

Paper-ID: VGI_196203



Zur Geometrie der Refraktion

Helmut Moritz ¹

¹ *Graz, Vogelweiderstraße 27*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (1), S. 3–13

1962

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Moritz_VGI_196203,  
  Title = {Zur Geometrie der Refraktion},  
  Author = {Moritz, Helmut},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {3--13},  
  Number = {1},  
  Year = {1962},  
  Volume = {50}  
}
```



Abteilungen für Vermessungswesen mit zwei Staatsprüfungen und der Berechtigung das Doktorat zu erwerben u. a. m. sind hauptsächlich seinen unermüdlichen Bemühungen zu verdanken. Dabei war *Doležals* wissenschaftliche Tätigkeit äußerst fruchtbringend. Die Vielzahl seiner Arbeiten erstrecken sich zum großen Teil auf die junge Wissenschaft der Photogrammetrie, deren große Bedeutung für das Vermessungswesen er frühzeitig erkannt hat. Durch die Gründung der Österreichischen und der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie sowie des Archivs für Photogrammetrie hat sich *Doležal* um die Entwicklung der jungen Wissenschaft hervorragende Verdienste erworben.

Er war aber auch ein gütiger und hilfreicher Mensch, an den sich seine Schüler in Nöten jederzeit wenden konnten.

Die österreichischen Vermessungsingenieure, darunter die zahlreichen ehemaligen Schüler, erinnern sich des vorbildlichen Lehrers und väterlichen Freundes an seinem 100. Geburtstag in dankbarem Gedenken.

Die Schriftleitung

Zur Geometrie der Refraktion

Von *Helmut Moritz*, Graz

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

1. Die Lichtstrahlen sind nicht nur das grundlegende Hilfsmittel für die geodätische Winkelmessung, sondern sie werden in neuerer Zeit auch für die Streckenmessung verwendet, ebenso wie die verwandten hochfrequenten elektrischen Wellen. Daher ist die Geometrie der Lichtstrahlen von hohem geodätischen Interesse. Wie man weiß, sind die Lichtstrahlen wegen des örtlich variablen Brechungsindex der Luft keine Geraden, sondern schwach gekrümmte Raumkurven. Bei der Winkelmessung mißt man Winkel zwischen diesen Raumkurven, statt zwischen Geraden, wie es sein sollte. Ebenso ist wegen der Krümmung der Lichtstrahlen und wegen der örtlich veränderlichen Lichtgeschwindigkeit die geradlinige Entfernung zweier Punkte nicht zur Laufzeit der Licht- (oder elektrischen) Welle proportional, die man bei den erwähnten neuen Streckenmeßverfahren mißt. In beiden Fällen ist daher eine Reduktion der gemessenen Größen auf die geradlinige Verbindung nötig. Es wird sich zeigen, daß dieser Übergang von den gemessenen Winkeln bzw. Laufzeiten zu den entsprechenden Winkeln und Strecken, die sich auf die geradlinige Verbindung beziehen, nichts anderes ist als eine dreidimensionale konforme Abbildung und daß die erwähnten Reduktionen das genaue dreidimensionale Analogon zur Richtungs- und Streckenreduktion bei der konformen Abbildung einer Fläche in die Ebene sind. Auf diese Art ist eine einheitliche Theorie aller geodätisch wichtigen Refraktionserscheinungen möglich.

2. Für die Ausbreitung der Lichtstrahlen und der hochfrequenten elektrischen Wellen gelten im wesentlichen dieselben Gesetze. Wenn wir daher kurz von Licht sprechen werden, meinen wir damit sinngemäß auch hochfrequente Radiowellen.

Der Weg des Lichtes zwischen zwei Punkten *A* und *B* wird durch das bekannte FERMATsche Prinzip bestimmt: er ist jener Weg, für den es die kürzeste Zeit braucht,

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = \text{Minimum.} \quad . . . (1)$$

Die jeweilige Lichtgeschwindigkeit v hängt mit der konstanten Vakuumlichtgeschwindigkeit c durch die Relation

$$v = \frac{c}{n}$$

zusammen, in der n den Brechungsindex bedeutet. Damit geht der Ausdruck (1) für T über in

$$T = \int_A^B \frac{n ds}{c} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds.$$

ds ist hiebei das gewöhnliche Weg- oder Bogenelement des Raumes:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Definieren wir nun durch

$$d\bar{s} = n ds = n \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad . . . (2)$$

das Element der „optischen Weglänge“, \bar{s} , so haben wir weiter

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B d\bar{s} = \frac{\bar{s}}{c}. \quad . . . (3)$$

Da c eine Konstante ist, ist daher die Minimumsbedingung (1) äquivalent mit

$$\bar{s} = \text{Minimum.} \quad . . . (4)$$

Diese optische Weglänge hat die Dimension einer Länge; aus (3) folgt sofort

$$\bar{s} = c T.$$

Man erhält sie also aus der gemessenen Laufzeit T durch einfache Multiplikation mit der konstanten Vakuumlichtgeschwindigkeit c . Die optische Weglänge kann daher bei bekanntem c als *direkt gemessen* betrachtet werden.

Stellen wir uns nun der Einfachheit halber vor, die Ausbreitung des Lichtes gehe nur in der xy -Ebene vor sich. Dann ist $dz = 0$ und

$$\begin{aligned} d\bar{s} &= n \sqrt{dx^2 + dy^2}, \\ d\bar{s}^2 &= n^2 (dx^2 + dy^2), \end{aligned} \quad . . . (5)$$

während das gewöhnliche Bogenelement der Ebene durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad . . . (6)$$

gegeben wird. Offenbar können wir $d\bar{s}$ (5) als Bogenelement in einem isothermen Koordinatensystem auf einer Fläche deuten (vgl. etwa [3], n entspricht der Größe $\frac{1}{m}$ bei *Hübner*). Durch die Bedingung $\bar{s} = \text{Min.}$ (4) wird eine kürzeste Verbindung auf dieser Fläche definiert, also eine *geodätische Linie*.

Die Bogenlänge dieser geodätischen Linie auf der Fläche, die geodätische Entfernung, ist die optische Weglänge, die wir, wie wir gerade gesehen haben, als direkt

gemessen betrachten dürfen. Die Aufgabe bei der Reduktion wegen Refraktion ist nun, aus dieser Meßgröße \bar{s} die gewöhnliche geradlinige Entfernung zweier Punkte A und B in der Ebene,

$$s = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

zu berechnen. Das Bogenelement der eben eingeführten Hilfsfläche — sie sei mit \bar{F} bezeichnet — wird, um es zu wiederholen, durch (5) gegeben, das entsprechende Bogenelement der Ebene — wir nennen sie F — durch (6). Die Fläche \bar{F} ist daher mit der Ebene F durch eine *konforme Abbildung* verbunden; der Übergang von der geodätischen Entfernung \bar{s} zur geradlinigen Entfernung s erfolgt durch die Streckenreduktion Δs der Abbildung:

$$\Delta s = \bar{s} - s.$$

Das ist aber genau die Reduktion der gemessenen optischen Weglänge \bar{s} wegen Refraktion.

Nun betrachten wir den Fall der Winkelmessung, uns ebenfalls zunächst auf die Ebene beschränkend. Was wir hier direkt messen, sind die Winkel zwischen Lichtstrahlen in der Ebene F . Diese Lichtstrahlen sind auf unserer Hilfsfläche, wie erwähnt, geodätische Linien, in der Ebene daher die Bildkurven dieser geodätischen Linien. Den Winkel zwischen Bildkurve und Sehne bezeichnet man bekanntlich als Richtungsreduktion der konformen Abbildung — er ist identisch mit dem kleinen Winkel zwischen Lichtkurve und Verbindungsgeraden, den man zur Reduktion der gemessenen Winkel wegen Refraktion braucht.

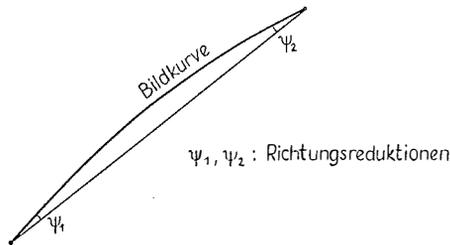


Abb. 1

So sieht man, daß die Einführung der Hilfsfläche \bar{F} unser Refraktionsproblem auf Gedankengänge zurückführt, die dem Geodäten wohlbekannt sind. Dadurch wird nicht nur eine völlig einheitliche Behandlung der Refraktionseinflüsse auf Winkel- und elektronische Streckenmessung erreicht, sondern auch eine gedankliche Vereinfachung erzielt: an die Stelle der relativ komplizierten Lichtkurven treten die einfachsten möglichen Kurven, die geodätischen Linien, in der Hilfsfläche und aus der Laufzeit der Lichtwellen, die sonst kaum geometrisch-anschaulich zu deuten ist, wird die Bogenlänge dieser geodätischen Linien.

Nun bewegt sich ein Lichtstrahl aber nicht in der Ebene, sondern im dreidimensionalen Raum, d. h. wir müssen noch die z -Koordinate hinzunehmen. Die wesentlichen Zusammenhänge, die wir gerade dargelegt haben, bleiben aber dabei erhalten. An die Stelle der Ebene F tritt nun der Raum R , aus der Hilfsfläche \bar{F} wird ein Hilfsraum \bar{R} . Ebenso wie \bar{F} eine gekrümmte Fläche ist, ist \bar{R} ein gekrümmter dreidimensionaler

Raum — das tut aber wenig zur Sache. Natürlich hat der Hilfsraum \bar{R} keine unmittelbare physikalische Realität wie der gewöhnliche euklidische Raum R , in dem wir uns bewegen, sondern er ist nur eine sehr bequeme geometrische Veranschaulichung, eine „graphische Darstellung“, physikalischer Zusammenhänge. Wir können also die Lichtstrahlen als geodätische Linien im Hilfsraum auffassen und die gemessene optische Weglänge als Bogenlänge dieser geodätischen Linien deuten. In diesem Sinne könnten wir sagen, daß wir in unserem Hilfsraum mittels geodätischer Linien *direkt messen*.

Der Übergang vom Hilfsraum \bar{R} mit dem Bogenelement

$$d\bar{s}^2 = n^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \dots (7)$$

zum gewöhnlichen Raum R mit dem Bogenelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \dots (8)$$

erfolgt durch eine dreidimensionale konforme Abbildung; die Reduktion der beobachteten Horizontal- und Höhenwinkel bzw. der elektronisch gemessenen Laufzeiten der Lichtwellen wegen Refraktion sind die Richtungs- bzw. Streckenreduktion dieser dreidimensionalen konformen Abbildung.

3. Die Geometrie der Lichtstrahlen ist also äquivalent mit der Geometrie im Hilfsraum \bar{R} . Ihr wollen wir uns nun zuwenden. Einen gekrümmten Raum (beliebiger Dimension) bezeichnet man als *Riemannschen Raum* und die Geometrie darin als *Riemannsche Geometrie*. Unser Hilfsraum \bar{R} ist daher ein dreidimensionaler *Riemannscher Raum*, ebenso wie eine Fläche ein zweidimensionaler *Riemannscher Raum* ist. Das gegebene mathematische Werkzeug für die Differentialgeometrie des *Riemannschen Raumes* ist die allgemeine Tensorrechnung oder der *Ricci-Kalkül* (vgl. [2] oder [5]). Die zunächst ungewohnte, aber sehr kurze und übersichtliche Schreibweise des *Ricci-Kalküls* beginnt auch in die Geodäsie einzudringen: ich verweise etwa auf die bekannten Arbeiten *Tienstras* in der Ausgleichsrechnung und vor allem auf die differentialgeometrischen Untersuchungen *Marussis* (etwa [7] oder die auch von *Ledersteger* in [4] behandelte „geometria intrinseca“ des Erdschwerfeldes. Trotzdem soll der leichteren Verständlichkeit halber auf seine Verwendung verzichtet werden; für den Leser, der den *Ricci-Kalkül* kennt, sind die Formeln in einem Anhang zusammengestellt, dessen Kenntnis zum Verständnis des Haupttextes nicht erforderlich ist, aber zur Vertiefung dienen wird.

Zunächst einige Bezeichnungen. Zur Abkürzung führen wir die Vektoren

$$\xi = (x, y, z) \quad , \quad d\xi = (dx, dy, dz)$$

ein. Dann ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2,$$

$$d\bar{s}^2 = n^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = n^2 d\xi^2.$$

Weiters führen wir noch den natürlichen Logarithmus des Berechnungsindex,

$$\lambda = \ln n \quad , \quad \dots (9)$$

ein, mit dem

$$d\bar{s}^2 = n^2 d\xi^2 = e^{2\lambda} d\xi^2$$

wird,

Nun betrachten wir die Gleichung der Lichtkurven, die mit den geodätischen Linien im Hilfsraum \bar{R} (bzw. ihren Bildkurven im gewöhnlichen Raum R , die ja durch dieselbe Gleichung definiert sind) identisch sind. Aus der im Anhang zitierten allgemeinen Formel (A4) für die geodätischen Linien im *Riemannschen* Raum findet man durch Spezialisierung sofort die Gleichung (A4') und (A4''), deren letztere in Vektorschreibweise die Gestalt

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\chi}{ds} - \text{grad } \lambda = 0 \quad . . . (10)$$

hat. Hierin ist ds das gewöhnliche (euklidische) Bogenelement (8) der Lichtkurve, λ ist der Logarithmus (9) des Brechungsindex und $\text{grad } \lambda$ der Vektor

$$\text{grad } \lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) .$$

Gl. (10) ist die Differentialgleichung für die Lichtkurve $\chi = \chi(s)$ (alle geodätischen Linien werden ja durch gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargestellt).

Nach bekannten Beziehungen der Differentialgeometrie ist

$$\frac{d\chi}{ds} = t, \quad \frac{d^2\chi}{ds^2} = \kappa n$$

(t : Tangenteneinheitsvektor, n : Einheitsvektor der Hauptnormalen, κ : räumliche Krümmung der Lichtkurve). Diese Beziehungen setzen wir in (10) ein und erhalten

$$\kappa n + \frac{d\lambda}{ds} t - \text{grad } \lambda = 0. \quad . . . (11)$$

Die Ebene E durch t und n ist die Schmiegebene der Kurve. Wir führen nun eine beliebige zweite Ebene E' durch die Tangente ein, die mit der Schmiegebene den Winkel φ einschließt (s. Abb. 2). Der Einheitsvektor n' steht in ihr senkrecht auf t . Wir bilden nun das innere Produkt von (11) mit n' :

$$\kappa n \cdot n' + \frac{d\lambda}{ds} t \cdot n' - \text{grad } \lambda \cdot n' = 0. \quad . . . (12)$$

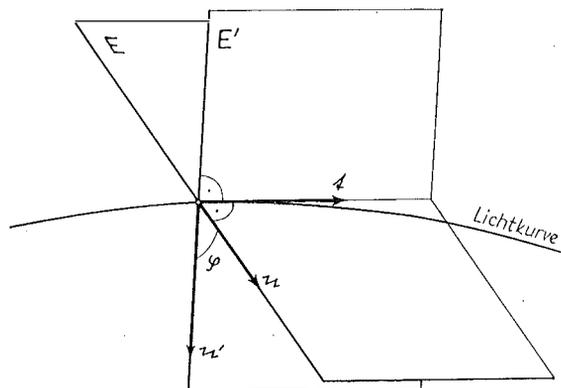


Abb. 2

Da das innere Produkt zweier Einheitsvektoren gleich dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist, gilt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \varphi, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}' = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

weilers ist

$$\text{grad } \lambda \cdot \mathbf{n}' = \frac{d\lambda}{dN'},$$

die Ableitung von λ nach der Richtung N' des Einheitsvektors \mathbf{n}' . Schließlich ist

$$\varkappa \cos \varphi = \varkappa'$$

bekanntlich gleich der Krümmung der Orthogonalprojektion der Lichtkurve in die Ebene E' . Damit erhalten wir aus (12)

$$\varkappa' - \frac{d\lambda}{dN'} = 0;$$

$$\underline{\varkappa' = \frac{d\lambda}{dN'} = \frac{d(\ln n)}{dN'} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dN'}}. \quad \dots (13)$$

Diese grundlegende Formel gilt, um es zu wiederholen, für die Projektion der Lichtkurve in irgendeine Ebene, welche die Tangente \mathbf{f} enthält (oder zu ihr parallel ist). Natürlich kann diese Ebene E' auch mit der Schmiegeebene zusammenfallen. Dann ist \varkappa die räumliche Krümmung der Kurve und aus (13) wird

$$\varkappa = \frac{d(\ln n)}{dN} \quad \dots (13')$$

mit der Ableitung in Richtung N der Hauptnormalen. Gl. (13) ist formal genau gleich der aus der Theorie der konformen Abbildung einer Fläche in die Ebene bekannten Formel von *Schols* ([3], S. 50, Gl. (121)) — sie ist ja ihre dreidimensionale Form. Wir wollen daher (13) (bzw. (13')) ebenfalls als *Formel von Schols* bezeichnen. Übrigens findet man die Formel (13') für die räumliche Krümmung der Lichtkurve, ebenso wie die Vektorgleichung (11) auch in der Literatur (vgl. [6], S. 53), als besonders wichtig für die Anwendungen wird sich aber Gl. (13) erweisen.

4. So wie nämlich die ebene Formel von *Schols* zur Ableitung der Richtungsreduktion der ebenen konformen Abbildung verwendet werden kann, können wir mit Hilfe von (13) auf einfache Weise Formeln für die Richtungsänderungen wegen Refraktion herleiten.

Zunächst betrachten wir die Änderung des Höhenwinkels β . Wir projizieren die Lichtkurve in die Vertikalebene, die die beiden Endpunkte A, B der Lichtkurve enthält¹⁾, s. Abb. 3. Gemessen wird in B der Höhenwinkel $\bar{\beta}$, gesucht ist der Wert β für die Verbindungsgerade \overline{AB} . $\Delta\beta = \bar{\beta} - \beta$ ist also die Reduktion des Höhenwinkels wegen Refraktion.

Die Formel von *Schols* (13) gilt, wie erwähnt, dann streng, wenn die Kurve in eine Ebene projiziert wird, welche die Richtung der Tangente im betrachteten Punkt

¹⁾ Exakter ausgedrückt ist es die Ebene durch die Punkte A und B , welche die Lotrichtung von B enthält.

enthält. Da die Tangente an die Lichtkurve aber mit der Sehne \overline{AB} stets nur einen sehr kleinen Winkel einschließt, gilt (13) in hinreichender Näherung auch für die Projektion in eine Ebene, welche diese *Sehne* enthält, wie dies bei unserer Vertikalebene zutrifft.

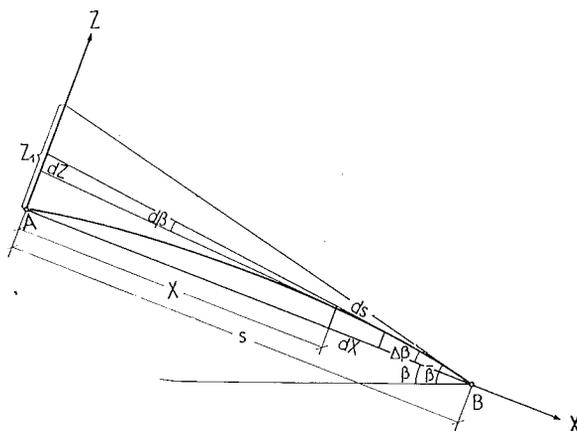


Abb. 3

Legen wir ein spezielles räumliches rechtwinkeliges Koordinatensystem XYZ mit dem Ursprung in A so, daß die X -Achse den Punkt B enthält, und die Z -Achse in der betrachteten Vertikalebene liegt (die Y -Achse ist dann horizontal), so können wir $\frac{\partial n}{\partial N'} \doteq \frac{\partial n}{\partial Z}$ setzen, weil die Kurvennormale N' mit der Z -Richtung überall fast zusammenfällt. Damit wird aus (13)

$$\kappa' = \frac{1}{n} \frac{dn}{dZ}.$$

Nun gilt nach der Definition der ebenen Krümmung in den Bezeichnungen der Abb. 3:

$$\kappa' = \frac{d\beta}{ds}, \quad d\beta = \kappa' ds.$$

Andererseits ist nach der Abb.

$$dZ = X d\beta,$$

$$Z_1 = \int_A^B X d\beta = \int_A^B X \kappa' ds \doteq \int_0^s \kappa' X dX = \int_0^s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial Z} X dX$$

und daher

$$\Delta\beta = \frac{Z_1}{s} = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial Z} X dX. \quad \dots (14a)$$

Das ist die gesuchte Formel für die Änderung des Höhenwinkels β 2) 3).

Nunmehr wollen wir dasselbe für den Horizontalwinkel α machen. Hier müssen wir die Lichtkurve statt in die XZ -Ebene in die XY -Ebene projizieren. Wenn wir überall (auch in Abb. 3) sinngemäß Z mit Y vertauschen, erhalten wir für die zu Z_1 analoge Größe Y_1 :

$$Y_1 = \int_0^s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial Y} X dX.$$

Um $\Delta\alpha$, die Änderung des Horizontalwinkels wegen Refraktion, zu erhalten, müssen wir aber jetzt Y_1 nicht durch s , sondern durch die Horizontalprojektion $s \cos \beta$ dividieren und finden daher

$$\Delta\alpha = \frac{Y_1}{s \cos \beta} = \frac{1}{s \cos \beta} \int_0^s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} X dX. \quad \dots (14b)$$

Diese Formeln für die Richtungsreduktionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ sollen noch durch die Streckenreduktion Δs ergänzt werden.

Es ist

$$d\bar{s} = n ds,$$

$$\bar{s} = \int_A^B n ds.$$

Hierin ist ds das gewöhnliche Bogenelement der Lichtkurve. Wir wissen, daß, wenn man $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ als kleine Größen 1. Ordnung betrachtet, die Bogenlänge der Lichtkurve sich von der Länge der Sehne \overline{AB} nur um Größen 2. Ordnung unterscheidet, so daß man in erster Annäherung

$$d\bar{s} = dX$$

setzen kann. Damit ist

$$\bar{s} = \int_0^s n dX,$$

andererseits ist die geradlinige Verbindungsstrecke

$$s = \int_0^s dX$$

und daher (vgl. auch [9])

$$\Delta s = \bar{s} - s = \int_0^s (n - 1) dX. \quad \dots (15)$$

2) Die Refraktion beim Nivellement ist ein Sonderfall der Vertikalrefraktion für $\beta = 0$; die hier maßgebende Größe ist unmittelbar Z_1 .

3) Wie man aus der Herleitung aus der Formel von *Schols* ersieht, kann Gl. (14a) auch sinngemäß für die Richtungsreduktion bei der konformen Abbildung einer Fläche in die Ebene verwendet werden.

Alle drei Formeln (14a) (14b) (15) gelten, um es zu wiederholen, nur in erster (aber oft völlig ausreichender) Näherung. Höhere Näherungen können auf die hier angegebene geometrisch-anschauliche Art nur mit großen Schwierigkeiten gefunden werden.

In [8] habe ich eine Methode angegeben, mit der man alle höheren Näherungen ohne theoretische Schwierigkeiten finden kann. Sie beruht auf folgendem Umstand. Die geodätische Entfernung, in unserem Fall die optische Weglänge \bar{s} , erfüllt eine partielle Differentialgleichung (A5) bzw. (A 5'), die wir

$$\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

schreiben können. Die iterative Auflösung dieser Gleichung führt nicht nur auf die Länge \bar{s} , sondern wegen

$$\bar{x} = \frac{\text{grad } \bar{s}}{n}$$

auch auf die Richtung (Einheitsvektor \bar{e}) der geodätischen Linie (Lichtkurve) in einem als variabel betrachteten Endpunkt⁴).

Bemerkenswert bei diesem Verfahren ist, daß es die Beziehung zwischen der gemessenen optischen Weglänge und der geradlinigen Verbindungsstrecke *direkt*, ohne Umweg über die Bogenlänge der Lichtkurve, den man bisher immer einschlagen mußte, herstellt⁵).

ANHANG

Darstellung im Ricci-Kalkül

Es wird nur eine kurze Formelzusammenstellung gegeben, die dem mit dem *Ricci-Kalkül* vertrauten Leser ohneweiteres verständlich ist. Die Bezeichnung lehnt sich an [5] an, worauf wir für Ableitungen u. dgl. verweisen; es werden nur statt griechischer Indizes lateinische verwendet, um dem Setzer die Arbeit etwas zu erleichtern.

Bezeichnungen:

x^i Koordinaten,
 a_{ij} kovarianter Maßtensor,
 a^{ij} kontravarianter Maßtensor,
 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ gemischter Maßtensor (Einheitstensor).

⁴) Daraus erkennt man, daß die Auflösung dieser partiellen Differentialgleichung (A5), etwa für den Fall einer Fläche angeschrieben, zur direkten Lösung der 2. Hauptaufgabe (Länge und Richtung der geodätischen Strecke aus den Koordinaten der Endpunkte) auf der Fläche führt, ebenso wie die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung (A4) zur unmittelbaren Lösung der 1. Hauptaufgabe (Koordinatenübertragung) geeignet ist. Diese wichtige Tatsache hat bereits *Gauß* erkannt.

⁵) Beim Vergleich unserer Formeln (14) mit den analogen Gln. (23) in [8] beachte man, daß die Gln. (14) ohne Rücksicht auf das Vorzeichen abgeleitet wurden und daß darin mit gleicher Genauigkeit $n = 1$ gesetzt werden kann.

Allgemeine Formeln:

Beziehung zwischen den Maßtensoren

$$a_{ij}a^{jk} = \delta_i^k. \quad \dots \quad (\text{A1})$$

Bogenelement

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j. \quad \dots \quad (\text{A2})$$

Dreiindizesymbole von *Christoffel*

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} a^{ir} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x^l} + \frac{\partial a_{rl}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^r} \right). \quad \dots \quad (\text{A3})$$

Gewöhnliche Differentialgleichung der geodätischen Kurve

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad \dots \quad (\text{A4})$$

Partielle Differentialgleichung für die geodätische Entfernung s

$$a^j \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} = 1. \quad \dots \quad (\text{A5})$$

Riemannscher Krümmungstensor

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \Gamma_{ir}^l \Gamma_{jk}^r + \Gamma_{jr}^l \Gamma_{ik}^r. \quad \dots \quad (\text{A6})$$

Krümmungstensor von *Ricci*

$$A_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R a_{ij} \quad \dots \quad (\text{A7})$$

mit

$$R_{jk} = R_{ijk}{}^i \quad \text{und} \quad R = a^{pq} R_{pq}.$$

Spezialisierung auf das vorliegende Problem

Diese allgemeinen Formeln sollen nun auf die Geometrie des Hilfsraumes \bar{R} angewendet werden, in dem die Lichtstrahlen geodätische Kurven sind. Im Einklang mit unserer bisherigen Bezeichnungsweise müssen wir dabei statt s und ds nun \bar{s} und $d\bar{s}$ schreiben. Weiters ist natürlich (die hochgestellten Indizes sind keine Exponenten!)

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

und die Maßtensoren lauten

$$a_{ij} = n^2 \delta_i^j = e^{2\lambda} \delta_i^j,$$

$$a^{ij} = \frac{1}{n^2} \delta_i^j = e^{-2\lambda} \delta_i^j.$$

Damit hat das Bogenelement die Form

$$d\bar{s}^2 = n^2 dx^i dx^i = e^{2\lambda} dx^i dx^i \quad (\text{über } i \text{ summieren!}) \quad \dots \quad (\text{A2}')$$

und die *Christoffelsymbole* werden

$$\Gamma_{kl}^i = \lambda_k \delta_i^l + \lambda_l \delta_i^k - \lambda_i \delta_k^l, \quad \dots \quad (\text{A3}')$$

wobei

$$\lambda_k = \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}$$

ist. Die Gleichung der geodätischen Kurve lautet daher

$$\frac{d^2 x^i}{d\bar{s}^2} + 2 \lambda_k \frac{d x^k}{d\bar{s}} \frac{d x^i}{d\bar{s}} - e^{2\lambda} \lambda_i = 0. \quad \dots (A4')$$

Führt man statt des Bogenelementes $d\bar{s}$ (A2') das euklidische Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^i dx^i}$$

ein, so geht diese Formel über in

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \lambda_k \frac{d x^k}{ds} \frac{d x^i}{ds} - \lambda_i = 0. \quad \dots (A4'')$$

Aus (A5) wird die partielle Differentialgleichung für die optische Weglänge

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^i} = n^2. \quad \dots (A5')$$

Schließlich erhält man für den Krümmungstensor von *Ricci*

$$A_{ij} = \lambda_{ij} - \lambda_i \lambda_j - \Delta \lambda \xi_i^j \quad \dots (A7')$$

mit

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \Delta \lambda = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}.$$

Dieser symmetrische Tensor 2. Stufe charakterisiert die Krümmung unseres Hilfsraumes \bar{R} ; der einfachere Tensor von *Ricci* (A7) kann nämlich im dreidimensionalen Fall den komplizierten *Riemannschen* Krümmungstensor 4. Stufe (A6) ersetzen (bei Flächen vermag dies bereits die skalare *Gauß'sche* Krümmung).

Literatur:

- [1] *Baule, B.*: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. V (Variationsrechnung). Leipzig 1958.
- [2] *Duschek, A.* und *Hochrainer, A.*: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, 3 Teile, vor allem Teil 3 (Tensoranalysis). Wien 1946–1955.
- [3] *Hubeny, K.*: Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides. Sonderheft 13 der ÖZfV, Wien 1953.
- [4] *Jordan-Eggert-Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. V, bearbeitet von *K. Ledersteger*, Stuttgart 1956 und 1959.
- [5] *Levi-Civita, T.*: Der absolute Differentialkalkül. Berlin 1928.
- [6] *Maréchal, A.*: Optique géométrique générale. In: Handbuch der Physik, Bd. 24 (Grundlagen der Optik). Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
- [7] *Marussi, A.*: Sulle rappresentazioni fra superfici definite mediante la forma quadratica che ne determina il modulo di deformazione. In: Festschrift C. F. Baeschlin, Zürich 1957.
- [8] *Moritz, H.*: Zur Reduktion elektronisch gemessener Strecken und beobachteter Winkel wegen Refraktion. Z. f. Vermessungswesen 86 (1961), S. 246–252.
- [9] *Rimmer, K.*: Über die Reduktion großer elektronisch gemessener Entfernungen. Z. f. Vermessungswesen 81 (1956), S. 47–55.