Über die Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung für das Außenraumpotential an der Erdoberfläche

Helmut Moritz [1]

[1] *Graz, Vogelweiderstraße 27*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **49** (1), S. 11–15

1961

Über die Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung für das Außenraumpotential an der Erdoberfläche

Von *Helmut Moritz*, Graz

I

Das Anziehungspotential im Außenraum der Erde läßt sich bekanntlich in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln, die im Äußeren der kleinsten Kugel um den Koordinatenursprung (Erdschwerpunkt), welche die Erde ganz umschließt, überall konvergiert. Die Konvergenz der Reihe an der Erdoberfläche ist sehr umstritten; manche Autoren betrachten sie dort als konvergent, die meisten aber als divergent. Ein einwandfreier Beweis, der darüber entschieden hätte, ist dem Verfasser nicht bekannt. Es wird daher hier ein allgemeines Konvergenzkriterium für derartige Fälle angegeben. Die Verallgemeinerung auf das gesamte Schwerepotential, also die Berücksichtigung der Fliehkraft, wird natürlich keine Schwierigkeiten bieten. Mit Hilfe des Konvergenzkriteriums wird schließlich die Divergenz der genannten Reihe an der Erdoberfläche bewiesen.

Zunächst die Problemstellung, wobei wir kurz an Bekanntes erinnern. Wir betrachten der Allgemeinheit wegen anstatt der Erde einen beliebigen Körper S und gehen von der üblichen Formel für das Anziehungspotential

$$V = f \int \frac{dm}{l} \qquad \ldots (1)$$

aus, in der f die Gravitationskonstante, dm das Massenelement des Körpers und l der Abstand von dm vom Aufpunkt P ist; die Integration ist über den ganzen Körper zu erstrecken. Nun ist mit den Bezeichnungen der Abb. 1 $l^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma$ und daher

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}.$$

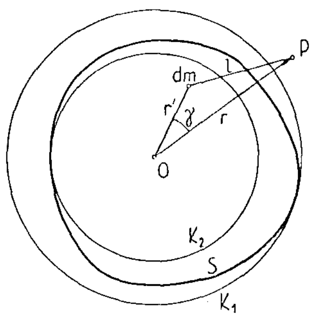

Abb. 1

Dieser Ausdruck kann in eine nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden:

$$\frac{r}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma),$$

worin die $P_n(\cos\gamma)$ die *Legendre*schen Polynome bedeuten. Es wird also

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma). \qquad \ldots (2)$$

Diese Reihe kann man in (1) einsetzen und gliedweise integrieren. r ist für die Integration als Konstante zu betrachten, so daß die Potenzen $\frac{1}{r^{n+1}}$ vor das Integralzeichen gezogen werden dürfen. Wir finden

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}} \text{ mit } Y_n = f \int r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm. \qquad \ldots (3)$$

Voraussetzung für die gliedweise Integration ist nun die Konvergenz der Reihe (2). Diese konvergiert, wie sich zeigen läßt, nur für $\frac{r'}{r} < 1$ [1]), d. h. beständig nur für einen Aufpunkt P im Äußeren der Kugel K_1. Liegt P im Inneren von K_1, so gibt es Punkte mit $r' > r$, in denen der Integrand divergiert, so daß die gliedweise Integration dort strenggenommen unzulässig ist.

Daraus glaubte man manchmal schließen zu dürfen, daß die Reihe (3) im Inneren von K_1 und damit auf der Körperoberfläche ebenfalls divergieren müsse. Nun weiß man aber, daß man durch rein formale gliedweise Integration einer divergenten Reihe sehr wohl eine konvergente erhalten kann. Der Schluß von der Divergenz von (2) auf die von (3) ist daher nicht richtig.

II

Ein sehr instruktives Beispiel dafür, daß die Reihe (3) auf der ganzen Körperoberfläche konvergieren kann, verdanken wir *K. Jung* [3]. Wir betrachten ein homogenes abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a, b und der Masse M

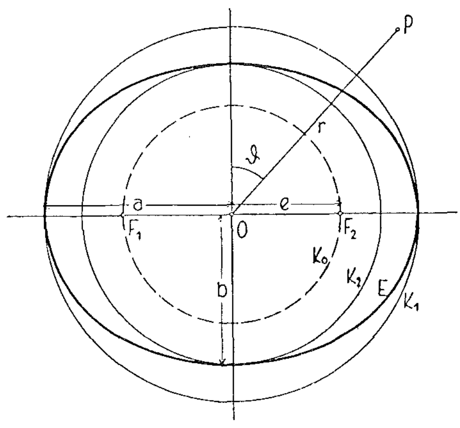

Abb. 2

(s. Abb. 2). Die Kugelfunktionsentwicklung für dessen Außenraumpotential lautet

$$V = \frac{fM}{r} + 3\,fM \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(a^2-b^2)^k}{(2k+1)(2k+3)} \cdot \frac{P_{2k}(\cos\vartheta)}{r^{2k+1}} \quad \ldots \ (3\,\mathrm{a})$$

(vgl. z. B. auch [2], S. 300). Diese Reihe konvergiert für $r > \sqrt{a^2-b^2} = e$ (mit $2e = \overline{F_1 F_2}$), wie man durch Anwendung der Majorantenmethode (es ist stets $P_n(\cos\vartheta) \leq 1$) und des Quotientenkriteriums leicht erkennt. Sie konvergiert also überall außerhalb der Kugelfläche K_0, auf der die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 liegen. Liegt diese Kugel ganz im Inneren des Ellipsoides, was bei nicht allzustarker Abplattung $\left(\alpha = \frac{a-b}{a} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq \frac{1}{3{,}4}\right)$ zutrifft, so konvergiert die Reihe (3a) auf der ganzen Oberfläche des Ellipsoides.

---

[1]) Genauer ausgedrückt: ihr Konvergenzradius ist $\frac{r'}{r} = 1$.

Aber sie konvergiert nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Inneren des Ellipsoides, soweit es außerhalb K_0 liegt. Daraus darf man jedoch nicht etwa schließen, daß sie dort das Innenraumpotential darstellt. Eine Kugelfunktionsreihe kann nämlich nur eine harmonische Funktion, d. h. eine Lösung der *Laplace*schen Gleichung $\triangle V = 0$, sein, während das Innenraumpotential bekanntlich die *Poisson*sche Gleichung $\triangle V = -4\pi f \rho$ (ρ...Massendichte) erfüllt. Die Reihe (3a) (und natürlich auch die allgemeine Form (3)) liefert daher im Masseninneren die sogenannte analytische Fortsetzung des Außenraumpotentials (vgl. [4]), die wie das Außenraumpotential selbst eine harmonische Funktion ist. Für später sei erwähnt, daß beim homogenen Ellipsoid diese analytische Fortsetzung im Raume zwischen K_0 und E überall regulär ist, aber in den beiden Brennpunkten F_1, F_2 singuläre Punkte hat (was ersichtlich mit der Divergenz von (3a) innerhalb K_0 zusammenhängt).

Formel (3a) zeigt noch folgenden bemerkenswerten Umstand. Sie enthält die beiden Halbachsen a, b nur in Form der Differenz $a^2 - b^2 = e^2$. Die Schar der Rotationsellipsoide, für die diese Differenz und damit die lineare Exzentrizität e gleich ist und deren Mittelpunkt und Rotationsachsen zusammenfallen, heißen bekanntlich konfokale Ellipsoide. Man sieht also, daß alle homogenen konfokalen Rotationsellipsoide mit gleicher Gesamtmasse M dasselbe Außenraumpotential haben — ein bekannter Satz der Potentialtheorie. Man kann daher das gegebene Rotationsellipsoid durch ein kleineres konfokales von gleicher Masse ersetzen, ohne daß sich das Potential im Außenraum ändert.

III

Nach diesem Beispiel kommen wir zur Lösung des Konvergenzproblems. Wie wir eben gesehen haben, ist der Körper, der das betrachtete Außenraumpotential erzeugt, gar nicht so wesentlich — ein Ellipsoid kann durch ein kleineres konfokales ersetzt werden (oder z. B., wie man weiß, eine Kugel durch einen Massenpunkt). Damit ist indirekt die Unmöglichkeit eines Konvergenzkriteriums bewiesen, das explizit von der Gestalt des Körpers abhängt — wie eben etwa Konvergenz außerhalb der kleinsten, den Körper ganz umschließenden Kugel K_1, Divergenz innerhalb. Aus dem gleichen Grund ist auch die Art der Herstellung der Kugelfunktionsentwicklung (3) durch Integration von (2) nicht wesentlich — (3) kann ja auch auf anderen Wegen erhalten werden, welche die Integration einer divergenten Reihe vermeiden.

Was für die Kugelfunktionsentwicklung und damit für Konvergenzbetrachtungen allein von Bedeutung ist, ist die harmonische Funktion, die aus dem Außenraumpotential zusammen mit seiner analytischen Fortsetzung ins Masseninnere besteht. Eine im Äußeren einer Kugel überall reguläre harmonische Funktion — und nur eine solche — kann nämlich, wie die Potentialtheorie lehrt, stets in eine außerhalb dieser Kugel konvergente Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Um also die Konvergenz einer solchen Reihe für das Außenraumpotential an der Körperoberfläche zu untersuchen, müssen wir es mindestens bis zur Kugel K_2, der größten Kugel um 0, die noch ganz im Inneren des Körpers liegt (vgl. Abb. 1 u. 2, man beachte den Unterschied gegenüber K_1!), analytisch fortsetzen. Ist diese Fortsetzung überall regulär, so konvergiert die Reihe (3) außerhalb K_2 und stellt im

Äußeren und an der Oberfläche des Körpers das Außenraumpotential, im Inneren aber, soweit sie konvergiert, die analytische Fortsetzung des Außenraumpotentials dar. Wir fassen also zu folgendem *Satz* zusammen:

Die Kugelfunktionsentwicklung mit dem Ursprung 0 für das Außenraumpotential eines Körpers konvergiert dann und nur dann im ganzen Außenraum und an der Körperoberfläche, wenn das Außenraumpotential bis zur größten Kugel um 0, die noch ganz im Inneren des Körpers liegt, überall regulär analytisch fortsetzbar ist[2].

Dieser Satz gilt zunächst nur für das reine Anziehungspotential. Um das gesamte Schwerepotential W zu erhalten, haben wir noch das Fliehkraftpotential $\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2+y^2)$ — die z-Achse sei Drehachse — hinzuzufügen:

$$W = V + \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2+y^2).$$

In den bereits verwendeten Koordinaten r, ϑ ist $x^2+y^2=r^2\sin^2\vartheta$, daher erhalten wir mit (3)

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta.$$

Da in Kugelfunktionen ausgedrückt

$$\sin^2\vartheta = \frac{2}{3}\Big[1 - P_2(\cos\vartheta)\Big]$$

ist, so wird schließlich

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \frac{\omega^2 r^2}{3}\Big[1 - P_2(\cos\vartheta)\Big] \quad \ldots (4)$$

die Kugelfunktionsentwicklung[3] von W. Das Fliehkraftpotential ist aber in jedem Punkt des Raumes regulär. Es fügt daher zu (3) keine neue Singularität hinzu und (4) konvergiert genau dann, wenn auch (3) konvergent ist[4]. Wenn wir als analytische Fortsetzung des äußeren Schwerepotentials ins Masseninnere die Summe aus der analytischen Fortsetzung des Anziehungspotentials und aus dem Fliehkraftpotential definieren, so gilt unser Satz wörtlich auch dann, wenn darin unter Außenraumpotential das ganze Schwerepotential verstanden wird, also nicht nur für die Entwicklung (3), sondern auch für (4). Umgekehrt kann man sich für die Konvergenzuntersuchung von (4) auf die Betrachtung des reinen Anziehungspotentials (3) beschränken.

---

[2]) Auf unser Beispiel, das homogene Rotationsellipsoid, angewendet, bedeutet das: Konvergenz auf der ganzen Oberfläche, wenn die Kugel K_2 die Brennpunkte (die singulären Punkte der analytischen Fortsetzung) in ihrem Inneren enthält, also die Kugel K_0 (s. Abb. 2) umschließt. Das ist dann der Fall, wenn K_0 ganz im Inneren des Ellipsoides liegt.

[3]) Die übliche Bezeichnung von (4) als Kugelfunktionsentwicklung läßt sich daraus erklären, daß diese Gleichung für $r = 1$ eine nach Kugelflächenfunktionen entwickelte Funktion auf der Oberfläche der Einheitskugel darstellt; sie ist insoferne nicht ganz richtig, als der vom Fliehkraftpotential herrührende Teil von (4) nicht harmonisch ist (es ist deshalb $\triangle W = 2\,\omega^2$) und daher nicht aus (räumlichen) Kugelfunktionen im eigentlichen Sinne besteht.

[4]) Allerdings reicht im Gegensatz zu V der Definitionsbereich von W aus physikalischen Gründen nur bis zu jener Grenzniveaufläche, an derem Äquator die Schwerkraft verschwindet (vgl. [5], S. 396).

IV

Nun wenden wir schließlich unser allgemeines Konvergenzkriterium auf die Erde an, die uns in erster Linie interessiert. Hier ist aber die reguläre Fortsetzbarkeit des Außenraumpotentials keineswegs selbstverständlich, wie man vielleicht intuitiv annehmen könnte. Um das zu erkennen, wollen wir zunächst das Problem ganz vereinfachen. Wir betrachten die Erde als homogene Kugel K, der ein einziger

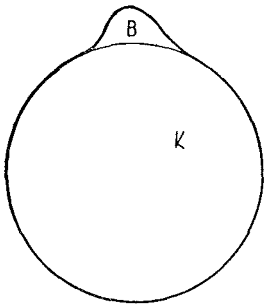

Abb. 3

Berg B von der gleichen Dichte aufgesetzt ist (s. Abb. 3). Das Anziehungspotential V — auf das wir uns ja beschränken dürfen — setzt sich also zusammen aus dem der Kugel V_K und dem des Berges V_B: $V = V_K + V_B$. Betrachten wir nun die Fortsetzbarkeit von V ins Innere des Berges. Für V_K ist dieses Gebiet Außenraum, es ist also dort regulär. V_B hingegen ist ins Berginnere nicht überall regulär fortsetzbar, da nach einem Satz der Potentialtheorie die analytische Fortsetzung des Außenraumpotentials (hier V_B) ins Masseninnere (hier Innere des Berges) stets irgendwo eine Singularität haben muß[5]).

Daher ist auch die analytische Fortsetzung von $V = V_K + V_B$ im Berginneren irgendwo singulär. Da aber die Erde mit ihren vielen Bergen und Massenunregelmäßigkeiten noch ungleich komplizierter ist als dieses einfache Beispiel, so ist die Unmöglichkeit der regulären analytischen Fortsetzung des Außenraumpotentials bis zur größten ganz im Erdinneren liegenden Kugel K_2 um den Koordinatenursprung (Erdschwerpunkt) ersichtlich, woraus nach unserem Satz die Divergenz der Reihen (3) und (4) auf der Erdoberfläche folgt. Wäre die Erde jedoch ein homogenes Rotationsellipsoid oder auch eines mit konzentrischer Schichtung nach *Clairaut*, so wären diese Entwicklungen konvergent.

Herrn Prof. *Ledersteger* ist der Verfasser für viele wertvolle Anregungen und Hinweise zu besonderem Dank verpflichtet.

Literatur:

[1] *C. F. Baeschlin:* Lehrbuch der Geodäsie, Zürich 1948.

[2] *F. Hopfner:* Physikalische Geodäsie, Leipzig 1933.

[3] *K. Jung:* Ein Beispiel zur Entwicklung des Raumpotentials nach Kugelfunktionen, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 29 (1931), S. 346, und
Handbuch der Physik, Bd. 47, Berlin 1956, S. 543.

[4] *O. D. Kellogg:* Foundations of Potential Theory, Berlin 1929.

[5] *Jordan-Eggert-Kneißl:* Handbuch der Vermessungskunde, Bd. V, bearbeitet von *K. Ledersteger*, Stuttgart [10]1956 und 1959.

---

5) Ist z. B. der Körper eine homogene Kugel, so wird diese analytische Fortsetzung im Mittelpunkt unendlich.