

Paper-ID: VGI_196113



Eine neue Fehleraufteilung für lange Polygonzüge

Hans Schmid ¹

¹ *Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **49** (4), S. 113–119

1961

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Schmid_VGI_196113,  
Title = {Eine neue Fehleraufteilung f{"u}r lange Polygonz{"u}ge},  
Author = {Schmid, Hans},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {113--119},  
Number = {4},  
Year = {1961},  
Volume = {49}  
}
```



Durch Einengen des Bereiches könnte man auf diese Art Dichtesprünge mit geringem Rechenaufwand finden.

Für größere Bereiche ist es besser den auf die Längeneinheit bezogenen Bouguerschen-Horizontalgradienten für die Berechnung der Dichte zu vernachlässigen. Man muß also jede Gleichung durch die zugehörige Punktentfernung dividieren.

Aus den Ergebnissen in Tabelle 1, Ansatz 1,08a, sieht man, daß in diesem Fall der mittlere Fehler für die Dichte am kleinsten ist.

Eine neue Fehleraufteilung für lange Polygonzüge

Von *Hans Schmid*, Wien

1. Einleitung

Eine in der Praxis immer wiederkehrende Aufgabe ist die Absteckung der Straßen- oder Eisenbahntrassen von Polygonzügen aus. Dabei handelt es sich meist — wenn man die Autobahnarbeiten außer Betracht läßt — um die Messung langer Polygonzüge (etwa 5 km), die nur am Anfang und am Ende trigonometrische Anschlüsse besitzen, die als Festpunktgerippe sowohl für die Detailaufnahme als auch nachher für die Trassenabsteckung dienen müssen. Da nach den derzeit gültigen Projektierungsrichtlinien die Trassen numerisch, d. h. koordinatenmäßig berechnet werden, handelt es sich bei der Übertragung in die Natur um die Absteckung von Polarkoordinaten. Die Forderung, die man daher an einen Polygonzug zu stellen hat, damit möglichst widerspruchlose Richtungen gegeben werden können, gipfelt in der gleichmäßigen Aufteilung der Restfehler, d. h. die Polygonzugsrestfehler sollen so beseitigt werden, daß die Winkel gleichmäßig und die Seiten proportional ihrer Länge verändert werden. Diese Art der Fehleraufteilung scheint für die gestellte Aufgabe die besten Ergebnisse zu liefern, wie im folgenden noch gezeigt wird. Das Wort „Fehleraufteilung“ an Stelle des so beliebten Wortes „Ausgleichung“ wurde absichtlich gewählt, da man unter „Ausgleichung“ nur die Fehlerverteilung nach einem mathematischen Gesetz (etwa die Summe der Fehlerquadrate muß ein Minimum werden) verstehen soll. In einer Fortsetzung dieses Aufsatzes werden verschiedene Möglichkeiten der Fehlerverteilung einander gegenübergestellt werden, wobei auch die Ausgleichung des Polygonzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate vertreten sein wird.

2. Aufteilung der Fehler $\triangle q$ und $\triangle L$

Bei der üblichen Aufteilung der Koordinatenwidersprüche f_x und f_y proportional den Seiten- oder den Koordinatendifferenzen treten bekanntlich unter Umständen stärkere Brechungswinkeldeformationen ein, die vom Richtungswinkel der Polygonseite abhängen. Werden nun von einem Polygonpunkt, in welchem eine derartige Brechungswinkeldeformation durch die Fehleraufteilung stattgefunden hat, Trassenpunkte abgesteckt, so kann dies zu unliebsamen Widersprüchen führen. Es sollen daher alle Winkel so wenig wie möglich und gleichmäßig geändert werden, wobei auch die Anschluß- und Abschlußrichtungen miteinbezogen werden müssen.

Wir setzen also einen beidseitig angeschlossenen Polygonzug voraus, der, wie allgemein üblich, mit Theodolit und Maßband gemessen wurde. Der Winkelwiderspruch f_{β} wird gleichmäßig auf alle Brechungswinkel zuerst verteilt, hernach der Polygonzug mit den so verbesserten Brechungswinkeln durchgerechnet.

Bevor an die weitere Fehleraufteilung geschritten wird, ist es vorteilhaft, den Polygonzug etwa im Maßstab 1 : 2500 oder 1 : 5000 auf Millimeterpapier zu kartieren. Diese Arbeit ist keine zusätzliche, da Polygonzugsübersichten für jede derartige praktische Arbeit hergestellt werden müssen. Die Koordinatenwidersprüche f_x und f_y werden nunmehr graphisch in den Querfehler Δq und in den Längsfehler ΔL umgewandelt. Durch diese Umwandlung löst man sich vom Koordinatensystem und damit auch von der Abhängigkeit der Brechungswinkelverbesserung vom Richtungswinkel der Polygonseiten.

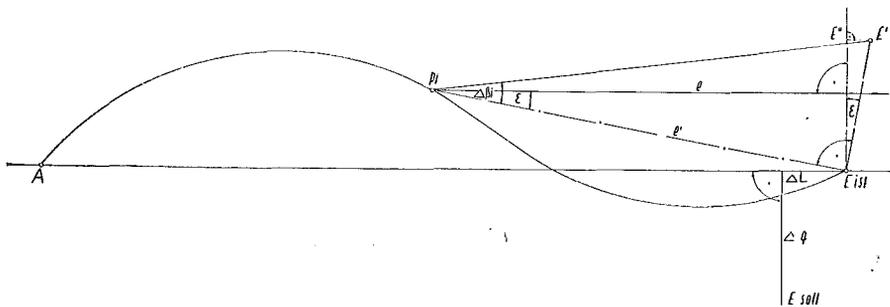


Abb. 1

In der Abb. 1 wird der Einfluß einer Änderung des Brechungswinkels auf den Querfehler Δq gezeigt. Eine Änderung des Brechungswinkels β_i um $\Delta \beta_i$ bewirkt eine Drehung des Polygonzugsastes P_i bis E um P_i als Mittelpunkt, wodurch der Punkt E in den Punkt E' übergeht. Es folgt daher:

$$\overline{EE'} = \frac{e' \Delta \beta_i^{cc}}{\rho^{cc}} \quad \dots (1)$$

Für den Einfluß auf den Querfehler ist es aber notwendig, die Projektion der Strecke $\overline{EE'}$ auf die Richtung des Querfehlers, also senkrecht zur absoluten Polygonzugsrichtung, zu kennen. Es ergibt sich daher

$$\overline{EE''} = \overline{EE'} \cos \varepsilon \quad \dots (2a)$$

und

$$e = e' \cos \varepsilon \quad \dots (2b)$$

und daher weiter wegen der Gleichungen (1) und (2a)

$$\overline{EE''} = \frac{e \Delta \beta_i^{cc}}{\rho^{cc}} \quad \dots (3)$$

Mit Hilfe dieser einfachen Beziehung (3) ist die Fehlergleichung für den Querfehler Δq wie folgt aufzustellen, wobei für die Größen $\Delta \beta_i^{cc}$ die in der Fehlerrechnung übliche Bezeichnung „ v “ verwendet wird:

$$\Delta q = e_1 v_1 + e_2 v_2 + e_3 v_3 + \dots + e_n v_n \quad \dots (4)$$

Weiters ist zu beachten, daß sich die An- und Abschlußrichtungen auch nur ebenso stark ändern dürfen wie die Brechungswinkel. Dies erreicht man am besten dadurch,

daß in einem Punkt möglichst in der Mitte des Polygonzuges der halbe Querfehler $\Delta q/2$ von beiden Enden des Polygonzuges her eliminiert wird. Die folgende Abb. 2 zeigt diesen Vorgang.

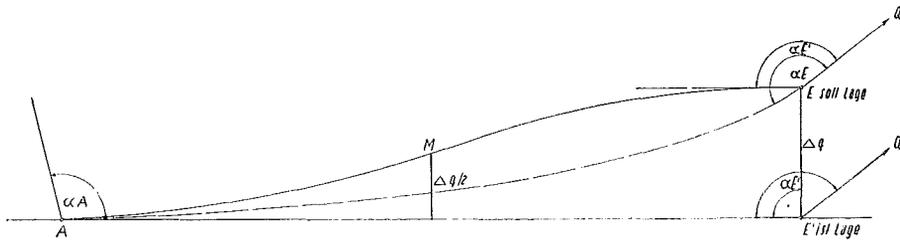


Abb. 2

Würde man den Querfehler Δq durch die Gleichung (4) eliminieren, dann entstünde im Punkt E eine Richtungsdifferenz von der Größe $n \cdot \Delta \beta_i^{cc}$ für einen n -seitigen Polygonzug (gestrichelter Polygonzugsverlauf). Teilt man jedoch von beiden Enden kommend etwa in der Mitte des Polygonzuges $\Delta q/2$ auf, so wird die größte Richtungsänderung der Polygonseiten beim Punkt M sein, wobei sie $n/2 \cdot \Delta \beta_i^{cc}$ (durchgezogener Polygonzugsverlauf) betragen wird. Die Verbesserungen der Brechungswinkel in der ersten Polygonzugshälfte bewirken Richtungsänderungen der Polygonseiten, die durch die Verbesserungen der Brechungswinkel in der zweiten Polygonzugshälfte aufgehoben werden, so daß die An- und Abschlußrichtungen je bis auf $1 \cdot \Delta \beta_i''$ erhalten bleiben. Man hat nun jenen Punkt als „Mittelpunkt“ zu wählen, für den gilt

$$\Sigma (ev)_{links} = \Sigma (ev)_{rechts} \quad \text{und} \quad \Sigma v_{links} = \Sigma v_{rechts} \quad . . . (5)$$

Die Bedingungen (5) sind praktisch mathematisch streng nicht einzuhalten, da ja der Mittelpunkt M mit einem Polygonpunkt zusammenfallen müßte. Es ist jedoch rasch der Punkt rein empirisch zu finden, für den die Bedingungen (5) am besten erfüllt sind. Es darf hier erinnert werden, daß es sich ja um lange Polygonzüge handelt, so daß immer in der Nachbarschaft vom idealen Mittelpunkt ein Polygonpunkt liegt. Die Verbesserungsgleichungen für die Polygonsmitte lauten nun, wenn der linke Ast n und der rechte Ast m Polygonpunkte besitzt:

$$\frac{\Delta q}{2} = e_1 v_l + e_2 v_l + \dots + e_n v_l = \Sigma_1^n e \cdot v_l$$

daraus

$$v_{links}^{cc} = \frac{\Delta q}{2 \Sigma_1^n e} \cdot \rho^{cc} \quad . . . (6a)$$

und analog

$$v_{rechts}^{cc} = \frac{\Delta q}{2 \Sigma_1^m e} \cdot \rho^{cc} \quad . . . (6b)$$

Die Winkelverbesserungen im linken und rechten Ast werden demnach bei langen Polygonzügen praktisch gleich sein, da $\frac{m}{n} \doteq 1$ sein wird, wodurch die Bedingungen (5) praktisch erfüllt werden. Sind nun die Größen v_{links}^{cc} und v_{rechts}^{cc} berechnet, so ist der Einfluß der Verbesserungen v_i auf die Koordinatenverbesserung zu er-

durch eine einfache Maßstabsänderung, wodurch keinerlei Winkeländerung mehr verursacht wird. Man hätte also nun alle Seiten im Verhältnis $\frac{\Delta L + \Delta L'}{AE''}$ zu verändern. Es genügt aber praktisch vollkommen, den Maßstabsquotienten aus $\frac{\Delta L + \Delta L'}{AE'}$ oder $\frac{\Delta L + \Delta L'}{AE}$ zu bestimmen, wie leicht einzusehen ist. Dieser Quotient mit den einzelnen Seiten multipliziert ergibt die Seitenverbesserungen, welche, analog Abb. 3, die Verbesserungen v_x und v_y wegen der Maßstabsänderung liefern. Die Summen aller entsprechenden v_x und v_y ergeben die endgültigen Koordinatenverbesserungen $d\Delta x$ und $d\Delta y$ und damit die endgültigen Koordinaten.

3. Praktisches Beispiel

In der Beilage ist nun ein numerisches Beispiel für einen Polygonzug mit 20 Seiten durchgeführt. Die Kartierung ist im Original auf Millimeterpapier im Maßstab 1 : 2500 erfolgt. (Die Beilage ist auf die Hälfte verkleinert.)

Die Sollkoordinaten der Punkte 1 und 20 sind gegeben. Die angegebenen Brechungswinkel β_i sind bereits die auf Grund des Richtungswiderspruches vorläufig verbesserten Werte. Die Koordinatenwidersprüche sind im Original im Maßstab 1 : 10 dargestellt und betragen für $f_x = -0,890$ m und für $f_y = -0,270$ m (Soll-Ist), woraus sich für den Längs- bzw. Querfehler die Werte $\Delta L = -0,49$ m und $\Delta q = -0,79$ m ergeben. Die Berechnung der ersten Polygonzugshälfte ergibt eine Winkelverbesserung von $v_{links} = 66^{cc}$ und von $v_{rechts} = 70^{cc}$. Die Seite 9,10 wird daher um $9 \times 66^{cc} = 594^{cc}$ und die Seite 11,10 wird um $10 \times 70^{cc} = 700^{cc}$ in ihren Richtungen geändert. Dies entspricht einer Winkeländerung im Pkt. 10 um 106^{cc} gegenüber einer solchen von 70^{cc} bzw. 66^{cc} in den Punkten der beiden Polygonzugstäbe. Diese Differenz von rund 30^{cc} resultiert aus der Differenz der Summen von e_{links} und e_{rechts} . Für die Absteckung von Trassenpunkten ist dieser kleine Widerspruch aber belanglos.

In der Spalte $n \cdot v_y$ bzw. $n \cdot v_x$ der Tabelle sind die Einzelverbesserungen mit der Ordnungsnummer n der Polygonseite multipliziert worden, da ja z. B. die Seite 3,4 bereits um $3 \cdot v^{cc}$ verdreht worden ist. In der 8. bzw. 11. Spalte oben sind die Gesamtverbesserungen wegen des Querfehlers verzeichnet. Da der Abschlußwinkel ebenso wie der Anschlußwinkel erhalten bleiben soll, beginnt die Fehleraufteilung des rechten Astes mit der letzten Seite, im speziellen Fall mit der Seite vom Punkt 20 zum Punkt 19, während die Fehleraufteilung des linken Astes von der Seite 1,2 ausgeht. Die Gesamtverbesserung wegen des Querfehlers beträgt $+16$ mm in der y -Richtung und -813 mm in der x -Richtung. Trägt man diese Werte in die graphische Darstellung ein, so liegt der Endpunkt des Polygonzuges bereits auf einer Parallelen durch den Sollendpunkt des Polygonzuges zur Zugshauptrichtung.

Der Maßstabsfaktor beträgt jetzt $0,29$ m, geteilt durch die absolute Zuglänge von rund 1460 m, demnach $0,000199$, also rund $0,0002$. Mit diesem Faktor ist jede Seite zu multiplizieren, und der so erhaltene Betrag ist graphisch in seine x - und y -Anteile zu zerlegen. Diese Werte sind in den Spalten 8 und 11 unten ausgewiesen.

N	Polygon- punkts- nummer	Brechungs- winkel in g	Richtungs- winkel in g	Seiten- länge m	wegen Δq in mm		Δy verbessert		wegen Δq in mm		Δx verbessert		y	x
					v_y	$n \cdot v_y$	Δy	$-v_{yq}$	v_x	$n \cdot v_x$	Δx	$-v_{xq}$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
0	1												1000-00	1000-00
1	2	210	60	100	+ 6	6	+ 80 ⁸⁹⁰ ₉₀₀ + 6 - 16	- 9	- 9	+ 58 ⁷⁵⁹ ₇₈₀ - 9 - 12	1080-890	1058-759		
2	3	170	70	120	+ 6	12	+ 106 ⁹¹¹ ₉₂₀ - 21 + 12	- 11	- 22	+ 54 ⁴⁴⁷ ₄₈₀ - 21	1187-801	1113-206		
3	4	200	40	80	+ 7	21	+ 47 ⁰³² ₀₂₀ - 9 + 21	- 5	- 15	+ 64 ⁶⁹³ ₇₂₀ - 12 + 15	1234-833	1177-899		
4	5	200	40	50	+ 4	16	+ 29 ⁴⁰⁰ ₃₉₀ - 6 + 16	- 3-2	- 13	+ 40 ⁴²⁹ ₄₅₀ - 8 + 13	1264-233	1218-328		
5	6	200	40	130	+ 10-8	54	+ 76 ⁴⁴⁹ ₄₁₀ - 15 + 54	- 8	- 40	+ 105 ¹⁰⁹ ₁₇₀ - 21 + 40	1340-682	1323-437		
6	7	240	40	100	+ 8-6	51-6	+ 58 ⁸²⁰ ₇₈₀ + 52	- 5-8	- 35	+ 80 ⁸⁴⁹ ₉₀₀ - 16 + 35	1399-502	1404-286		
7	8	210	80	90	+ 2-8	19-6	+ 85 ⁶⁰³ ₆₀₀ + 20 - 17	- 8-9	- 63	+ 27 ⁷⁴² ₈₁₀ - 5 + 63	1485-105	1432-028		
8	9	230	90	120	+ 2	16	+ 118 ⁵¹³ ₅₂₀ - 23 + 16	- 12-2	- 98	+ 18 ⁶⁶⁸ ₇₇₀ - 4 + 98	1603-618	1450-696		
9	10	220	120	80	- 2-4	21-6	+ 76 ⁰⁴³ ₀₈₀ - 15 + 22	- 7-9	- 72	- 24 ⁷⁸⁸ ₇₂₀ + 4 - 72	1679-661	1425-908		
10	11	200	140	70	- 4-5	45	+ 56 ⁵⁷⁴ ₆₃₀ - 11 + 45	- 6-1	- 61	- 41 ¹⁹⁸ ₁₄₅ + 8 + 8	1736-235	1384-710		
9	12	200	140	80	- 5	45	+ 64 ⁶⁶² ₇₂₀ - 13 + 45	- 7	- 63	- 47 ⁰⁷⁴ ₀₂₀ + 9 + 63	1800-897	1337-636		
8	13	200	140	100	- 6-5	52	+ 80 ⁸³² ₉₀₀ - 16 + 52	- 8-7	- 70	- 58 ⁸³⁸ ₇₈₀ + 12 + 12	1881-729	1278-798		
7	14	180	140	110	- 7	49	+ 88 ⁹²⁵ ₉₉₀ - 16 + 49	- 9-6	- 67	- 64 ⁷¹¹ ₆₅₇ + 13 + 13	1970-654	1214-087		
6	15	170	120	100	- 3-5	21	+ 95 ⁰⁷⁰ ₁₁₀ - 21 + 21	- 10-5	- 63	- 30 ⁹⁵⁷ ₉₀₀ + 6 + 6	2065-724	1183-130		
5	16	190	90	90	+ 2	10	+ 88 ⁸⁸² ₈₉₀ - 18 + 10	- 9-3	- 47	+ 14 ⁰³⁰ ₀₈₀ - 3 + 3	2154-606	1197-160		
4	17	180	80	80	+ 3	12	+ 76 ⁰⁷⁷ ₀₈₀ - 15 + 12	- 8-2	- 33	+ 24 ⁶⁸² ₇₂₀ - 3 + 3	2230-683	1221-842		
3	18	200	60	80	+ 5-4	16	+ 64 ⁷²³ ₇₂₀ - 13 + 16	- 7	- 21	+ 46 ⁹⁹⁰ ₉₉₀ - 21 + 9	2295-406	1268-832		
2	19	200	60	100	+ 6-3	13	+ 80 ⁸⁹⁷ ₉₀₀ - 16 + 13	- 8-7	- 17	+ 58 ⁷⁵¹ ₇₈₀ - 12 + 17	2376-303	1327-583		
1	20		60	50	+ 3	3	+ 40 ⁴⁴⁵ ₄₅₀ + 3 + 8	- 4-5	- 5	+ 29 ³⁸⁰ ₃₉₀ - 6 + 6	2417-01 2416-74	1357-85 ist 1356-96 soll		

Ast 1-10 : 0-40 = 766 v + 676 v + 558 v + 494 v + 454 v + 352 v + 278 v + 188 v + 70 v = 3836 v. v = 66^{cc}
 Ast 20-11 : 0-40 = 696 v + 646 v + 556 v + 480 v + 400 v + 310 v + 220 v + 154 v + 90 v + 40 v = 3592 v. v = 70^{cc}
 $f_y = 0-270$ $f_x = 0-890$

Die Rückrechnung ergibt bis auf kleine Abwendungsfehler die erwarteten Brechungswinkeländerungen. Es ist empfehlenswert, die Rechnung auf Millimeter durchzuführen, besonders dann, wenn man durch Rückrechnung der Richtungswinkel eine Überprüfung durchführen will, was aber praktisch nicht notwendig ist.

Allgemeine und spezielle überbestimmte analytische Lösungen der einfachen Punkteinschaltung im Raum

Von *Ludwig Starkl*, Wels

(Schluß)

Dieses einfache, übersichtliche Verfahren zur Bestimmung der äußeren Orientierungselemente eines Luftbildes kann für die praktisch wichtigste Aufnahmeart, der Senkrechtaufnahme mit möglichst lotrechter Kammerachse so modifiziert werden, daß an Stelle von neun Paßpunkten nur mehr vier Paßpunkte gegeben sein müssen. Hierbei wird von einer partiellen Linearform der Gleichungen jener bereits von *G. Monge* bei seiner graphischen Lösung benützten Wulst- bzw. Torusflächen ausgegangen. Diese repräsentieren die geometrischen Örter aller Raumpunkte, von denen aus die Verbindungsgeraden ε_n je zweier Paßpunkte P_o und P_n unter den gleichen, homologen Positionswinkeln α_n erscheinen, die durch die Gleichung

$$\cos \alpha_n = \frac{\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_o}{|\mathbf{r}_n| |\mathbf{r}_o|} = r_n^o \cdot r_o^o \quad . . . (24)$$

bestimmt werden. Aus der zweiten Vektorgleichung (18) folgt durch innere Multiplikation mit \mathfrak{R}_o und mit Einführung der Bezeichnungen

$$|\mathfrak{R}_o| = r_o \quad |\mathfrak{R}_n| = r_n \quad . . . (25)$$

die Gleichung der Torusflächen in der speziellen Gestalt

$$\mathfrak{R}_o \cdot \varepsilon_n = \mathfrak{R}_o^2 - \mathfrak{R}_o \cdot \mathfrak{R}_n = r_o^2 - r_o r_n \cos \alpha_n = c_n \quad . . . (26)$$

In diesem Zusammenhang bietet die reziproke Spiegelung der oben betrachteten Kreisringflächen an einer um das Abbildungszentrum P_o gelegten Inversionskugel ein gewisses allgemeines Interesse. Bei der Herleitung von Formeln für die einfache und die Doppelpunkteinschaltung in der Ebene vermittelt eine Inversion eine bemerkenswert einfache analytische Lösung [7]. Die Abbildung durch reziproke Entfernungen ist für die Aufgabe des ebenen Rückwärtseinschneidens zum ersten Male von *C. F. Gauss* angewendet worden (*Gauss Werke*, Bd. VIII, S. 328–329). Die räumliche Modifikation dieses Verfahrens zeigt allgemein die Entsprechung von Torus- und Kegelflächen in einer durch die Abbildungsgleichungen

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{|\mathfrak{R}'|} \mathfrak{R}'^o = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}'^2} \quad \mathfrak{R}' = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \mathfrak{R}^o = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \quad . . . (27)$$

bestimmten, reziproken Raumtransformation. Die aus dem Ansatz

$$\mathfrak{R}_o \cdot \mathfrak{R}_n = |\mathfrak{R}_o \times \mathfrak{R}_n| \cot \alpha_n \quad . . . (28)$$

über die zweite Gleichung (18) erhaltene Form

$$\mathfrak{R}_o \cdot (\mathfrak{R}_o - \varepsilon_n) = |\mathfrak{R}_o \times \varepsilon_n| \cot \alpha_n \quad . . . (29)$$