

Paper-ID: VGI\_196302



## Über Verfahren der Stellartriangulation

Karl Killian <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wien 14, Hadikgasse 40*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **51** (1), S. 3–14

1963

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_196302,  
Title = {\U}ber Verfahren der Stellartriangulation},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {3--14},  
Number = {1},  
Year = {1963},  
Volume = {51}  
}
```



halts sind jedoch einige wichtige Größen noch sehr unsicher: die durch Kalbung der Eisströme und Eisschelfe an den Küsten verloren gehenden Eismassen und die Schneemengen, welche durch die meist vom Inneren der Eisschilde nach außen wehenden Winde auf dem Wege der Schneedrift an den Eisrändern verloren gehen. So ist heute der Massenhaushalt der Südpolargebiete zu mindestens 50% unsicher.

Den Abschluß des Symposiums bildete eine große Exkursion in das glaziologisch-meteorologische Meßfeld des Alpenvereins und der Universität Innsbruck, das von Professor Hoinkes seit 10 Jahren eingerichtet ist. Unter seiner Führung fand auch die Exkursion statt. — Der Hintereisferner gehört auch zu den wichtigsten geodätisch-glaziologischen Forschungsobjekten. Er wurde bereits 1890 meßtisch-photogrammetrisch und 1920 stereophotogrammetrisch bearbeitet und wurde besonders in den letzten Jahren immer wieder aufgenommen, um seine Veränderungen zu untersuchen. Die Koordinierung der photogrammetrischen und meteorologischen Gletscherforschung spielte auf dem Symposium eine Rolle und ist eine im Rahmen der Alpen-glaziologie sehr aktuelle Aufgabe, die in den kommenden Jahren gelöst werden soll.

Die Vorträge, die auf dem Symposium in Obergurgl\*) gehalten bzw. verlesen worden sind, sind in der Publikation Nr. 58 der Internationalen Association für Hydrologie enthalten. Ein Zusatzband mit den Diskussionen wird noch erscheinen.

---

\*) Anmerkung: W. Ward, Colloque D'Obergurgl 10. 9. bis 18. 9. 1962 Symposium of Obergurgl, Variations of the Regime of Existing Glaciers, Publication No. 58 De L'Association D'Hydrologie Scientifique, Secrétaire: L. J. Tison, Braamstraat 61, Gentbrügge 1962.

## Über Verfahren der Stellartriangulation

Von *Karl Killian*, Wien

### A. Einleitung

Als Stellartriangulationen können jene „Hochzieltriangulationen“ bezeichnet werden, deren „Hochziele“ (Mond, künstliche Erdsatelliten, Raketen etc.) in bezug auf die Fixsternörter koordiniert werden. Das Koordinieren des „Hochziels“ besteht in der Bestimmung von Rektaszension und Deklination des Schnittpunktes der durch Erdstationspunkt und „Hochziel“ bestimmten Geraden mit der Himmels-sphäre. Besonders die Astrophotographie (Photographie des „Hochziels“ und der umliegenden Sterne) im Verein mit bekannten einfachen analytischen Verfahren lösen diese Aufgabe [4] [10]. Bei allen Verfahren der Stellartriangulation ermöglicht das Koordinieren des „Hochziels“ eine von der Lotrichtung unabhängige und demnach eine lotabweichungs- und lotstörungsfreie Koordinatenbestimmung der Stationspunkte.

Die Stellartriangulation verwendet außer dem Mond künstliche Erdsatelliten und Raketen als Hochziele. Letzteren kommen noch andere große wissenschaftliche Bedeutungen zu, wodurch die Verwendung von Raketen und künstlichen Erdsatelliten als Hochziel nunmehr besonders gerechtfertigt erscheint. Raketen und künstliche Erdsatelliten sind hervorragende Werkzeuge geophysikalischer und astronomischer Forschung. Erste Messungen in der Hochatmosphäre (über 100 km)

wurden im Jahre 1946 in den USA mit V-2-Raketen ausgeführt und die stürmische Entwicklung der Raketen und Satelliten sowie deren Forschungsausrüstungen hat nicht nur ungeahnte Erkenntnisse über die Atmosphäre erbracht, sondern sie eröffnete einen weiteren „Blick“ in den Weltraum, der uns bis dahin verschlossen blieb; denn nur beschränkte Strahlenbereiche (sichtbares Licht, enge Gebiete im Infrarot und Radiowellen 1 cm bis 15 m), an die alle Lebensvorgänge auf der Erde angepaßt sind, können die Atmosphäre durchdringen.

Künstliche Erdsatelliten spielen auch in der physikalischen Geodäsie eine bedeutende Rolle (Bestimmung der statischen Abplattung und regionaler Schwereanomalien), ferner dienen künstliche Erdsatelliten dem weltweiten Nachrichtenverkehr und der Navigation.

### B. Grundgedanken der Verfahren

Die Grundgedanken der bekannten Verfahren der Stellartriangulation werden kurz erwähnt und ein m. W. n. neues Verfahren wird behandelt. Die Verfahren der Stellartriangulation kann man einteilen in:

- a) jene, die geozentrische Koordinaten der Stationspunkte liefern,
- b) jene, die nur die gegenseitige Lage der Stationspunkte bestimmen.

ad a): Besonders in den letzten vier Jahrzehnten wurden Vorschläge zur Sterntriangulation erbracht, die den Mond als Hochziel verwenden. Für spezielle Lagen des Mondes in bezug auf die Sterne: Sternbedeckung und Sonnenfinsternis, wurden viele visuelle und objektive Registrierverfahren entwickelt und erprobt [2] [3] [6a] [9]. Für beliebige Lagen des Mondes in bezug auf die Sterne dient bekanntlich die Mondpositions-Kamera (1952) nach *Markowitz* [2] [6a].

Der Mond sowie künstliche Erdsatelliten gestatten die Bestimmung der geozentrischen Polarkoordinaten der Stationspunkte [2] [6b] [7]. Dazu sind die Ephemeriden des Mondes bzw. des Satelliten notwendig. Die geozentrischen Polarkoordinaten eines Stationspunktes werden berechnet aus zwei zeitlich entsprechend getrennten photographischen Aufnahmen des Mondes und der umliegenden Sterne (sie bestimmen je die topozentrischen Koordinaten des Mondmittelpunktes) und aus den zugeordneten geozentrischen Mondörtern (bis auf eine bestimmbare Zeitkorrektur aus dem Ephemeriden entnehmbar).

In geometrischer Hinsicht ist dieses Verfahren einfach. Es ist ein Vorwärtseinschnitt mit räumlich orientierten Richtungen, ausgehend von zwei verschiedenen Lagen des Mondmittelpunktes. In praktischer Hinsicht ergeben sich jedoch erhebliche Schwierigkeiten: Ungenauigkeit der Mondephemeriden, Mond gibt kein scharfes Ziel und hat gegenüber anderen Hochzielen eine kleine Parallaxe, Fehler in Zeitpunktregistrierung u. a. Zusammenfassend ist zu erwarten, daß diese zur Zeit genaueste Stellartriangulation mit dem Mond nach Ausgleichung der Messungen von 100 Beobachtungsnächten einen Lagefehler von etwa 30 bis 40 m aufweist [2] S. 286 und [7].

Ein künstlicher Erdsatellit, der als ein sogenannter geodätischer Satellit ausgestattet ist, umkreist seit 31. Oktober 1962 die Erde. Um vom Einfluß des Luftwiderstandes praktisch befreit zu sein, muß ein geodätischer Satellit einen Erdabstand von mindestens 1000 km haben. Seine Entfernung soll aber auch nicht wesentlich

größer sein; denn mit dieser nehmen der Einfluß der Gravitation und damit die für die physikalische Geodäsie wichtigen Effekte rasch ab. Er hat eine Bahn von geringer Exzentrizität (Perigäum 1077 km, Apogäum 1184 km). Zur optischen Beobachtung ist er mit einer Elektronenlichtblitzanlage ausgerüstet, die mit Sonnenenergie betrieben wird und Signale von 2,5 Millisekunden Dauer aussendet. Die optische Beobachtung der Satelliten erfolgt mit Spezialkameras: Backer-Nunn-Kamera, BC-4-Wild-Kamera u. a. [2] [6a] [11].

Wenn auch geodätische Satelliten etwa 300 mal näher sind als der Mond, ihre Geschwindigkeit ist entsprechend größer. Bei konzentrischer Bahn und 1100 km Erdbstand beträgt diese 7,3 km/sek. Allein ein Zeitfehler von 0,001 sek. ergibt sodann einen Winkelfehler von  $206265''$ .  $6,6 \cdot 10^{-6} = 1,4''$ . Wie sich gezeigt hat, sind auch die Ephemeriden, wegen der kurzen Lebensdauer der Satelliten, nicht genügend genau bestimmbar. Ferner ist zu beachten, daß registrierende Beobachtungen nur die Wirkung von zufälligen Fehleranteilen verkleinern können. Ob die für den Mond angeführte Genauigkeit der Bestimmung geozentrischer Polarkoordinaten auch mit Satelliten erreicht bzw. überschritten werden kann, wird das Experiment zeigen.

ad b): Grundlegendes zur Stellartriangulation nach *Y. Väisälä*: Von einem Hochziel (z. B. Rakete) wird in einer sternklaren Nacht ein Lichtblitz ausgesandt. Von zwei Stationen aus werden je mit einem Astrographen der Lichtblitz sowie die umliegenden Sterne aufgenommen. Der dem Lichtblitz zugeordnete Zeitpunkt wird registriert. Derselbe Vorgang wird für ein Hochziel, das eine andere Lage im Raume hat, wiederholt. Aus jedem aufgenommenen Bild und den Fixsternkoordinaten wird das Hochziel koordiniert (siehe unter A). Durch die zwei ersten sowie durch die zwei letzten Bilder ist auf der Himmelssphäre je ein Großkreis bestimmt. Die Ebenen derselben schneiden sich in einer Geraden. Die Richtung dieser Geraden entspricht der durch beide Stationen gehenden Geraden [12].

Werden diese Vorgänge in mehreren Stationen ausgeführt, so ergibt sich ein Polyedernetz, das über beliebig große Gebiete der Erde erstreckt werden kann. Die Registrierung der Zeitpunkte erfolgt mit einem Photomultiplikator [5]. Rein geometrisch genügt es, die Entfernung zweier Stationen zu messen um den Maßstab des Polyedernetzes zu bestimmen.

Das Verfahren von *Y. Väisälä* läßt eine sehr naheliegende, m. W. n. jedoch neue Abänderung zu, die nicht nur zu teils bekannten geometrischen Aufgaben und Lösungen führt, sondern bei der auch Zeitregistrierungen und daher die damit verbundenen Fehler wegfallen:

In einer sternklaren Nacht wird von mindestens 5 Stationen aus mit je einem Astrographen ein Lichtblitz samt den umliegenden Sternen aufgenommen. Nach einer beliebigen unbekanntem Zwischenzeit (wenn man von Erdkrustenbewegungen absehen kann, können es Wochen sein) wird mit einem zweiten Lichtblitz, der eine andere Lage im Raume hat, der Vorgang wiederholt. Aus den 10 gewonnenen Bildern und den Koordinaten der photographierten Fixsterne ist im allgemeinen die gegenseitige Lage der 5 Stationen (und auch die der Lichtblitze) berechenbar. Darüber gewinnt man sofort Klarheit, wenn man beachtet, daß jedes Bild, das unter A) erwähnte Koordinaten gestattet. Die ersten 5 Bilder bestimmen somit ein Strahlen-

bündel von 5 Strahlen, d. h., daß alle Winkel zwischen diesen Strahlen berechenbar sind. Dasselbe gilt für die anderen 5 Bilder. Wir haben also das bekannte Orientierungsproblem der Luftbildmessung vor uns, das analytisch gelöst und für Elektronenrechner programmiert ist.

Die Analogie mit der Luftbildmessung reicht noch weiter: Der Lichtblitz entspricht dem Objektivmittelpunkt, die Himmelssphäre der photographischen Platte und das Fixstern-Koordinatensystem dem Achsenkreuz der Platte. Unsere „Kamera“ hat ein Überweitwinkelobjektiv von optisch niemals erreichbarer Größe des Gesichtswinkels und Kleinheit der Verzeichnungsfehler. Die mit unserer „Kamera“ erreichte Winkelmeßgenauigkeit ist identisch mit der Winkelmeßgenauigkeit der verwendeten Astrographen. Die „Flughöhe“ wird etwa vertausendfacht.

Die Größe der gegenseitigen Lagefehler der Stationen läßt sich sofort wenigstens roh abschätzen: Wir multiplizieren die bekannten bei der Luftbildmessung entstandenen Lagefehler mit dem Größenverhältnis, das durch unsere Stations- und Lichtblitzanordnung im Vergleich zu einer Luftbildmessung besteht und dividieren durch das Verhältnis gebildet aus Winkelmeßfehler bei Luftbild- bzw. Astrographenaufnahmen. Die Meßgenauigkeit eines Astrographen mit Zeiss-Vierlinser und  $f = 1$  m bleibt unter  $\pm 0,3''$  (über diese Meßgenauigkeiten und über Sternörter siehe z. B. 2. Katalog d. Astronom. Gesellsch. 1951). Die Koordinaten der mit dem Astrographen aufgenommenen Sterne sind meist nicht genügend genau bekannt. Durch differenzielle Messungen können jedoch nachträglich diese Koordinaten aus genauen Sternkoordinaten abgeleitet werden. Dies kann an Sternwarten erfolgen, die zur Bestimmung und Katalogisierung von Sternörtern eingerichtet sind.

Die aus der Luftbildmessung bekannten gefährlichen Flächen spielen im vorliegenden Fall, wegen der konvexen Erdgestalt, keine, die gefährlichen Räume dagegen eventuell eine Rolle.

Wir betrachten noch die geometrischen Verhältnisse bei Verwendung von 3 Lichtblitzen. Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von  $n$  Punkten des Raumes braucht man  $z_1 = 3(n - 2)$  Stücke. Denn zur gegenseitigen Festlegung von 3 Punkten braucht man 3 Stücke (davon muß 1 Stück eine Strecke sein) und zu jedem weiteren Punkt braucht man um 3 Stücke mehr:  $z_1 = 3 + (n - 3) \cdot 3 = 3 \cdot (n - 2)$ . Analog ergibt sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Winkel eines Strahlenbündels von  $p$  Strahlen:  $z_2 = 3 + (p - 3) \cdot 2 = 2p - 3$ . Bei 3 Lichtblitzen und 4 Stationspunkten folgt:  $n = 7$ ,  $z_1 = 15$ ,  $p = 4$ ,  $z_2 = 5$ . Die Anzahl der gesamten unabhängigen Winkel ist sodann  $3 \cdot 5 = 15$ . Mit 15 Winkeln allein ist die Aufgabe nicht bestimmt (Ähnlichkeitstransformation). Nimmt man noch eine Strecke dazu, so erhält man eine geometrisch überbestimmte Aufgabe. Wendet man obige Gleichungen für die erstgenannte Orientierungsaufgabe an, so sieht man, daß diese geometrisch bestimmt ist. Versucht man diese Gleichungen für 3 Stationspunkte und 4 Lichtblitze anzuwenden, so erkennt man, daß die Aufgabe für 4 und auch für beliebig viele Lichtblitze unbestimmt ist. Dies ergibt auch die Anschauung, wenn man beachtet, daß über ein beliebig angenommenes Stationspunktedreieck die dazugehörigen Örter der Lichtblitze bestimmt werden können (räumlicher Rückwärtschnitt). Daraus folgt ferner, daß es außer den beiden genannten Aufgaben zur

gegenseitigen Orientierung von Strahlenbündeln keine weiteren Aufgaben dieser Art geben kann.

Während in der Luftbildmessung die erstgenannte Orientierungsaufgabe eine grundlegende Rolle spielt, könnte die zweitgenannte Orientierungsaufgabe nur in speziellen Fällen (große Querüberdeckung) Beachtung finden. Das Gegenteil gilt für vorliegende Belange. Die analytische Lösung der zweitgenannten Aufgabe ist (wie in einer folgenden Arbeit gezeigt wird) einfacher und das Ergebnis fehlertheoretisch günstiger. Gefährliche Flächen und Räume verlieren ihre Existenz, wenn die 3 Lichtblitze nicht einer Geraden angehören.

Das Ergebnis ist ein Polyedernetz, bezogen auf ein beliebiges netzfestes Koordinatensystem. Einige Seiten, die gegenseitig sichtbare Stationen verbinden, werden zur Bestimmung des Maßstabes und zur Ausgleichung des Systems telluometrisch gemessen.

Als Hochziel ist eine vertikal aufsteigende Rakete gedacht. Diese soll nach ihrem Brennschluß eine für den höchsten Punkt (Ruhepunkt) tempierte Vorrichtung zur Auslösung des Lichtblitzes einschalten. Zur Kontrolle sollen Vor- und Nachblitze erfolgen. Die Rakete kann auch mit geo- und astrophysikalischen Meßgeräten ausgestattet werden.

Ein künstlicher Erdsatellit, der gegenüber Punkten der Erdoberfläche ebenfalls in Ruhe ist, also eine Umlaufzeit von 24 Stunden hat und in der Äquatorebene liegt, müßte einen Bahnradius von ca. 42000 km aufweisen. Das folgt z. B. aus dem 3. *Kepler'schen* Gesetz, wenn man die Entfernung  $r_m$  bzw. Umlaufzeit  $T_m$  des Mondes zu rund 384000 km bzw. 27,3 Tage annimmt. Die Entfernung bzw. Umlaufzeit des Satelliten sei  $r_s$  bzw.  $T_s$ :

$$T_m^2 : T_s^2 = r_m^3 : r_s^3$$

Daraus kann  $r_s$  berechnet werden.

Zusammenfassend ergeben sich für den vorliegenden Fall nachstehende Vorteile der Raketen gegenüber den Satelliten:

1. Große Freiheit in der Wahl des Lichtblitz-Ortes.
2. Der Lichtblitz hat in bezug auf die Erde fast keine Bewegung.
3. Astrographen ( $f = 1$  m) gestatten eine genauere Winkelmessung als dies mit den für Satelliten gebauten Instrumenten möglich ist.

Eine Abart dieses Verfahrens, die einfacher aber ungenauer ist, ergibt sich, wenn man an Stelle der parallaktisch nachgeführten Astrographen stationäre Kameras verwendet. Während bekanntlich die Lichtstärke im ersten Fall proportional dem Quadrat des Durchmessers  $D$  der freien Öffnung ist, ist sie im zweiten Fall überdies verkehrt proportional der Brennweite  $f$ . Mit Handkameras, die Objektive größerer Lichtstärke haben, können noch die Spuren von Sternen 5. Größe aufgenommen werden, wenn diese im Himmelsäquator liegen. Haben sie Deklinationen von  $65^\circ$  bzw.  $80^\circ$ , so erreicht man sogar je um eine Größenklasse mehr. Mit einer Kamera:  $D = 200$  mm,  $f = 1000$  mm, können Sterne je nach ihrer Deklination von etwa 7. bis 9. Größe aufgenommen werden. (Mit demselben Gerät erreicht man bei parallaktischer Nachführung und einer Belichtungszeit von 2 bis 3 Minuten sicher 10. Größe.) Es sollen möglichst zeitlos nach dem erfolgten Lichtblitz die Sternspuren unterbrochen werden (z. B. Verwendung des Photomultiplikators [5]).

### C. Einflüsse der Atmosphäre

#### a) Refraktion

Methoden zur photographischen Bestimmung der Koordinaten eines Sternes aus Sternen deren Örter bekannt sind (Anhaltsterne), sind in der Literatur weitgehend behandelt und auf vielen mit Astrographen ausgestatteten Sternwarten wurden und werden großangelegte Bestimmungen von Sternörtern durchgeführt. Die Refraktion geht dabei nur differenziell in die Berechnung ein.

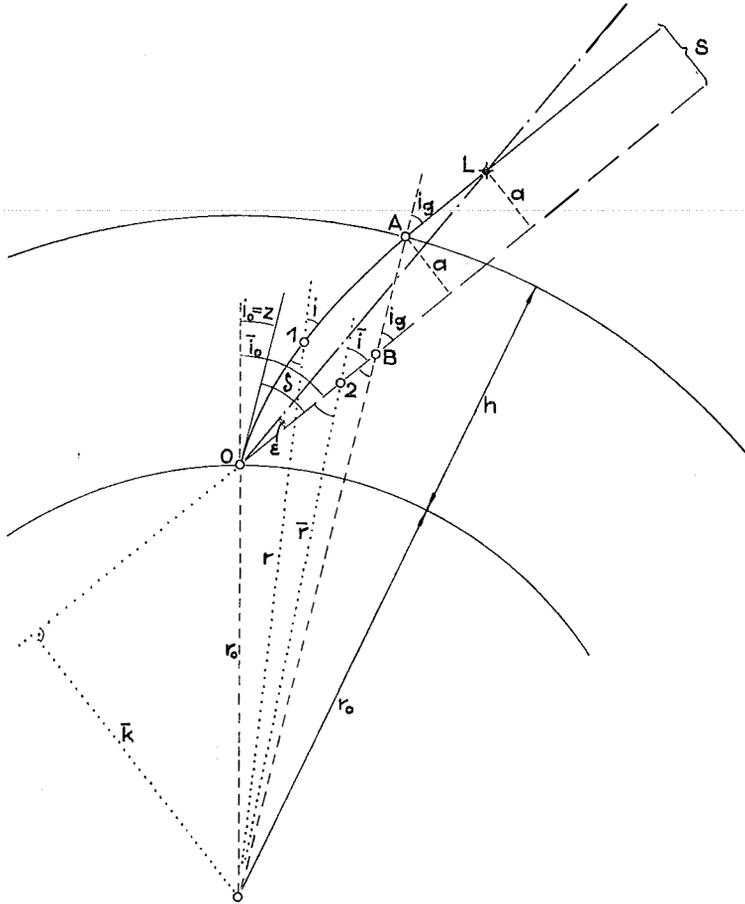


Abb. 1

Wäre der Lichtblitz ebenso wie die Sterne praktisch unendlich fern, so würde das Koordinieren des Lichtblitzes mit der Bestimmung eines Sternortes vollkommen identisch sein. Würde der spezielle Fall eintreten, daß das Bild des unendlich fernen Lichtblitzes mit einem Anhaltstern zusammenfällt, so würde der Einfluß der Refraktion Null sein, und zwar auch dann, wenn die Refraktion zur Zeit der Beobachtung eine beliebige unbekannte Größe aufweist; denn der Lichtblitz würde so dann mit Recht die Koordinaten dieses Anhaltsternes erhalten.

Die Frage, welche Wirkung die Refraktion hat, wenn der Lichtblitz eine endliche Entfernung aufweist, ist für unser Verfahren spezifisch und wird daher in den

folgenden Zeilen behandelt. Befindet sich der Lichtblitz in endlicher Entfernung, so kann derselbe mit einem Stern zusammenfallend erscheinen (Abb. 1). Der Lichtblitz  $L$  hat aber sodann Koordinaten, die mit den Koordinaten des Sternes  $S$  nicht identisch, sondern infolge des Winkels  $\epsilon$  verfälscht sind. Zur Bestimmung von  $\epsilon$  berechnen wir zunächst den Abstand  $a$  zwischen dem Lichtstrahl außerhalb der Atmosphäre und der durch den Standpunkt gehenden, dazu parallelen und somit auch durch  $S$  gehenden Geraden. Wir wenden dazu die bekannte Invariantenbeziehung an:

$$n r \sin i = k \quad \dots\dots (1)$$

die besagt, daß für jeden Punkt des Lichtstrahls das Produkt aus Brechungsindex  $n$ , Entfernung  $r$  vom Erdmittelpunkt und Sinus des Einfallswinkels  $i$  konstant ist.

Wir denken uns, es gäbe eine Strahlung, die ungebrochen durch die Atmosphäre geht und sich außerdem wie sichtbares Licht bündeln läßt. Für diese ist  $n = 1$ . Wenn wir für diese fingierte Strahlung die entsprechenden Größen in Gleichung (1) mit Querstrich versehen, folgt:

$$\bar{r} \sin \bar{i} = \bar{k} \quad \dots\dots (1a)$$

das ist die Gleichung einer Geraden, die den Normalabstand  $\bar{k}$  vom Erdmittelpunkt aufweist. Die Gleichung dieser Geraden kann man auch ohne an eine fingierte Strahlung zu denken, unmittelbar aus der Abb. 1 ersehen. Die Punkte 1 und 2 sind laufende Punkte des tatsächlichen und des fingierten Strahles. Bedeutet  $h$  die Höhe der wirksamen Atmosphäre;  $i_o$ ,  $\bar{i}_o$  und  $n_o$  die Einfallswinkel bzw. den Brechungsindex im Standpunkt,  $i_g$  den Einfallswinkel an der Grenze der Atmosphäre (in  $A$  und  $B$  gleich groß,  $n = 1$ ), so ergibt die Anwendung der Gleichungen (1) und (1a) für die Punkte:  $A$  und Standpunkt bzw.  $B$  und Standpunkt:

$$\begin{aligned} (r_o + h + \overline{AB}) \sin i_g &= n_o r_o \sin i_o \\ (r_o + h) \sin i_g &= r_o \sin \bar{i}_o \end{aligned}$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\overline{AB} \sin i_g = r_o (n_o \sin i_o - \sin \bar{i}_o)$$

Da  $a = \overline{AB} \sin i_g$  ist und  $\bar{i}_o - i_o =$  Refraktionswinkel  $\delta$  ist, folgt:

$$a = r_o (n_o \sin i_o - \sin [i_o + \delta])$$

$i_o =$  scheinbare Zenitdistanz  $z$ , somit ist:

$$a = r_o (n_o \sin z - \sin [z + \delta]) \quad \dots\dots (2)$$

Da  $a$  gegenüber  $r_o$  klein ist, muß dies auch für die in Klammer stehende Differenz gelten. Soll  $a$  auf wenige Dezimeter genau berechnet werden, so muß die genannte Differenz auf sieben Dezimalstellen genau sein und somit müssen bei gewählten Werten  $z$  und  $n_o$  die zugeordneten  $\delta$  hinreichend genau bekannt sein. Um einander zugeordnete Werte zu finden, gehen wir von der Refraktionskonstanten  $\alpha$  bei einer Lufttemperatur von  $0^\circ$  C und einem Luftdruck von 760 Torr aus. Definitionsgemäß ist

$$\alpha = \frac{c\rho_o}{1 + 2c\rho_o} \quad \dots\dots (3)$$

wobei  $\rho_o$  die optische Luftdichte bei  $0^{\circ}$  C und 760 Torr und  $c$  eine Konstante bedeutet (siehe z. B. *L. de Ball*, Lehrb. d. sphär. Astronomie 1912, S. 216). Zwischen dem Brechungsindex  $n$  und der optischen Luftdichte  $\rho$  besteht bekanntlich die Beziehung

$$n^2 - 1 = 2c\rho \quad \dots\dots (4)$$

somit folgt

$$\alpha = \frac{n_o^2 - 1}{2n_o^2}$$

Daraus ergibt sich

$$n_o = (1 - 2\alpha)^{-1/2} = 1 + \alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 \quad \dots\dots (5)$$

mit der Refraktionskonstanten  $\alpha'' = 60,154''$ ;  $\widehat{\alpha} = 0,00029163$  ergibt sich aus Gleichung (5):  $n_o = 1,0002917$ .

Unter Verwendung dieser Refraktionskonstanten sind die mittleren Refraktionen  $\delta_m$  in den Refraktionstabellen mit den scheinbaren Zenitdistanzen  $z$  als Argument dargestellt. Die Werte  $\delta_m$  für  $30^{\circ}$ ,  $40^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ,  $70^{\circ}$  ( $0^{\circ}$  C und 760 Torr) sind aus dem Berliner Astr. Jahrb. 1959 in Tabelle 1 angeführt. Der Abstand  $a$  wurde nach Gleichung (2) mit siebenstelligen trigonometrischen Tabellen für  $r_o = 6,370$  km berechnet.

Tabelle 1

$z$	$\delta_m$	$a$
$30^{\circ}$	$34,69''$	1,3 m
$40^{\circ}$	$50,40''$	1,9 m
$50^{\circ}$	$71,51''$	3,8 m
$60^{\circ}$	$103,76''$	7,7 m
$70^{\circ}$	$163,78''$	17,9 m

Nennt man die Entfernung:  $\overline{OL} = s$  (Abb. 1), so ist

$$\varepsilon = 206265'' \frac{a}{s} \quad \dots\dots (6)$$

Nach dieser Gleichung wurde unter Verwendung der Tabelle 1 die folgende Tabelle 2 berechnet, die die Entfernungen  $s$  in km und die  $\varepsilon$ -Werte in Sekunden darstellt.

Tabelle 2

$z \setminus s$	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
$30^{\circ}$	$0,27''$	$0,18''$	$0,14''$	$0,11''$	$0,09''$	$0,08''$	$0,07''$
$40^{\circ}$	0,39	0,26	0,20	0,16	0,13	0,11	0,10
$50^{\circ}$	0,78	0,52	0,39	0,31	0,26	0,22	0,20
$60^{\circ}$	1,59	1,06	0,80	0,64	0,53	0,46	0,40
$70^{\circ}$	3,69	2,39	1,85	1,48	1,23	1,05	0,92

Herrscht im Beobachtungsort eine von  $0^{\circ}$  C verschiedene Lufttemperatur und ein von 760 Torr verschiedener Luftdruck, so können bekanntlich mit Hilfe der Refraktionstabellen die jeweiligen  $\delta$ -Werte berechnet werden. Damit können auch die zugeordneten  $a$ - und  $\varepsilon$ -Werte, wie angeführt wurde, berechnet werden.

Nimmt man z. B. an, daß die Berechnung der jeweiligen  $\epsilon$ -Werte auf 5% genau erfolgen kann, so sind die in der Tabelle 2 angeführten Werte durch 20 zu dividieren, um den infolge endlicher Entfernung des Lichtblitzes entstehenden Fehler zu erhalten.

Eine unabhängige Überprüfung bzw. Verbesserung der Refraktionstafel-Werte für die jeweilige photographische Beobachtungszeit kann durch meteorologische Messungen mittels Radiosonden erfolgen. Diese Messungen müssen möglichst gleichzeitig mit den photographischen Beobachtungen geschehen. Kurz danach können mittels Raketen Natriumwolken erzeugt werden, deren Spektren aufschlußreich sein dürften. Insbesondere wird die Ermittlung von Temperaturfeldern gute Dienste leisten.

In obigen Zeilen wurde stillschweigend monochromatisches Licht vorausgesetzt, und zwar Licht von der Wellenlänge  $\lambda = 570 \text{ m}\mu$ . Dieses  $\lambda$  entspricht dem Intensitätsmaximum des für visuelle Beobachtung wirksamen Strahlenbereichs. Das Intensitätsmaximum für photographische Beobachtungen liegt jedoch bei  $\lambda = 430 \text{ m}\mu$ . Die photographische Refraktionskonstante  $\beta$  ist größer als die visuelle Refraktionskonstante  $\alpha$ ; denn grüne Strahlen werden weniger gebrochen als blaue.

$$\beta = 1,0155 \alpha \quad \dots\dots (7)$$

Der Faktor: 1,0155 gilt zur Zeit als bester Wert [4] [10].

Der Unterschied der Intensitätsmaxima hat nur einen unbedeutenden Einfluß auf die Größe der Distanz  $a$ . Dies kann durch numerische Rechnung erkannt werden (Verwendung von  $\beta$  und den mit obigem Faktor multiplizierten, aus der Refraktions-tafel entnommenen  $\delta_m$ -Werten) oder einfacher durch Umformung der Gleichung (2):

$$\begin{aligned} a &= r_o (n_o \sin z - \sin z \cos \delta - \cos z \sin \delta) \\ a &\doteq r_o [(n_o - 1] \sin z - \delta \cos z) \end{aligned}$$

und wegen Gleichung (5) ist:

$$a \doteq r_o (\alpha \sin z - \delta \cos z) \quad \dots\dots (2a)$$

multipliziert man  $\alpha$  und  $\delta$  mit einem beliebigen Faktor, so bleibt  $a$  ungeändert.

Da die Sterne verschiedene, aber bekannte Farben und somit bekannte photographisch wirksame  $\lambda$ -Bereiche aufweisen, kann dies bei der Berechnung des oben erwähnten differenziellen Refraktionseinflusses berücksichtigt werden. Die dabei entstehenden Fehler können höchstens wenige 0,01'' betragen, denn die atmosphärische Dispersion für den Wellenlängenbereich 0,560  $\text{m}\mu$  bis 0,400  $\text{m}\mu$  ist nur etwa  $1/65$  der Refraktion.

Bei dem behandelten Verfahren sind die vorkommenden Lateralrefraktionen viel kleiner als bei terrestrischen Messungen; denn die Zenitdistanzen sind bei ersterem Verfahren kleiner. Das Auftreten einer meßbaren Saalrefraktion (Schichtung der Atmosphäre beim Übergang vom Beobachtungsraum ins Freie) kann auf bekannte Weise vermieden werden.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde erwähnt, daß bei der Berechnung der Sternörter aus Anhaltsternen nur differenzielle Refraktionseinflüsse vorkommen. Die Größe dieser wollen wir noch abschätzen: dazu genügt es anzunehmen, daß die Refraktion durch die Beziehung bestimmt ist:

$$\delta_m = \beta \tan z \quad \dots\dots (8)$$

Ist zur Zeit der photographischen Beobachtung  $\beta$  bis auf einen kleinen Fehler  $\Delta\beta$  fehlerhaft, so wird auch  $\delta_m$  um einen Betrag  $\Delta\delta$  fehlerhaft. Praktisch vorkommende Werte von  $\Delta\beta$  ergeben sich, wenn man die durch Messungen bestimmten Refraktionen mit den berechneten vergleicht, z. B. ist nach *Bessel*, Abhandl. I. Bd. (1875) S. 237:

$$z = \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 65^\circ \quad 70^\circ \quad 75^\circ$$

$$\text{mitt. F.} = \pm 0,40 \quad 0,50 \quad 0,55 \quad 0,68 \quad 0,98$$

In der Tabelle von Bessel sind die wahrsch. F. angegeben. Die mittl. F. wurden daraus berechnet (Division durch 0,675). Damit bei größeren Zenitdistanzen mittlere Fehler von obiger Größe entstehen, muß  $\Delta\beta$  etwa  $\pm 0,25''$  sein. Wäre z. B. zur Zeit einer photographischen Beobachtung:

$$\beta = 61,09 \text{ richtige Refr.-Konst.}$$

$$\beta' = 61,34 \text{ fehlerhafte Refr.-Konst.,}$$

so kann man nach Gleichung (8) mit  $\beta$  und  $\beta'$  die Refraktionsdifferenzen für die Zenitdistanzen  $70^\circ$  und  $72^\circ$  berechnen:  $20,173''$  bzw.  $20,255''$ . Ihre Differenz =  $0,08''$  ist der Fehler infolge des Fehlers in  $\beta$ . Da angenommen werden kann, daß etwa 10 bis 50 Anhaltsterne auf jedem Bild vorhanden sind, so wird der Einfluß der Refraktion nur wenige  $0,01''$  betragen. Ist die Zenitdistanz sowie ihre Differenz kleiner als  $70^\circ$  bzw.  $2^\circ$ , so werden die Einflüsse der Refraktion abermals kleiner.

#### b) Bewölkung

Das Verfahren kann nur dann angewandt werden, wenn im ganzen großräumigen Vermessungsgebiet der Himmel nicht bewölkt ist. Eine Bedingung, die für bestimmte große Teile der Erde nur sehr selten bzw. überhaupt nicht erfüllt ist. Welche Möglichkeiten zur Durchführung des Verfahrens bestehen, beantwortet die synoptische Wetterkunde. Diese beschäftigt sich mit der in Großgebieten der Erde gleichzeitig bestehenden Wetterlagen und stellt diese in Wetterkarten dar. Zu den Wetterbeobachtungen gehört auch die Bewölkung. Die statistische Darstellung der Bewölkungsverhältnisse geschieht in Weltkarten, indem man die Punkte gleicher mittlerer jährlicher Bewölkung miteinander verbindet (Isonephen). Für viele Punkte der Erde ist auch das Ausmaß der Bewölkung im Laufe einzelner Jahre graphisch dargestellt (*Köppen*, Grundriß d. Klimakunde). Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die geographische Verteilung der Bewölkung auf der Erde wesentlich durch die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre bedingt ist. In den Hochdruckgebieten der Roßbreiten (etwa  $30^\circ$  N und S Br.) besteht das Minimum der Bewölkung.

Es gibt drei Gürtel starker Bewölkung, nämlich der äquatoriale Kalmengürtel (10° N bis 10° S) und die Gürtel 50° N bis 65° N und 45° S bis 60° S. Die Bewölkung im Kalmengürtel entspricht etwa der Bewölkung in den Breiten 55° N und 45° S.

Messungen mit Geräten, die elektromagnetische Wellen größerer Wellenlängen verwenden, können zwar auch bei Bewölkung ausgeführt werden, damit erreicht man aber kaum die Genauigkeit, die schon mit einfachen optischen Geräten erreicht wird. Refraktionen dieser Wellen in der Ionosphäre (von 70 bis 650 km Höhe) ergeben nämlich besonders bei kleinen Frequenzen ( $\lambda = 10$  bis 15 m) und größeren Zenitdistanzen erhebliche Fehler.\*) Es sind Verfahren mit Satellitensendern und Radarmethoden in Verwendung [6a] [8] [11]. Untersuchungen über Refraktionen in der Ionosphäre sowie über Verfahren zur Entfernungsmessung mit Dezimeterwellen werden weitgehend betrieben. Wenn es gelänge, die Richtungsmessungen durch hinreichend genaue Streckenmessungen zu ersetzen, so könnte auch allein mit diesen die gegenseitige Lage der Stationspunkte bestimmt werden. Ihre gegenseitige Sicht sowie die Lotrichtung wäre auch in diesem Fall nicht erforderlich. Denn es läßt sich analog den unter B) b) erwähnten Orientierungsaufgaben zeigen, daß bei 6 Stationen und 4 Hochzielen sowie bei 5 Stationen und 5 Hochzielen eine geometrisch bestimmte bzw. überbestimmte Aufgabe entsteht.

In vorliegender Arbeit wurden nur die durch atmosphärische Refraktion und Dispersion hervorgerufenen Fehler untersucht. In einer folgenden Arbeit werden die Instrumental-, inklusive der durch die Photographie verursachten Fehler behandelt und eine analytische Lösung der erwähnten Orientierungsaufgabe mit 3 Strahlenbündeln wird angegeben.

#### **D. Zusammenfassung und Folgerungen**

Das behandelte Verfahren hat folgende Eigenschaften:

a) So wie alle anderen Verfahren der Sterntriangulation ist auch dieses praktisch unabhängig von der Lotrichtung (nur zur Berechnung der Refraktionseinflüsse ist diese auf einige Minuten genau notwendig).

b) Die Stationspunkte brauchen nicht gegenseitig sichtbar sein.

c) Die terrestrische Refraktion fällt weg. An ihre Stelle treten nur differenzielle Einflüsse der atmosphärischen Refraktion, gebildet aus verhältnismäßig kleinen Zenitdistanzen. Bei Berechnung jener kann die endliche Entfernung des Lichtblitzes sowie die verschiedenen Farben der Sterne berücksichtigt werden. Die Lateralrefraktion ist wegen den verhältnismäßig kleinen Zenitdistanzen sehr klein.

d) Es ist ein rein geometrisches Verfahren.

Nach dem behandelten Verfahren wird die Gestalt der Erde aus Sternkoordinaten bestimmt. Längenmessungen dienen nur zur Bestimmung des Maßstabes. Das Verfahren gehört somit in das Gebiet der astronomischen Geodäsie und wegen a) gehört es ferner in das Gebiet der sog. „Dreidimensionalen Geodäsie“ bei der bekanntlich Horizontal- und Vertikalwinkel, also die Lotrichtung nicht in die Berechnung der Koordinaten der Triangulierungspunkte eingeht.

Wegen b) und c) können Großräume und Ozeane überbrückt werden.

---

\*) Messungen mit großen Frequenzen sind wetterabhängig.

Wegen d) kann das Verfahren keinen Aufschluß über physikalische Eigenschaften der Erde geben. Es kann z. B. zum Unterschied von den Satellittriangulationen, den Schwerpunkt der Erde nicht erschließen. Aber es kann Messungen, die mit Hypothesen behaftet sind, kontrollieren und ferner kann es, in Verbindung mit einfachen Hypothesen weiteren, auf andere Weise gefundenen Ergebnissen gegenübergestellt werden.

Es können durchgreifende Kontrollen bestehender Triangulationen erfolgen, z. B. Vergleich der etwa einige 1000 km langen berechneten Entfernung derselben zwei Triangulierungspunkte.

Werden die Lotrichtungen (Tangenten an Lotlinien) in den Stationspunkten mit Libellen bestimmt, so sind damit alle Winkel dieser Lotrichtungen mit den entsprechenden Polyederseiten gegeben. Trägt man die Meereshöhen (durch Nivellement und Schweremessung bestimmt und daher nur in dieser Hinsicht hypothesenbehaftet) auf den Lotlinien ab, so bekommt man die den Stationspunkten zugeordneten Punkte des Geoids.

Das behandelte Verfahren dürfte von den bekannten Verfahren der Stellartriangulation weder in bezug auf Einfachheit noch in bezug auf Genauigkeit erreicht werden können.

#### Literatur:

[1] *Berroth, A.*: Über kosmische Triangulationsmethoden zur praktischen Anwendung in der Geodäsie, ZfV 1949, Heft 2.

[2] *Berroth, A. und Hofmann, W.*: Kosmische Geodäsie, Karlsruhe 1960.

[3] *Hopmann, J.*: Über die gravimetrische und astronomische Bestimmung von Lotabweichungen und ihre Auswirkung auf trigonometrische Netze, in Beiträge zur astronom-Geodäsie, Veröffentlich. d. Inst. f. Erdmessung, Heft 12.

[4] *König, A.*: Reduktion photogr. Himmelsaufnahmen, Handb. d. Astrophysik, Bd. 1, Teil 1 (1933).

[5] *Kukkamäki, T. J.*: Stellar-Triangulation, Bulletin Géodésique Nouvelle Série, Nr. 54, (1959).

[6] *Ledersteger, K.*: a) Astronomische und physikalische Geodäsie, Jordan-Eggert-Kneissl, Handb. d. Verm. Kunde, 10. Aufl. Bd. V. b) Die geodätischen Probleme der künstlichen Satelliten, Schweiz. Z. f. Verm., Kulturtechn. u. Photogrammetrie, 1962, Hefte 3, 5, 6.

[7] *Markowitz, W.*: Geocentric Coordinates from Lunar and Satellite Observations, Bull. géod. Nr. 49, 1958.

[8] *Priester, W. und Hergenahn, G.*: Bahnbestimmung von Erdsatelliten aus Doppler-Effekt-Messungen, Wiss. Abh. d. Arbeitsgemeinschaft. f. Forschung d. Landes Nordrhein-Westfalen, Bd. 8.

[9] *Sandig, H.-U.*: a) Die Expedition des deutschen geodät. Forschungsinstitutes nach Südnorwegen 1954, Deutsche geod. Kommission Reihe B/34. b) Verfahren der kosmischen Triangulation, Wiss. Z. d. TH Dresden, 1956/57.

[10] *Schaub, W.*: Vorlesungen über sphärische Astronomie 1950.

[11] *Sigl, R.*: Die Bedeutung künstlicher Erdsatelliten für die Geodäsie. ZfV 1961, Heft 8.

[12] *Väisälä, Y.*: a) Maan toinen kuu, Tähtitaivas Nr. 6, Turku 1946. b) An Astronomical Method of Triangulation, Sitzungsbericht d. Finn. Akad. d. Wiss. 1946.

*Väisälä, Y. und Oterma:* c) Anwendung der astronomischen Triangulationsmethode, Helsinki 1960.

[13] US Department of Commerce: Satellite Triangulation, Washington 1962.