



Näherungs-Zentroid als optimale Punktlage bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Vorwärts- und Rückwärtseinschnittes

Walter Smetana ¹

¹ *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII/64, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **49** (2), S. 39–44

1961

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_196106,  
  Title = {N{\a}herungs-Zentroid als optimale Punktlage bei der analytischen  
    Berechnung des mehrfachen Vorw{\a}rts- und R{\u}ckw{\a}rtseinschnittes},  
  Author = {Smetana, Walter},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {39--44},  
  Number = {2},  
  Year = {1961},  
  Volume = {49}  
}
```



Das Detail des weiteren Vorganges sei weggelassen; man gewinnt aus dem ersten Paar von runden Näherungen die ellipsoidischen Längenunterschiede

$$l_{12,1} = 95^{\circ} 05' 35,749\ 855''$$

$$l_{12,2} = 95^{\circ} 05' 42,558\ 240'',$$

während das zweite Paar die Längenunterschiede

$$l_{12,1} = 95^{\circ} 05' 28,942\ 149''$$

$$l_{12,2} = 95^{\circ} 06' 37,035\ 835''$$

liefert. Die Interpolation nach (37) ergibt im ersten Falle

$$\alpha_0 = 24^{\circ} 27' 21,374\ 476''$$

und für den zweiten Fall

$$\alpha_0 = 24^{\circ} 27' 21,374\ 178'',$$

mit welchen Werten sich übereinstimmend die gesuchte Bogenlänge mit

$$s_{12} = 14\ 999\ 999,99\ \text{m}$$

errechnen läßt.

Ebenso übereinstimmend ergibt sich aus beiden Werten der sphärische Längenunterschied mit

$$\lambda_{12} = 95^{\circ} 16' 55,708\ 516'',$$

der mit (33), (34) zu den Azimuten

$$\alpha_1 = 140^{\circ} 00' 00,000\ 008''$$

$$\alpha_2 = 114^{\circ} 46' 41,484\ 152''$$

führt. Die Übereinstimmung dieser Werte mit den anfangs mitgeteilten Ergebnissen von *Bodemüller* ist, da sie im Rahmen der gewählten Rechengenauigkeit liegt, durchaus befriedigend.

Zu den Zahlenwerten ist noch zu bemerken, daß die Mitführung von sechs Dezimalen der Bogensekunde in den Azimuten überflüssig und auch der abgekürzten Formeln wegen eigentlich sinnlos ist; der Vorgang wurde gewählt, um das Ergebnis nicht mit rechnerischen Unsicherheiten zu überlagern.

Die zahlenmäßige Erprobung der mitgeteilten Formeln und die Berechnung des Beispiels besorgte Herr *Dipl.-Ing. D. Geiger*.

Näherungs-Zentroid als optimale Punktlage bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Vorwärts- und Rückwärtseinschnittes

Von *Walter Smetana*, Wien

(*Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen*)

1. Einleitung

Bei der in der Praxis vorkommenden trigonometrischen Bestimmung von Einschaltpunkten (EP) nach der Methode des mehrfachen Vorwärts- bzw. Rückwärtseinschnittens wird es von Bedeutung sein, das Rechenverfahren zu wählen, das auf rationellstem Wege die optimale Punktlage liefert, deren Genauigkeit den Anforderungen der Praxis entspricht und dennoch mit der Genauigkeit der wahrscheinlichsten Punktlage in schrankenmäßiger Übereinstimmung bleibt. Wie diese Berechnung am zweckmäßigsten und wirtschaftlichsten erfolgen kann, soll hier auf Grund jahrelanger Erprobung gezeigt werden.

2. Theoretische Grundlagen

Ausgehend vom allgemeinen Zentroidbegriff [1] in Anwendung auf die trigonometrische Punktbestimmung [2], wonach man jedem Punkt eines Systems von Schnittpunkten bezüglichlicher Strahlen in fehlerzeigenden Figuren auch eine besondere Zahl zuordnen kann, die man passend die Stärke des Punktes nennt und die *Mitter* [3] auf Grund einer einfachen Transformation auf die Schnittpunktgewichte zurückführt, stellt das Zentroid den Schwerpunkt und zugleich Minimumpunkt des Schnittpunktsystems bei Einführung der Schnittpunktgewichte dar. Dieses Zentroid wird durch Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels nach $X_S = \frac{[p \cdot X]}{[p]}$ und $Y_S = \frac{[p \cdot Y]}{[p]}$ auf Grund der analytischen Berechnung eines EP aus allen möglichen $\binom{n}{2}$ Vorwärtseinschnitten bzw. $\binom{n}{3}$ Rückwärtseinschnitten ($n =$ Anzahl der äußeren bzw. inneren Richtungen) unter Verwendung der bezüglichlichen Schnittpunktgewichte erhalten.

Da für den vorliegenden Fall der Berechnung eines EP nur beschränkte Genauigkeit, das heißt Zentimetergenauigkeit, gefordert wird, wäre es unwirtschaftlich, das Minimum-Zentroid S zu bestimmen, das nur durch Berechnung sämtlicher Schnittpunktombinationen erhalten werden kann.

Es liegt daher die Aufgabe vor, das Näherungs-Zentroid S' zu berechnen, das die geforderte Genauigkeit liefert und daher als optimale Punktlage anzusehen ist.

Bezeichnen $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ die nach ihren Absolutbeträgen geordneten Punktlagefehler der n möglichen Vorwärts- bzw. Rückwärtseinschnitt-Kombinationen, so erhält man auf Grund der Annahme des größten mittleren Punktlagefehlers M_n als Punktlagefehler der Gewichtseinheit bzw. $p_1 = \frac{M_n^2}{M_1^2}, p_2 = \frac{M_n^2}{M_2^2}, \dots, p_n = 1$. Das sogenannte Minimum-Zentroid erhält demnach das Gewicht $p_S = [p]^n$, während für das Näherungs-Zentroid $p_{S'}$ gilt.

Dürfen die Koordinatenstreuungen zwischen dem Minimum-Zentroid S und dem zu bestimmenden Näherungs-Zentroid S' höchstens 1 cm betragen, so ist auf Grund der Ergebnisse aus [4] eine maximale mittlere Punktlagefehler-Abweichung von ~ 3 mm bei der Bestimmung des Näherungs-Zentroides noch zulässig, $p_{S'}$ wird als $f(M_n, p_S)$ dargestellt:

$$|M_{S'}| - |M_S| \leq 3 \text{ mm und } \left| \frac{M_n}{\sqrt{p_{S'}}} \right| \leq \left| \frac{M_n}{\sqrt{p_S}} \right| + 3 \text{ mm. Daraus erhält man schließlich:}$$

$$p_{S'} \geq \frac{p_S}{\left(1 + 3 \left| \frac{\sqrt{p_S}}{M_n} \right| \right)^2} \quad \dots (1)$$

Unter Berücksichtigung von $\frac{M_n}{\sqrt{p_S}} = M_S$ als mittlerem Punktlagefehler des Minimum-Zentroides, geht (1) über in

$$p_{S'} \geq \frac{p_S}{\left(1 + \frac{3}{|M_S|}\right)^2} \text{ oder } p_{S'} \geq \frac{100}{\left(1 + \frac{3}{|M_S|}\right)^2} \% \quad \dots (2)$$

Zur Auswertung und anschaulichen Diskussion von (1) und (2) werden jeweils unter Annahme von höchstens zehn möglichen Schnittkombinationen je zwei Kombinationsreihen derart konstruiert, daß der größte mittlere Punktlagefehler M_n — als der Fehler der Gewichtseinheit — im Bereich zwischen 10—100 mm und der kleinste Fehler M_1 der Schnittkombinationen mit 10 mm im Rahmen der graphischen Darstellung hinreichend als konstant in die Formeln eingehen. Außerdem werden für die jeweils obere Kombinationsreihe der Tabelle zwecks Erlangung der kleinsten Gewichte $p_{S \min}$ bzw. $p_{S' \min}$ ein Schnitt mit dem mittleren Punktlagefehler M_1 und neun Schnitte mit dem mittleren Punktlagefehler M_n angenommen. Die unteren Kombinationsreihen erhalten zur Erlangung der größten Gewichte $p_{S \max}$ bzw. $p_{S' \max}$ neun Schnitte mit den mittleren Punktlagefehlern M_1 und einen Schnitt mit den mittleren Punktlagefehlern M_n .

M_n mm	$p_{S \min}$ $p_{S \max}$	$M_{S \max}$ $M_{S \min}$ ~ mm	$p_{S' \min}$ $p_{S' \max}$ ≥	Schnittpunktgewichte p										
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	
10	10	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	3	3	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	1	1	1	1	1	1	1	1
	13	6	5	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	37	3	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1
	18	7	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	82	3	23	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1
	25	8	13	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40	145	3	40	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	1
	34	9	19	25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50	226	3	62	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	1
	45	9	25	36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60	325	3	90	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	1
	58	9	33	49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
70	442	3	122	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	1
	73	9	42	64	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
80	577	3	159	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	1
	90	10	52	81	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
90	730	3	202	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	1
	109	10	63	100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	901	3	249	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1

Die Ergebnisse der Auswertung von (1) und (2) sind in der Tabelle enthalten. Ihre kritische Betrachtung ergibt:

1. Liegen Schnittkombinationen fast gleicher Genauigkeit vor, so bedarf es zur Ermittlung des Näherungs-Zentroides S' , also der optimalen Punktlage, der analytischen Berechnung von höchstens drei mit den größten Gewichten erhaltenen Schnittkombinationen und Mittelbildung der so berechneten Schnittpunktkoordinaten. Die bezüglichen Gewichte sind in der Tabelle kursiv gedruckt.

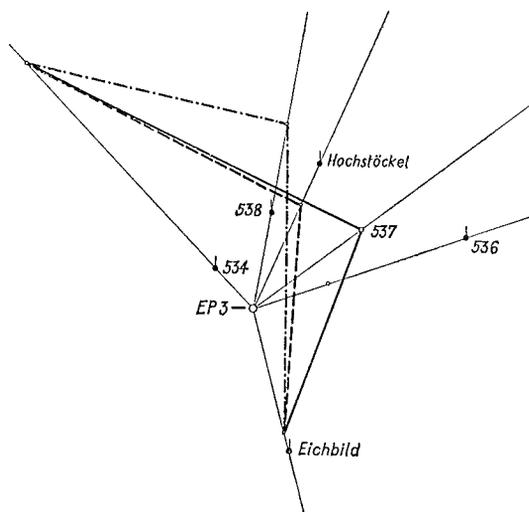
2. Ist hiebei die Mehrzahl der Punktlagefehler in der Größe von M_n , so genügt zur Bestimmung der optimalen Punktlage die analytische Berechnung der Kombination mit dem kleinsten mittleren Punktlagefehler M_1 .

3. Das Gewicht $p_{S'}$ der optimalen Punktlage beträgt im Durchschnitt etwa 30% des Gewichtes p_S des Minimum-Zentroides, wie dies aus einem Vergleich der Mittel der in der Tabelle ersichtlichen kleinsten und größten Gewichte $p_{S \min}$ bzw. $p_{S \max}$ mit den Mitteln der entsprechenden kleinsten und größten Gewichte $p_{S' \min}$ und $p_{S' \max}$ hervorgeht.

Selbstverständlich gelten diese Folgerungen nur unter der Annahme fehlerfreier Koordinaten der Ausgangspunkte. Da diese Forderung in der Praxis jedoch niemals restlos erfüllt sein dürfte und außerdem Rechenkontrollen erwünscht sind, wird man zur Bestimmung der optimalen Punktlage S' die analytische Berechnung der drei besten Schnittkombinationen und Mittelbildung nach Gewichten in allen Fällen vornehmen.

Aus einer Anzahl von mehreren hundert Näherungs-Zentroid-Bestimmungen, die die eben gefolgerten Tatsachen bestätigen, wird im folgenden Abschnitt dem Praktiker die Bestimmung der optimalen Punktlage eines solchen EP an Hand eines Beispiels veranschaulicht.

3. Beispiel zur rationellen Bestimmung der optimalen Punktlage



In der Abbildung ist der EP 3 durch sechs innere Richtungen bestimmt. Diese Darstellung geschieht jedoch in der Praxis zweckmäßig auf Pauspapier, um einerseits den Einschaltspunkt nach der Methode des graphischen Rückwärtseinschnittens auf der entsprechenden Übersicht der trigonometrischen Punkte 1 : 50 000 bequem einzeichnen und andererseits auch die Reziproktentfernungen auf den dargestellten Richtungen, über der Punktübersicht mit Hilfe des Felddiagramm-Maßstabes, durch Bleistiftspitzen kennzeichnen zu können. Zur Auswahl der drei besten Rückwärtseinschnitt-Kombinationen werden Reziprokdreiecke aufgesucht, die die geringsten mittleren Punktlagefehler erwarten lassen.

Da der Punktlagefehler vor allem verkehrt proportional der Höhe h_a ist, wobei $b < a$, wird man — etwas Übung vorausgesetzt — bloß nach Ansicht der Bleistiftspitzen die drei Reziprokdreiecke mit den kleinsten mittleren Punktlagefehlern finden. Ist dies geschehen, werden die beiden Seiten a und b der Reziprokdreiecke, wie in der Abbildung ersichtlich, gezeichnet. Hierauf werden die Verhältnisse der Seiten der einzelnen Dreiecke geschätzt und in dem entsprechenden Punktlagefehler-Felddiagramm für das Rückwärtseinschneiden der mittlere Punktlagefehler, wie bereits bekannt, auf Zentimeter abgelesen. So erhält man in dem gegebenen Beispiel der Abbildung für die drei Reziprokdreiecke ungefähr den gleichen mittleren Punktlagefehler von 1 cm.

Eine analytische Berechnung dieser drei ausgewählten Rückwärtseinschnitte hat folgende Koordinaten des EP 3 ergeben:

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1. Schnitt: vollausgezogen | $Y = 14\ 859,55\ \text{m}$ | $X = 5\ 332\ 855,12\ \text{m}$ |
| 2. Schnitt: strichpunktiert | $Y = 14\ 859,56\ \text{m}$ | $X = 5\ 332\ 855,11\ \text{m}$ |
| 3. Schnitt: strichliert | $Y = 14\ 859,56\ \text{m}$ | $X = 5\ 332\ 855,11\ \text{m}$ |

Da alle drei Schnitte als gleichwertig anzusehen sind, wurde daraus das einfache arithmetische Mittel gebildet:

$$Y = 14\ 859,56\ \text{m} \quad X = 5\ 332\ 855,11\ \text{m}$$

Demgegenüber stehen die Ergebnisse der strengen Ausgleichung

$$Y = 14\ 859,56\ \text{m} \quad X = 5\ 332\ 855,10\ \text{m}$$

Ein Vergleich der Koordinaten zeigt im Y vollkommene Übereinstimmung und im X eine Abweichung von 1 cm. Diese Koordinatenstreuung steht wieder im Einklang mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2 und zeugt zugleich von der Güte der Koordinaten der als Ausgang verwendeten Festpunkte.

4. Zusammenfassung

Das in vorliegender Abhandlung dargestellte Verfahren zur rationellen Bestimmung einer optimalen Punktlage beim mehrfachen Vorwärts- bzw. Rückwärtseinschnitt eines EP besteht darin, daß man mit Hilfe der bezüglichen Punktlagefehler-Diagramme — beim Rückwärtseinschnitt außerdem unter Zugrundlegung der Reziprokdreiecke — die drei Schnitte mit den geringsten mittleren Punktlagefehlern auswählt und die analytische Berechnung sowie Mittelbildung der Schnittpunktkoordinaten nach Gewichten durchführt.

Der Vorgang wird erfahrungsgemäß überall dort rationell anzuwenden sein, wo es sich um eine rasche, anschauliche, den Genauigkeitsanforderungen der Praxis gerecht werdende Bestimmung von nicht zusammenhängenden EP handelt. Überall dort jedoch, wo eine Netzeinschaltung möglich und daher am Platze ist, wird eine elektronische Berechnung rationeller sein.

Abschließend sei berichtet, daß die vollständige Bestimmung der optimalen Punktlage eines EP, also einschließlich der Auswahl der besten Schnitte, der Berechnung mit Hilfe einer Doppelrechenmaschine und der Mittelbildung der Schnittpunktkoordinaten nach Gewichten, beim mehrfachen Rückwärtseinschnitt in ungefähr einer Stunde erledigt werden kann. Für die vollständige Berechnung der optimalen Punktlage beim mehrfachen Vorwärtseinschnitt wird durchschnittlich eine halbe Stunde benötigt.

Literatur:

- [1] *Dörrie, Heinrich*: Vektoren, München und Berlin 1941, § 10. Das Zentroid, S. 60–69.
 [2] *Smetana, Walter*: Das „Zentroid“ als wahrscheinlichste Punktlage in fehlerzeigenden Figuren der trigonometrischen Punktbestimmung, *ÖZV* 42 (1954), Nr. 6, S. 167–171.
 [3] *Mitter, Josef*: Zur graphischen Punktbestimmung, *ÖZV* 47 (1959), Nr. 2, S. 49–59.
 [4] *Smetana, Walter*: Graphisch-mechanische Ermittlung maximaler Koordinatenstreuungen bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Rückwärtseinschnittes, *ÖZV* 48 (1960), Nr. 5, S. 160–165.

Genauigkeit der ersten Meßtisch-Katastralvermessung in Österreich

Von *Karl Ulbrich*, Wien

(*Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen*)

1. Einleitung

In der österreichischen Reichshälfte der österreichisch-ungarischen Monarchie wurde durch das Grundsteuerpatent, das von *Kaiser Franz I.* am 23. Dezember 1817 unterzeichnet worden ist, die gesetzliche Grundlage für den sogenannten „Stabilen Kataster“ geschaffen. Er stellt die erste technisch und fachlich fundierte Katastralvermessung Österreichs dar. In den 70er-Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde diese erste Meßtisch-Katastralvermessung im Zuge der Revision des Grundsteuerkatasters reambuliert und im Jahre 1883 durch das Evidenzhaltungsgesetz die rechtliche Grundlage für eine moderne Fortführung der Katastraloperate und damit auch der Katastralmappe geschaffen. Seit dieser Zeit wird durch periodische Fortführungsmessungen die Katastralmappe evident gehalten. Im Laufe der Jahrzehnte wurden die Katastralmappen fallweise neu reproduziert, um nach Möglichkeit den neuesten Stand aufzuweisen.

Aus diesem Entwicklungsgang ergibt sich, daß indirekt in allen Fällen, wo keine Neuvermessung durchgeführt worden ist, noch immer die erste Katastralvermessung die Mappengrundlage bildet. Deshalb ist es von fachlicher Bedeutung, die Genauigkeit der ersten Meßtisch-Katastralvermessung zu ermitteln.

2. Durchführung der ersten Katastralvermessung

Zur Beurteilung der Genauigkeit und fachlichen Kritik der Genauigkeitsergebnisse wird die Durchführung der ersten Katastralvermessung geschildert. Sie stützt sich auf die Militärtriangulierung, die vom damaligen Generalquartiermeisterstab ausgeführt worden ist [1]. Für die katastralen Zwecke wurde ab 1817 im Anschluß daran eine trigonometrische Katastraltriangulierung durchgeführt. Sie dauerte bis 1858 und hatte das Ziel, etwa drei Triangulierungspunkte je Quadratmeile als Ausgang für die anschließende graphische Triangulierung zu schaffen.

Die graphische Triangulierung stellt als Netz 4. Ordnung die Detailtriangulierung für die Meßtischaufnahme dar. Zur Erhöhung der Genauigkeit dieser graphischen Triangulierung wurden die Triangulierungsblätter nicht auf Holzplatten, sondern auf Glasplatten aufgespannt und geschliffene Stahlnadeln verwendet. Die graphische Triangulierung wurde im Maßstab 1 : 14.400 durchgeführt. Für die Detailaufnahme mußten die graphisch abgenommenen Koordinaten im Maßstab 1 : 2880, also auf das Fünffache vergrößert, dargestellt werden. Deshalb durften die Triangulierungs-