Beiträge zur Potentialtheorie

Godfried Oliwa [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (3), S. 91–96

1962


```
@ARTICLE{Oliwa_VGI_196214,
Title = {Beitr{\"a}ge zur Potentialtheorie},
Author = {Oliwa, Godfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {91--96},
Number = {3},
Year = {1962},
Volume = {50}
}
```

Beiträge zur Potentialtheorie

Von *Godfried Oliwa*, Wien

a) *Ein Satz von Callendreau*

In der Theorie der heterogenen, rotationssymmetrischen Gleichgewichtsfiguren werden die inneren Niveauflächen N durch den zugehörigen Äquatorradius t gekennzeichnet, der zwischen 0 und 1 variiert. Die Abplattung a einer inneren Niveaufläche wird als Funktion des entsprechenden t eingeführt. Ist die Dichte ρ eine stetige Funktion von t, so wird der Zusammenhang zwischen $\rho\,(t)$ und $a\,(t)$ der Niveaufläche $N\,(t)$ durch die Differentialgleichung von Clairaut (in der einfachen Form)

$$2\,D'a + 6\,\rho a' + t\,D a'' = 0 \qquad \ldots (1)$$

geliefert.

Der Akzent $'$ bedeutet die Ableitung nach t. D ist die mittlere Dichte der Kugel vom Radius t. Für die mittlere Dichte ergibt sich somit

$$D\,t^3 = \int_0^t \rho\,(t)\,d\,t^3 \qquad \ldots (2)$$

und daraus $\rho = D + \dfrac{1}{3}\,t\,D'$ $\qquad \ldots (3)$

(1) geht durch die berühmte Transformation von Radau

$$t\,\frac{a'}{a} = \eta \qquad \ldots (4a)$$

$$t\,\frac{D'}{D} = G \qquad \ldots (4b)$$

in die Form

$$t\,\eta' = -\eta\,(\eta + 5) - 2\,G\,(1 + \eta) \qquad \ldots (5)$$

über. Durch nochmalige Differentiation nach t ergibt sich

$$t\,\eta'' = -2\,\eta'\,(3 + \eta + G) - 2\,G'\,(1 + \eta) \qquad \ldots (6)$$

(Diese Beziehung wird im Folgenden Verwendung finden.)

Aus Stabilitätsgründen wird in der klassischen Theorie

$$D' < 0 \text{ und } 0 < \rho\,(t) < \infty \qquad \ldots (7)$$

im abgeschlossenen Intervall $T\,(0 \leqq t \leqq 1)$ vorausgesetzt. Daraus folgt unmittelbar mit (3) und (4b)

$$G = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right) < 0 \qquad \ldots (8)$$

Weiterhin wird angenommen, daß in T

$$0 < a\,(t) < \infty \qquad \ldots (9)$$

ist.

Callendreau zeigte:

Ist in T ρ' und ρ'' stets negativ, so ist η' in T stets positiv. Es kann allgemeiner gezeigt werden:

Ist in T G und G' stets negativ, so ist η' in T stets positiv. Der Beweis ist dem von Callendreau analog.

Da nach (7) $D' < 0$ ist, so ist im Mittelpunkt $t = 0$: $\eta(0) = 0$, . . . (10)
was sich aus (4a) und (9) direkt folgern läßt.

Für $t = 0$ ergibt sich aus (1): $2D(0)\,a(0) - 6\,\rho(0)\,a'(0) = 0$. Da $a(0)$, $\rho(0)$ positiv und $D'(0)$ negativ ist, folgt, daß $a'(0)$ positiv ist. Differenziert man (4a) nach t, so ist

$$\eta' = \frac{a'}{a} + t\,\frac{a''\,a - a'^2}{a^2}$$

und für $t = 0$ folgt, weil $a'(0)$ positiv ist, $\eta'(0) > 0$ . . . (11)

Es bleibt noch zu beweisen, daß im Intervall T stets $\eta(t) > 0$ . . . (12)
ist. Dies ergibt sich leicht durch indirekten Schluß.

Wäre $\eta(t)$ ab einem t^* negativ, also $\eta(t^*) = 0$, so wählt man t_1 und t_2 so, daß $0 \leqq t_1 < t^* < t_2 \leqq 1$ ist. Damit ist $t_1 - t_2$ negativ. Da $\eta(t)$ von 0 bis t^* wegen (10) und (11) und aus Stetigkeitsgründen positiv sein muß, ist $\eta(t_1) > \eta(t_2)$. Nun ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$0 < \eta(t_1) - \eta(t_2) = \eta'(\bar{t})\,(t_1 - t_2)$$

$\eta'(\bar{t})$ müßte negativ sein; dies ist jedoch unmöglich, weil nach (5) für $\eta(t^*) = 0$: $t^*\,\eta'(t^*) = -2G > 0$ wegen (8) sein muß. Durch geeignete Wahl von t_1 und t_2 kann sicher erreicht werden, daß $\bar{t} = t^*$ ist.

Nun kann der eigentliche Beweis des Satzes durch einen indirekten Schluß geliefert werden.

Angenommen, es würde $\eta'(t)$ ab einem bestimmten t^0 negativ werden, dann müßte in t^0 ein Maximum von $\eta'(t)$ auftreten, d. h. $\eta''(t^0)$ müßte negativ sein; wäre also $\eta'(t^0) = 0$, so würde mit (6)

$$t^0\,\eta''(t^0) = -2G'(1 + \eta) > 0$$

folgen, weil $\eta(t)$ in T stets positiv ist und G' als negativ vorausgesetzt wurde. Es müßte demnach nicht ein Maximum in t^0, sondern ein Minimum existieren, was widersprüchlich ist.

Daß die Voraussetzungen, G und G' negativ, weiter als die von Callendreau sind, sieht man sofort. Aus (8) ergibt sich durch Differentiation nach t:

$$G = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right)$$

$$G' = \frac{3}{D}\left(\rho' - \frac{\rho}{t}\,G\right)$$

Die Voraussetzung $\rho' < 0$ wird durch $G < 0$ oder $\rho < D$ und $\rho'' < 0$ durch $G' < 0$, d. h. $\rho' < \frac{\rho}{t}\,G$ ersetzt.

Die zweimalige Differnzierbarkeit von ρ wird nicht vorausgesetzt.

Bedeutet $\rho' < 0$ eine monotone Dichteabnahme vom Schwerpunkt zur Oberfläche hin, so läßt sich die Voraussetzung, daß nur $G < 0$ und damit $\rho < D$ zu sein braucht, eine mögliche stellenweise Dichtezunahme (im selben Sinn) zu. Aus (2) folgt durch partielle Integration

$$(\rho - D)\,t^3 = \int_{\rho^0}^{\rho} t^3\,\rho'\,dt \qquad . . . (13)$$

Soll $\rho < D$ sein, so braucht nur der Wert des Integrals in (13) negativ sein. Ist z. B. $\rho = \lambda\,(t - \alpha)^2$, wo $\lambda = \text{const} \neq 0$, so muß nur $\alpha > \frac{4}{5}$ sein, damit diese Bedingung erfüllt wird.

Auf irdische Verhältnisse (Oberflächendichte = 2, 7, α = 0,81) angewandt, ergibt dieses abwegige — hier jedoch denkbare — Dichtegesetz, durch seinen streng parabolischen Verlauf bedingt, eine Dichteabnahme von der Oberfläche bis zu einer Tiefe von 1212 km, wo die Dichte 0 wird; ab dieser Stelle wächst die Dichte zum Schwerpunkt hin, wo sie ihren größten Wert mit 49,1 erreicht.

b) Über Kugelfunktionsentwicklungen

Bekanntlich werden in der Geodäsie bei der Behandlung potentialtheoretischer Probleme vorzugsweise Entwicklungen nach Kugelfunktionen verwendet. Im Hinblick auf verschiedene Konvergenzbetrachtungen der Kugelfunktionsentwicklung erfahren sie durch diese Methode des öfteren beträchtliche Einschränkungen.

Im folgenden soll dies an einem bekannten Beispiel gezeigt werden. Nach einem Satz von Mac Laurin übt speziell ein homogenes Rotationsellipsoid auf einen äußeren Punkt dieselbe Anziehung aus, wie ein zu diesem konfokales gleicher Masse. Dies gilt auch, wenn das Ellipsoid in den doppelt überdeckten Fokalkreis ausartet.

Entwickelt man dagegen das Potential eines homogenen Rotationsellipsoides im Außenraum nach durchwegs reellen Kugelfunktionen erster Art, so kann man aus dieser Potentialdarstellung allein schließen, daß dieses Ellipsoid auf einen äußeren Punkt nur dann dieselbe Anziehung wie ein konfokales gleicher Masse ausübt, wenn beide die Fokalkugel ganz enthalten.

Dies läßt sich einfach zeigen:

Es liege im Raum ein Koordinatensystem 0 (x, y, z) vor, Der Ursprung 0 liege im Schwerpunkt einer endlichen Masse M. Dann kann bekanntlich [1] die Potentialfunktion V von M außerhalb der kleinsten, die Masse gerade noch einschließenden Kugel (deren Radius l_0 ist) nach Kugelfunktionen

$$V = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{n+1} V_n\,(\vartheta, \lambda)$$

entwickelt werden. V_n ist die allgemeinste Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung in räumlichen Polarkoordinaten, die im Reellen auf einer Kugel eindeutig ist. Sie ergibt sich mit

$$V_n = \sum_{\nu=0}^{n} ({}_cV_{n\nu} \cos \nu\lambda + {}_sV_{n\nu} \sin \nu\lambda)\; P_{n\nu}\,(\cos \vartheta)$$

Hiebei sind ϑ und λ Poldistanz und Länge des Aufpunktes (in geozentrischen Koordinaten), l der Abstand des Aufpunktes vom anziehenden Massenpunkt; die $P_{n\nu}$ ($\cos \vartheta$) sind die zugeordneten Kugelfunktionen erster Art und ${}_cV_{n\nu}$ und ${}_sV_{n\nu}$ sind die Zahlenkoeffizienten. Die zugeordneten Kugelfunktionen erster Art haben die Form [2]

$$P_{n\nu}\,(\cos \vartheta) = i^{\nu} \sin^{\nu}\vartheta \left[\cos^{n-\nu} \vartheta - \frac{(n-\nu)\,(n-\nu-1)}{2\,(2\,n-1)} \cos^{n-\nu-2} \vartheta + \ldots\right],$$

worin $i^2 = -1$ ist.

Wenn ν ungerade ist, ergibt der Faktor i^ν im Resultat nichts Komplexes, sobald ${}_cV_{n\nu}$, ${}_sV_{n\nu}$ als rein imaginäre Werte angesetzt werden. Dies zeigt ausdrücklich, daß die Kugelfunktionsentwicklung das reelle Ergebnis im allgemeinen über das Komplexe erreicht.

Wenn jedoch der Rand der Masse M und die Massenanordnung im Körper rotationssymmetrisch zur z-Achse ist, so ist die Entwicklung von λ unabhängig. Im Ausdruck für V_n verschwinden dann alle Glieder mit $\nu > 0$. Da $\nu = 0$ ist, werden die nun auftretenden, zonalen Kugelfunktionen P_{no} stets reell sein und somit auch ${}_cV_{no}$. Das Potential wird in diesem speziellen Fall durch die durchwegs reelle Reihe

$$V = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{n+1} {}_cV_{no}\, P_{no} (\cos \vartheta)$$

dargestellt.

Kennt man das Potential V_p der Masse für einen Punkt P auf der positiven z-Achse in der Entfernung $l \geq l_0$ und ist dieses in eine konvergente Reihe der Form

$$V_p = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{n+1} A_n$$

entwickelbar, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich ${}_cV_{no} = A_n$. Die als bekannt vorausgesetzten A_n hängen nun von der Massenanordnung ab. Hat überdies die Masse die x-y-Ebene zur Symmetrieebene, so ist

$$V = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{2k+1} B_{2k}\, P_{2k,\,0} (\cos \vartheta)$$

Es ist leicht, aus der bekannten Formel für das Außenraum-Potential V_a eines abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoides [3] auf dem oben angeführten Weg eine durchwegs reelle Entwicklung nach Kugelfunktionen 1. Art zu erhalten. Für einen Punkt P der z-Achse ($x = y = 0$) möge $z = r \geq \max(e, c)$ und $\sigma = r^2 - c^2$ sein. Es ist somit

$$V_P = \frac{3}{2}\,\frac{M}{e}\left[\left(1 - \frac{r^2}{e^2}\right) \arctan \frac{e}{r} - \frac{r}{e}\right]$$

wenn e die lineare Exzentrizität $\sqrt{a^2 - c^2}$ bedeutet. Da somit stets $\frac{e}{r} < 1$ sein wird, kann der arctan in eine Taylorreihe entwickelt werden; es ergibt sich Helmert [4] und Jung [5]

$$V = \frac{3\,M}{r} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)} \left(\frac{e}{r}\right)^{2k} P_{2k,\,0} (\cos \vartheta) \qquad \ldots (1)$$

Bei stark abgeplatteten Ellipsoiden kann $e \geq c$ sein. Dieser Fall wurde in der Geodäsie nie in Betracht gezogen; er möge dennoch hier erörtert werden. $e \geq c$ heißt, daß die Fokalkugel auch Teile des massenfreien Raumes einschließt. Für diesen Raumteil ist (1), wie leicht einzusehen ist, nicht mehr gültig [1]. Denn z. B. für einen Punkt der z-Achse mit $c \leq r \leq e$ im Außenraum der Masse ist, da für $\vartheta = 0$ die zonale Kugelfunktion $P_{2k} (\cos 0) = 1$ wird, (1) nicht konvergent. Wäre nämlich

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)} \left(\frac{e}{r}\right)^{2k}$$

konvergent, so müßte notwendig

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \left(\frac{e}{r}\right)^{2k}$$

verschwinden. Es geht jedoch im Gegenteil

$$\lim_{k \to \bullet} \frac{e^{k\varphi}}{4k^2 + 8k + 3}$$

— wobei e hier die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet — über alle Grenzen, wenn das feste $\varphi > O$ ist. Dies folgt nach einer kleinen Umformung leicht, etwa durch Anwendung der Regel von De l'Hopital.

Da im Potentialausdruck (1) nur die Masse M und die lineare Exzentrizität e auftritt, geben alle konfokalen, massengleichen Ellipsoide für Punkte des Außenraumes das gleiche Potential. Nach dem obigen kann jedoch die Kugelfunktionsentwicklung (1) nur dann das Potential im gesamten Außenraum darstellen, wenn $c > e$ ist; das heißt, wenn die Fokalkugel ganz im Inneren der Ellipsoide liegt. Für Ellipsoide, die eine Abplattung α haben, die größer als $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, stellt der Ausdruck (1) nicht mehr das gesamte Außenraumpotential dar.

Somit wäre die Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoides auf einen äußeren Punkt nur dann dieselbe wie die eines konfokalen gleicher Masse, wenn dessen Abplattung kleiner als $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

Es zeigt sich also, daß nicht unbedingt allgemeingültige, physikalische Sätze aus Überlegungen abgeleitet werden können, denen Kugelfunktionsentwicklungen zugrunde liegen.

c) Über die analytische Fortsetzung des Potentials in das Innere anziehender Massen

Bekanntlich läßt sich das Außenraumpotential nur in speziellen Fällen in das Innere anziehender Massen analytisch fortsetzen. Dies ist nur dann möglich [6], wenn das Potential im Außenraum des Körpers als Potential einer geeigneten, flächenhaften Massenbelegung im Inneren des Körpers darstellbar ist. Die sich ergebenden singulären Stellen des Potentials werden durch die durch Masse belegte Fläche umschlossen.

Daraus ergibt sich jedoch *nicht*, daß im Inneren der anziehenden Körper singuläre Stellen der Außenraumpotentiale sein *müssen*.

Einige Gegenbeispiele mögen dies zeigen:

Eine konzentrische, homogene Kugelschale hat bekanntlich keine Singularitäten in der anziehenden Masse. Ähnlich verhält es sich mit einer homogenen, von ähnlichen konzentrischen Ellipsoiden begrenzten Schale, wenn nur das innere Ellipsoid die Fokalellipse ganz enthält.

Für eine heterogene Massenverteilung sei folgendes Beispiel angeführt [7]: Es sei der Raum zwischen zwei ähnlichen, konzentrischen Ellipsoiden mit der homogenen Masse von der Dichte k_o erfüllt; auf diese Masse werde mit dem Zentrum 0, das im gemeinsamen Mittelpunkt der Ellipsoide liegt, die Kelvin-Transformation angewendet. Das Potential W dieser so transformierten Masse im Außenraum ist $W = \frac{c}{\rho}$; denn dieser Außenraum ist die Transformierte des Hohlraumes innerhalb der Ellipsoidschale, in dem bekanntlich das Potential V einen konstanten Wert c hat. Die Masse zwischen den Ovaloiden hat die Dichte $k' = k_o \frac{R^4}{\rho^5}$, wobei R der Inversionsradius ist. Da W aber dieselbe Wirkung wie die im Mittelpunkt 0 konzentrierte Masse ausübt, so ist die analytische Fortsetzung im Inneren der Masse nie singulär, soferne die (im Plücker'schen Sinn verstandenen) Brennpunkte im Hohlraum der Ovaloidschale liegen.

Literatur:

[1] *Jung:* Figur der Erde, Seite 542—543.

[2] *Wangerin:* Potential, Band 2, Seite 54, Formel (4).

[3] *Wangerin:* Potential, Band 1, Seite 210, Formel (21).

[4] *Helmert:* Höhere Geodäsie, Band 2, Seite 125, Formel (8).

[5] *Jung:* Gerlands Beiträge, Band 29, Seite 346, Formel (1 a).

[6] *Herglotz, G.:* Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Masse, Leipzig 1914.

[7] *Wangerin, A.:* Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, II. Band, Seite 153—154.

Neuartige Stabilisierung von Polygonpunkten

Von *Ferdinand Eidherr*, Wien

Die Fortführung eines Vermessungswerkes ist aus vielen Gründen, im besonderen jedoch vom rechtlichen und wirtschaftlichen Standpunkt aus, von großer Bedeutung.

Grundsätzlich bezieht sich die Fortführung der Vermessungsoperate auf alle Gegenstände die anläßlich einer Vermessung in dieselben aufgenommen wurden. Dazu gehören vor allem die Änderungen an den Eigentumsmarken, die Straßen-, Wege- und Wasserbauanlagen, die Bauten und die Kulturänderungen. Durch das ständige Anwachsen von Siedlungen, der Neuschaffung von Industrieanlagen und die damit verbundene Erweiterung und Verbesserung der Verkehrswege, vor allem jedoch die allgemeine Erkenntnis, daß die *Vermessung Grundlage jeder Planung* ist, erwachsen den Behörden im Fortführungsdienst immer größere und schwierigere Arbeiten.

Neben der Fortführung der Grenzen, Gebäude, Kulturen usw. spielt jedoch die Erstellung und die Erhaltung der Vermessungsgrundlagen und die damit verbundene Überwachung der trigonometrischen Punkte, der Einschaltpunkte und der Polygonpunkte eine entscheidende Rolle.

Aus der Erfahrung, daß die Instandhaltung der Vermarkung aller Eigentumsgrenzen durch die große Anzahl der Grenzzeichen, die intensive mechanische Bewirtschaftung und vieler anderer Momente ein aussichtsloses Beginnen ist, hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß der Erhaltung des Festpunktnetzes mit wesentlich größerem Erfolg nachgekommen werden kann.

Für den Fortführungsdienst, dessen Arbeiten in der Mehrzahl aus Einzelfällen bestehen, wird daher die Sicherung des EP- und Polygonnetzes von ganz besonderer