnetz, von der Geländeform und von der landwirtschaftlichen und gewerblichen Nutzung des Bodens abhängig.

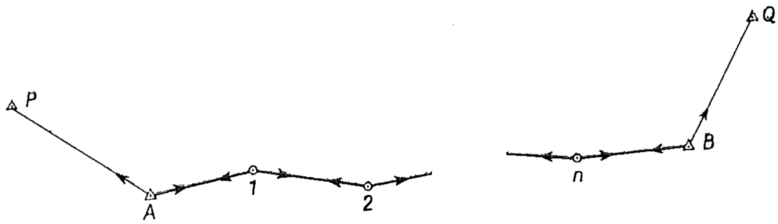

Abb. 5

Aus diesen Gründen kann man drei Gruppen von überbestimmt orientierten Polygonzügen unterscheiden, nämlich

1. Gruppe: Polygonzüge mit Anschlußrichtungen und Anschlußpunkten. Diese Polygonzüge stellen den Schulfall des überbestimmt orientierten Polygonzuges dar.

2. Gruppe: Polygonzüge mit Anschlußpunkten. Diese Polygonzüge treten dort auf, wo Sichthindernisse die Messung von Anschlußrichtungen unmöglich machen oder sehr erschweren, z. B. in Waldgebieten.

3. Gruppe: Polygonzüge ohne Anschlußpunkte. In diesem Fall sind Zwischenorientierungen das einzige Orientierungsmittel des Zuges. Die Geländeform und die Entfernung der gegebenen Punkte vom Polygonzug machen die Messung von Anschlußseiten unmöglich oder unwirtschaftlich.

1. Gruppe: Polygonzüge mit Anschlußrichtungen und Anschlußpunkten

Durch die Messung der drei restlichen Bestimmungsstücke des Schulfalles des orientierten Polygonzuges entsteht der vollständig ausgemessene Polygonzug, der daher drei Bedingungsgleichungen aufweist, nämlich eine Winkelgleichung und zwei Projektionsgleichungen.

Dazu kommen noch etwaige Bedingungsgleichungen von Zwischenorientierungen und Diagonalmessungen.

a) Die Winkelgleichung

Die Winkelgleichung lautet:

$$\left[R_{i(i+1)} - R_{i(i-1)}\right]_{i=A}^{i=B} \pm m \, . \, 180^0 - (\nu_{BQ} - \nu_{AP}) = 0.$$

Die Fehlergleichung lautet:

$$\left[\upsilon_{i(i+1)} - \upsilon_{i(i-1)}\right]_{i=A}^{i=B} + w'' = 0$$

Aus den Polygonwinkeln rechnet man die Richtungswinkel ν der Polygonseiten im Landeskoordinatensystem

$$\begin{aligned} \nu_{A1} &= \nu_{AP} + (R_{A1} - R_{AP}) \\ \nu_{1,2} &= \nu_{A1} + (R_{12} - R_{1A}) \pm 180^0 \\ &\vdots \\ \nu_{nB} &= \nu_{(n-1)n} + (R_{nB} - R_{n(n-1)}) \pm 180^0 \end{aligned}$$

und stellt mit diesen die beiden Projektionsgleichungen auf.

b) Die Projektionsgleichungen

Sie lauten:

für die Abszissenrichtung

$$\left[s_{i(i+1)} \, . \, \cos \nu_{i(i+1)}\right]_{i=A}^{i=n} - (x_B - x_A) = 0,$$

für die Ordinatenrichtung

$$\left[s_{i(i+1)} \, . \, \sin \nu_{i(i+1)}\right]_{i=A}^{i=n} - (y_B - y_A) = 0$$

und drücken die Projektion des Polygonzuges auf die beiden Achsen des Landeskoordinatensystems aus.

Aus diesen beiden Gleichungen leiten sich die Fehlergleichungen ab:
für die Abszissenachse:

$$\left[(\upsilon_{i(i+1)} - \upsilon_{i(i-1)}) \, . \, \frac{(-\Delta y_{iB})}{\rho''}\right]_{i=A}^{i=n} + \left[\Delta s_{i(i+1)} \, . \, \cos \nu_{i(i+1)}\right]_{i=A}^{i=n} + K \, . \, \Delta x_{AB} + w_x = 0$$

für die Ordinatenachse:

$$\left[(\upsilon_{i(i+1)} - \upsilon_{i(i-1)}) \, . \, \frac{(+\Delta x_{iB})}{\rho''}\right]_{i=A}^{i=n} + \left[\Delta s_{i(i+1)} \, . \, \sin \nu_{i(i+1)}\right]_{i=A}^{i=n} + K \, . \, \Delta y_{AB} + w_y = 0$$

Es ist

$\upsilon_{i(i+1)}$ = die Verbesserung der Richtung $R_{i(i+1)}$
$\Delta s_{i(i+1)}$ = die Verbesserung der Seite $s_{i(i+1)}$
$R_{i(i+1)}$ = die gemessene Richtung vom Punkt i nach Punkt $(i + 1)$

ν_{AP}, ν_{BQ} = die Richtungswinkel der Anschlußrichtungen aus den Landeskoordinaten berechnet

$\nu_{i(i+1)}$ = der Richtungswinkel (orientierte Richtung) der Polygonseite $s_{i(i+1)}$

$\Delta x_{iB}, \Delta y_{iB}$ = die Koordinatendifferenzen vom Punkt i nach dem Punkt B

K = der Maßstabfaktor

w = der Widerspruch.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten der Richtungs- und Seitenverbesserungen lautet, wenn der Polygonzug in der Richtung von A nach B durchlaufen wird, für die

Abszissenrichtung:

Der Koeffizient der Richtungsverbesserungen $\upsilon_{i(i+1)}$ und $\upsilon_{i(i-1)}$ im Punkte i ist die *negative Ordinatendifferenz* von i nach B, gebrochen durch ρ'', also $\frac{-\Delta y_{iB}}{\rho''} = \frac{-(y_B - y_i)}{\rho''}$.

Der Koeffizient der Seitenverbesserung $\Delta s_{i(i+1)}$ ist der *Cosinus* des Richtungswinkels der Seite $s_{i(i+1)}$, also $\cos \nu_{i(i+1)}$.

Ordinatenrichtung:

Der Koeffizient der Richtungsverbesserungen $\upsilon_{i(i+1)}$ und $\upsilon_{i(i-1)}$ im Punkte i ist die *positive Abszissendifferenz* von i nach B, gebrochen durch ρ'', also $\frac{+\Delta x_{iB}}{\rho''} = \frac{+(x_B - x_i)}{\rho''}$.

Der Koeffizient der Seitenverbesserung $\Delta s_{i(i+1)}$ ist der *Sinus* des Richtungswinkels der Seite $s_{i(i+1)}$, also $\sin \nu_{i(i+1)}$.

c) Die Gleichung der Zwischenorientierung

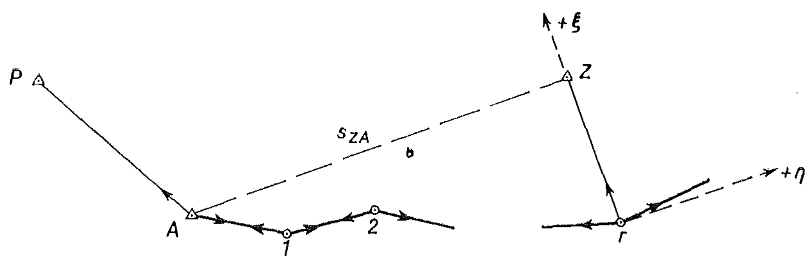

Abb. 6

Die Bedingungsgleichung der Zwischenorientierung hat die Form einer Projektionsgleichung. Sie lautet für die Zwischenorientierung im Polygonpunkt r nach dem Orientierungspunkt Z:

$$s_{ZA} \cdot \sin(\nu_{ZA} - \nu_{rZ}) + \Big[s_{i(i+1)} \sin(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ}) \Big]_{i=A}^{i=(r-1)} = 0$$

Es sind

s_{ZA} und ν_{ZA} = die Seite und der Richtungswinkel vom Punkt Z nach Punkt A

$\nu_{i(i+1)}$ und ν_{rZ} = die Richtungswinkel von i nach $(i+1)$ und von r nach Z, Die Bedingungsgleichung drückt die Projektion des Polygones von Z über A bis r auf die Senkrechte zur Richtung der Zwischenorientierung R_{rZ} aus.

Denkt man sich im Punkte r ein örtliches Koordinatensystem mit der postiven Abszissenachse nach dem Punkte Z gelegt, so kann unter Beachtung von

$$(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ}) = \tau_{i(i+1)}$$

die Bedingungsgleichung auch in nachstehender Form geschrieben werden

$$\left[s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)}\right]_{i=Z}^{i=(r-1)} = 0$$

Aus dieser Bedingungsgleichung resultiert die Fehlergleichung

$$(\upsilon_{A1} - \upsilon_{AP}) \cdot \frac{(-\Delta\xi_{ZA})}{\rho''} + \left[(\upsilon_{i(i+1)} - \upsilon_{i(i-1)}) \cdot \frac{(-\Delta\xi_{Zi})}{\rho''}\right]_{i=1}^{i=r} +$$

$$+ \left[\Delta s_{i(i+1)} \cdot \sin \tau_{i(i+1)}\right]_{i=A}^{i=(r-1)} + K \cdot \Delta\eta_{Ar} + w_Z = 0$$

Es sind

$\Delta\xi_{ZA}$ und $\Delta\xi_{Zi}$ = die Abszissendifferenzen im örtlichen Koordinatensystem von Z nach A und von Z nach i, also $(\xi_A - \xi_Z)$ und $(\xi_i - \xi_Z)$,

$\Delta\eta_{Ar}$ = die örtliche Ordinatendifferenz von A nach r, also $(\eta_r - \eta_A)$

τ_{ZA} und $\tau_{i(i+1)}$ = die Richtungswinkel im örtlichen Koordinatensystem von Z nach A und von i nach $(i+1)$.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten der Richtungs- und Seitenverbesserungen lautet:

Der Koeffizient der Richtungsverbesserungen $\upsilon_{i(i+1)}$ und $\upsilon_{i(i-1)}$ im Punkte i ist *die negative Abszissendifferenz* im örtlichen Koordinatensystem von Z nach i, gebrochen durch ρ'', also $\frac{-\Delta\xi_{Zi}}{\rho''} = \frac{-(\xi_i - \xi_Z)}{\rho''}$

Der Koeffizient der Seitenverbesserung $\Delta s_{i(i+1)}$ ist der *Sinus* des Richtungswinkels im örtlichen Koordinatensystem, also $\sin \tau_{i(i+1)} = \sin(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ})$.

Die Fehlergleichung der Zwischenorientierung enthält außer den Richtungs- und Seitenverbesserungen des Polygons von Z über A nach dem Punkt r noch die Verbesserung der Anschlußrichtung von A nach P.

Bei Aufstellung der Fehlergleichung für eine Zwischenorientierung ist zu achten

1. auf das negative Vorzeichen der Abszissendifferenzen in den Koeffizienten der Richtungsverbesserungen,

2. daß bei der Bildung dieser Koeffizienten immer die örtliche Abszissendifferenz vom rückwärts liegenden Orientierungspunkt Z über A bis zum Punkt i, also $(\xi_i - \xi_Z)$, zu nehmen ist (im Gegensatz zu den Koeffizienten derselben Richtungsverbesserungen der Projektionsgleichungen des Schulfalles).

Die Orientierungsgleichung kann auch auf den Anschlußpunkt B bezogen werden, was dann von Vorteil ist, wenn der Punkt r näher dem Punkt B als dem Punkt A liegt. In diesem Falle müssen die Richtungswinkel der Polygonseiten bis ν_{rZ} vom Punkt B ausgehend mit dem Anschlußrichtungswinkel ν_{BQ} berechnet werden.

d) Gleichungen der Diagonalmessungen

Für die ein- und gegenseitigen Diagonalrichtungen und Diagonalseiten liegen genau die gleichen Verhältnisse vor wie bei den überbestimmt freien Polygonzügen.

Es wäre nur zu erwähnen, daß für überbestimmt orientierte Polygonzüge die Richtungswinkel im örtlichen Koordinatensystem aus den bereits vorliegenden Richtungswinkeln ν im Landeskoordinatensystem durch die Differenzen

$$\tau_{i(i+1)} = (\nu_{i(i+1)} - \nu_{kp})$$

gebildet werden.

e) Gleichungen des Polygonzuges mit einem Anschlußpunkt und einer Anschlußrichtung

Es ist der Schulfall des orientierten Polygonzuges, der nur durch Zwischenorientierungen überbestimmt ist. Alle Bedingungsgleichungen sind daher Gleichungen für Zwischenorientierungen.

Der Fall kann bei der Bestimmung von Doppel- und Mehrfachpunkten auftreten.

2. Gruppe; Polygonzüge mit Anschlußpunkten

Diese Polygonzüge haben außer Gleichungen von Zwischenorientierungen und Diagonalmessungen nur eine Distanzgleichung, deren Aufstellung und Handhabung verhältnismäßig umständlich ist.

Es ist aber wesentlich einfacher, den Anschlußwinkel α_A als Unbekannte einzuführen, wodurch eine zweite Bedingungsgleichung entsteht. Die beiden Bedingungsgleichungen haben die bereits bekannte Form von Projektionsgleichungen.

Den Näherungswert des Anschlußwinkels α erhält man durch die „Berechnung des orientierten Polygonzuges".

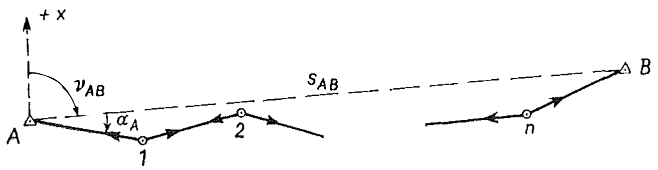

Abb. 7

Mit dem Näherungswert des Anschlußwinkels α_A bildet man die Richtungswinkel im Landeskoordinatensystem

$$\begin{aligned}
\nu_{A1} &= \nu_{AB} + \alpha_A \\
\nu_{1,2} &= \nu_{A1} + (R_{12} - R_{1A}) \pm 180^0 \\
&\vdots \\
\nu_{nB} &= \nu_{(n-1)n} + (R_{nB} - R_{n(n-1)}) \pm 180^0
\end{aligned}$$

und mit diesen erhält man die beiden Projektionsgleichungen für die Abszissen- und Ordinatenachse.

a) Die Projektionsgleichungen

Die Gleichungen lauten

$$\text{für die Abszissenachse:}\ \Big[s_{i(i+1)}\,.\cos\nu_{i(i+1)}\Big]_{i=A}^{i=n} - (x_B - x_A) = 0$$

$$\text{für die Ordinatenachse:}\ \Big[s_{i(i+1)}\,.\sin\nu_{i(i+1)}\Big]_{i=A}^{i=n} - (y_B - y_A) = 0$$

Daraus ergeben sich die Fehlergleichungen:

$$\left[(v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)})\,.\frac{(-\Delta y_{iB})}{\rho''}\right]_{i=1}^{i=n} + \Big[\Delta s_{i(i+1)}\,.\cos\nu_{i(i+1)}\Big]_{i=A}^{i=n} +$$

$$+ d\alpha_A''\,.\frac{(-\Delta y_{AB})}{\rho''} + K.\Delta x_{AB} + w_x = 0$$

$$\left[(v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)})\,.\frac{(+\Delta x_{iB})}{\rho''}\right]_{i=1}^{i=n} + \Big[\Delta s_{i(i+1)}\,.\sin\nu_{i(i+1)}\Big]_{i=A}^{i=n} +$$

$$+ d\alpha_A''\,.\frac{(+\Delta x_{AB})}{\rho''} + K.\Delta y_{AB} + w_y = 0$$

Es ist

$d\alpha_A''$ = die unbekannte Verbesserung des vorläufigen Anschlußwinkels α_A.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten der Richtungs- und Seitenverbesserungen ist dasselbe wie für den Schulfall des überbestimmt orientierten Polygonzuges.

b) Die Gleichung der Zwischenorientierung

Mit dem Näherungswert des Anschlußwinkels α_A ergibt sich die Bedingungsgleichung mit

$$s_{ZA}\,.\sin(\nu_{ZA} - \nu_{rZ}) + \Big[s_{i(i+1)}\,.\sin(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ})\Big]_{i=A}^{i=r-1} = 0.$$

Die Fehlergleichung lautet

$$\left[(v_{i(i+1)} - v_{i(i-1)})\,.\frac{(-\Delta\xi_{Zi})}{\rho''}\right]_{i=1}^{i=r} + \Big[\Delta s_{i(i+1)}\,.\sin\tau_{i(i+1)}\Big]_{i=A}^{i=(r-1)} +$$

$$+ d\alpha_A''\,.\frac{(-\Delta\xi_{ZA})}{\rho''} + K.\Delta\eta_{Ar} + w_Z = 0,$$

wobei für

$$(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ}) = \tau_{i(i+1)}$$

der örtliche Richtungswinkel eingeführt wurde.

Es ist $d\alpha_A''$ wieder die unbekannte Verbesserung des Anschlußwinkels α_A.

Die Bedeutung der Gleichung, die Bezeichnungen und das Bildungsgesetz der Koeffizienten der Verbesserungen sind dieselben wie beim Schulfall des überbestimmt orientierten Polygonzuges.

c) Die Gleichungen der Diagonalmessungen

Es liegen genau dieselben Verhältnisse vor wie bei den bereits behandelten Fällen.

d) Die Gleichungen des Polygonzuges mit einem Anschlußpunkt

Dieser Polygonzug hat keine Distanzgleichung. Die Überbestimmung erfolgt durch Zwischenorientierungen und Diagonalmessungen.

Der Näherungswert des Anschlußwinkels α_A wird durch die „Berechnung des orientierten Polygonzuges" ermittelt.

Dieser Fall des Polygonzuges kann bei der Bestimmung von Doppel- und Mehrfachpunkten auftreten.

3. Gruppe: Polygonzüge ohne Anschlußpunkte

Näherungswerte des Anschlußwinkels α und der Anschlußseite s werden durch die „Berechnung des orientierten Polygonzuges" zuerst ermittelt.

Diese beiden Orientierungsgrößen werden als Unbekannte eingeführt und dann wie beim „Polygonzug mit einem Anschlußpunkt und einem Anschlußwinkel" wird die Rechnung weitergeführt.

Da der erste Orientierungspunkt Z_1 an Stelle des Anschlußpunktes und die Seite der ersten Zwischenorientierung $s_{Z_1 1}$ an Stelle der Anschlußseite tritt, kommen zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen nur $(z - 1)$ Zwischenorientierungen in Betracht.

Die Überbestimmung dieser Polygonzüge erfolgt nur durch Zwischenorientierungen und Diagonalmessungen.

Diese Polygonzüge treten bei Bestimmung von Doppel- und Mehrfachpunkten auf.

a) Gleichung einer Zwischenorientierung

Die Bedingungsgleichung lautet wieder beispielsweise für die r-te Zwischenorientierung R_{rZ_r}:

$$s_{Z_r Z_1} \cdot \sin(\nu_{Z_r Z_1} - \nu_{rZ_r}) + s_{Z_1 1} \sin(\nu_{Z_1 1} - \nu_{rZ_r}) + \Big[s_{i(i+1)} \cdot \sin(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ_r})\Big]_{i=1}^{i=(r-1)} = 0$$

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn für

$$(\nu_{i(i+1)} - \nu_{rZ_r}) = \tau_{i(i+1)}$$

gesetzt wird, die Fehlergleichung

$$\left[(\nu_{i(i+1)} - \nu_{i(i-1)}) \cdot \frac{(-\Delta\xi_{Z_r i})}{\rho''}\right]_{i=1}^{i=r} + \Big[\Delta s_{i(i+1)} \cdot \sin\tau_{i(i+1)}\Big]_{i=1}^{i=(r-1)} + d\alpha'' \cdot \frac{(-\Delta\xi_{Z_r Z_1})}{\rho''} +$$
$$+ ds \cdot \sin\tau_{Z_1 1} + K \cdot \Delta\eta_{1r} + w_Z = 0,$$

worin $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ die Abszissen- und Ordinatendifferenzen im örtlichen Koordinatensystem sind und $d\alpha''$ und ds die Verbesserungen der vorläufigen Werte des Anschlußwinkels und der Anschlußseite darstellen.

b) Gleichungen der Diagonalmessungen

Diagonalmessungen werden genauso behandelt wie bei den vorher betrachteten Fällen.

Bildung und Auflösung der Normalgleichungen

Vor der Bildung der Normalgleichungen ist es zweckmäßig, die Messungen durch Einführung ihrer mittleren Fehler auf gleiches Gewicht zu bringen.

Dies geschieht durch Multiplikation des Koeffizienten einer jeden Verbesserung der Fehlergleichung mit dem gegebenen mittleren Fehler der betreffenden Beobachtung.

Dann kann die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen durch einfache Summierung der Produkte aus den Fehlergleichungskoeffizienten erfolgen.

Die Fehlergleichungen fast aller Arten von Polygonzügen weisen gegen den Normalfall der Korrelatenausgleichung einen Unterschied auf. Es treten nämlich neben den unbekannten Verbesserungen der Winkel und Seiten noch die unbekannten Größen: Maßstabfaktor, Anschlußwinkel und Anschlußseite auf. Es liegt der allgemeine Fall der Ausgleichsrechnung, nämlich: „Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten" vor.

Wenn zwischen den n Beobachtungen f Fehlergleichungen mit r Unbekannten bestehen, dann lautet die allgemeine Form der Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_1 \mathfrak{v}_1 + a_2 \,.\, \mathfrak{v}_2 + \dots + a_n \,.\, \mathfrak{v}_n + A_1 x_1 + B_1 x_2 \dots + R_1 x_r + w_1 = 0\\
&b_1 \mathfrak{v}_1 + b_2 \,.\, \mathfrak{v}_2 + \dots + b_n \,.\, \mathfrak{v}_n + A_2 x_1 + B_2 x_2 \dots + R_2 x_r + w_2 = 0\\
&\vdots\\
&f_1 \mathfrak{v}_1 + f_2 \,.\, \mathfrak{v}_2 + \dots + f_n \,.\, \mathfrak{v}_n + A_f x_1 + B_f x_2 \dots + R_f x_r + w_f = 0
\end{aligned}$$

Für die Möglichkeit einer Ausgleichung muß die Ungleichung

$$n > f - r > 0$$

bestehen.

Die $(f + r)$ Normalgleichungen haben nachstehende Form:

$$\begin{array}{l}
[aamm]\,k_1 + [abmm]\,k_2 + \dots + [afmm]\,k_f + A_1 x_1 + B_1 x_2 + \dots + R_1 x_r + w_1 = 0\\
[bamm]\,k_1 + [bbmm]\,k_2 + \dots + [bfmm]\,k_f + A_2 x_1 + B_2 x_2 + \dots + R_2 x_r + w_2 = 0\\
\vdots\\
[famm]\,k_1 + [fbmm]\,k_2 + \dots + [ffmm]\,k_f + A_f x_1 + B_f x_2 + \dots + R_f x_r + w_f = 0\\
A_1 \,.\, k_1 + A_2 \,.\, k_2 + \dots \quad A_f \,.\, k_f \quad . \quad . \quad . \quad . = 0\\
B_1 \,.\, k_1 + B_2 \,.\, k_2 + \dots \quad B_f \,.\, k_f \quad . \quad . \quad . \quad . = 0\\
\vdots\\
R_1 \,.\, k_1 + R_2 \,.\, k_2 + \dots \quad R_f \,.\, k_f \quad . \quad . \quad . \quad . = 0
\end{array}$$

Die m-Werte sind die mittleren Fehler der Beobachtungen.

Da die Koeffizienten der Normalgleichungen bezüglich der Diagonale von links oben nach rechts unten symmetrisch gleich sind, werden sie nur einmal angeschrieben, wodurch die letzten r-Gleichungen nur durch Nullen bezeichnet sind.

Die Auflösung des Normalgleichungssystems geschieht nach dem Gaußschen Algorithmus.

Die letzte Reduktion gibt die negative Fehlerquadratsumme

$$\left[\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}{m\,m}\right],$$

wobei die Anteile der Korrelaten negativ sind, die Anteile der Unbekannten aber positiv sind.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$m_o = \sqrt{\frac{\left[\frac{\upsilon\upsilon}{mm}\right]}{(f-r)}}\,.$$

II. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

Die Ausgleichung der Polygonzüge nach vermittelnden Beobachtungen setzt voraus, daß von jedem Polygonpunkt zuerst vorläufige Koordinatenwerte bekannt sein müssen.

Bei dieser Methode wächst die Zahl der Unbekannten im gleichen Verhältnis wie die Zahl der Neupunkte.

Aus jeder Messung, also Richtung und Strecke, geht eine Fehlergleichung hervor.

Es besteht bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen kein Unterschied im Ansatz der Fehlergleichungen für die verschiedenen Arten der Polygonzüge.

Da jede Strecke und Richtung zwei Punkte verbindet, können höchstens vier unbekannte Koordinatenverbesserungen dx und dy in einer Gleichung auftreten, wozu noch die Orientierungsunbekannte o in der Richtungsgleichung und der Maßstabfaktor K in der Streckengleichung kommen.

Die Fehlergleichung einer Richtung R_{ik} lautet:

$$a_{ik} \,.\, dx_i + b_{ik} \,.\, dy_i - a_{ik} \,.\, dx_k - b_{ik} \,.\, dy_k + o_i + w_{ik}'' = \upsilon_{ik}$$

Es sind

$a_{ik} = \frac{\sin \nu_{ik}}{s_{ik}} \,.\, \rho'',\ b_{ik} = \frac{-\cos \nu_{ik}}{s_{ik}} \,.\, \rho''$ ... die Richtungskoeffizienten von i nach k,

$dx_i,\ dy_i,\ dx_k,\ dy_k$ ... die Koordinatenverbesserungen der Neupunkte i und k,

o_i ... der Orientierungswinkel auf Punkt i,

w_{ik} ... der Widerspruch der Richtung R_{ik}, $w_{ik} = \left(\nu_{ik} - R^o_{ik}\right)$ d. i. (vorläufiger Richtungswinkel — vorläufig orientierte Richtung),

υ_{ik} ... die Verbesserung der Richtung R_{ik}.

Für den Orientierungswinkel wird auch ein Näherungswert und die Verbesserung eingeführt, also $o_i = o^o_i + do_i$.

Die Fehlergleichung einer Polygonseite s_{ik} lautet:

$$-\cos \nu_{ik} \,.\, dx_i - \sin \nu_{ik} \,.\, dy_i + \cos \nu_{ik} \,.\, dx_k + \sin_{ik} \,.\, dy_k - s_{ik}' K + w^m_{ik} = \Delta s_{ik}$$

Es ist

ν_{ik} ... der vorläufige Richtungswinkel von i nach k

s_{ik}' ... der gemessene Wert der Strecke s_{ik}

K ... der Maßstabfaktor

w^m_{ik} ... der Widerspruch der Strecke s_{ik}, $w^m_{ik} = \left(\overset{o}{s}_{ik} - s_{ik}',\right)$ d. i. (Strecke aus vorläufigen Koordinaten — gemessener Wert)

Δs_{ik} ... die Verbesserung der Strecke s_{ik}.

Vor der Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen ist es zweckmäßig, durch Division der ganzen Fehlergleichung (einschließlich des Widerspruchs) durch den mittleren Fehler der Beobachtungsgröße alle Fehlergleichungen auf gleiches Gewicht zu bringen.

Mit diesen umgeformten Koeffizienten der Fehlergleichungen werden in üblicher Weise die Koeffizienten der Normalgleichungen gebildet.

Die Auflösung der Normalgleichungen gibt die gesuchten Punktverbesserungen dx und dy und damit die wahrscheinlichsten Werte der Landeskoordinaten der Neupunkte.

Die letzte Reduktion der Normalgleichungen gibt wieder die Fehlerquadratsumme, aus der der mittlere Fehler der Gewichtseinheit mit

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{vv}{mm}\right]}{n-u}}$$

errechnet wird.

D) Die Verknotung der Polygonzüge

Füllen die Neupunkte eine Fläche aus, so findet man zur Bestimmung der Punkte mit einem einzigen Polygonzug nicht mehr das Auslangen. Es muß vielmehr ein Netz von Polygonzügen über das ganze Gebiet gelegt werden, um alle Punkte zu erfassen.

Die Punkte dieses Netzes heißen Knotenpunkte.

Ein Knotenpunkt ist definiert als Endpunkt von mindestens zwei freien oder orientierten Polygonzügen.

Jeder Punkt, also Neu- und Altpunkt, kann Knotenpunkt sein, doch sollen nur die Polygonpunkte, die Knotenpunkte sind, als solche gelten.

Die Hauptpunkte einer Verknotung der Züge sind die Anschlußpunkte (Altpunkte) und die Knotenpunkte (Neupunkte).

Man unterscheidet wieder Anschlußpunkte mit und ohne Anschlußrichtungen, desgleichen Knotenpunkte mit und ohne Polygonwinkel, d. s. die Winkel zwischen den im Knotenpunkt endigenden Polygonseiten.

Nicht nur zur Erfassung aller Neupunkte müssen die Züge verknotet werden, auch zur Erreichung einer vorgegebenen Lagegenauigkeit der Polygonpunkte muß ein langer Zug unterteilt werden, was am wirkungsvollsten durch eine Verknotung geschehen kann.

Der Ausgleichung eines Netzes muß wieder die Berechnung vorläufiger Werte der Koordinaten und fehlender Orientierungsgrößen vorausgehen.

1. Berechnung der Verknotung

Lassen sich in dem Netz mit Hilfe der gemessenen Polygonwinkel auf den Knotenpunkten orientierte Züge zusammenstellen, dann erfolgt deren Berechnung nach den im Abschnitt: „Berechnung des orientierten Polygonzuges“ entwickelten Methoden.

Sind jedoch in manchen Knotenpunkten nur einige oder gar keine Polygonwinkel gemessen, so müssen die zur Berechnung notwendigen Stücke als Unbekannte eingeführt und berechnet werden.

Gang der Berechnung:

Zuerst berechnet man die Winkel der Figur der Knotenpunkte, die etwa fehlen. Zu diesem Zwecke ermittelt man die Entfernungen der Knotenpunkte nach den Formeln des freien Polygonzuges und berechnet aus den zwei Projektionsgleichungen für jede Figur der Knotenpunkte die gesuchten Netzwinkel. Bilden die Knotenpunkte Dreiecke, so können die Winkel auch mit dem Halbwinkelsatz berechnet werden.

Sind Anschlußpunkte mit Anschlußrichtungen vorhanden, dann stellen sich der weiteren Berechnung der Polygonzüge keine Hindernisse entgegen.

Der allgemeinste Fall tritt dann ein, wenn Anschlußpunkte ohne Anschlußwinkel vorliegen und auf den Knotenpunkten der Anschlußzüge keine Polygonwinkel gemessen sind.

In diesem Fall müssen mindestens zwei Anschlußpunkte und drei Knotenpunkte vorhanden sein.

Die unbekannten Winkel sind der Anschlußwinkel im ersten Anschlußpunkt und der Polygonwinkel auf dem Knotenpunkt des zweiten Anschlußzuges. Die Ermittlung der Winkel erfolgt wieder aus Projektionsgleichungen. Mit diesen Winkeln wird der Polygonzug in der üblichen Weise berechnet.

In allen diesen Fällen, wo goniometrische Gleichungen aufzulösen sind, muß zur Feststellung des eindeutigen Resultates noch ein zusätzliches Bestimmungsstück verwendet werden.

2. Ausgleichung der Verknotung

Die Ausgleichung einer Verknotung kann wieder nach bedingten oder vermittelnden Beobachtungen erfolgen.

a) Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

In einer Verknotung der Züge können theoretisch alle Arten von Bedingungsgleichungen auftreten, die alle im Abschnitt: „Ausgleichung der Polygonzüge" behandelt sind.

Die Zahl der Bedingungsgleichungen einer Verknotung der Züge ergibt sich mit

$$B = P + w - 2k + Zwi + Di,$$

worin bedeutet:

B ... Zahl der Bedingungsgleichungen
P ... Zahl der Polygonzüge der Verknotung
w ... Zahl der Anschluß- u. Polygonwinkel auf Anschluß- u. Knotenpunkten
k ... Zahl der Knotenpunkte (Neupunkte)
Zwi ... Zahl der Zwischenorientierungen
Di ... Zahl der Diagonalmessungen.

Werden Anschlußwinkel, Anschlußseiten und Polygonwinkel auf Knotenpunkten als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt, so entsteht für jedes als Unbekannte eingeführte Bestimmungsstück eine Bedingungsgleichung, sodaß diese

Unbekannten an der Zahl der überschüssigen Beobachtungen nichts ändern; hingegen bewirkt die Zahl der Maßstabfaktoren eine Verringerung der überschüssigen Beobachtungen.

Die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist

$$ü = B - m,$$

worin bedeutet:

B ... die Zahl der Bedingungsgleichungen
m ... die Zahl der Maßstabfaktoren.

b) Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Jeder beobachtete Neupunkt verursacht drei Unbekannte, nämlich zwei Koordinatenverbesserungen und die Orientierungsunbekannte.

Jeder nicht beobachtete Neupunkt hat nur die zwei Koordinatenverbesserungen.

Jeder beobachtete Altpunkt weist nur eine Orientierungsunbekannte auf.

Zu diesen Unbekannten treten noch die Maßstabfaktoren.

Die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist nach der Formel

$$ü = R + s - (3n_1 + 2n_2 + a + m).$$

Es bedeutet:

R ... Zahl aller auf Alt- und Neupunkten gemessenen Richtungen
s ... Zahl aller Polygonseiten
n_1 ... Zahl der beobachteten Neupunkte
n_2 ... Zahl der nicht beobachteten Neupunkte
a ... Zahl der beobachteten Altpunkte
m ... Zahl der Maßstabfaktoren.

Kriterium zur Bestimmung eines fehlerhaften Ausgangspunktes beim mehrfachen Rückwärtseinschneiden

Von *Walter Smetana*, Wien

1. Einleitung

Bei der in der Praxis vorkommenden trigonometrischen Bestimmung von Einschaltpunkten (EP) [1] nach der Methode des mehrfachen Rückwärtseinschneidens wird es mitunter vorkommen, daß die analytische Berechnung der drei Schnitte mit den geringsten mittleren Punktlagefehlern [5] Koordinaten des zu bestimmenden Punktes liefert, die untereinander Streuungen aufweisen, die ein Vielfaches der in [6] entwickelten maximalen Koordinatenstreuungen betragen. Der Grund hiefür liegt darin, daß sich die Koordinaten eines Ausgangspunktes nicht auf den angezielten Punkt beziehen, also keine Identität dieses gegebenen Ausgangspunktes vorliegt.

Während nun *F. Ackerl* in den sehr ausführlichen Abhandlungen [2] [3], sowohl den Einfluß der Fehler der bekannten trigonometrischen Punkte auf das Ergebnis des Rückwärtseinschnittes als auch die Wirkung der Winkelfehler untersucht, die Koeffizienten bestimmt, mit denen der Fehler des Neupunktes zu berechnen ist, wenn die Koordinatenfehler der gegebenen Punkte und die Winkelfehler bekannt