

Paper-ID: VGI\_196017



## Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Paßpunkten

Franz Halwax <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (6), S. 180–191

1960

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Halwax_VGI_196017,  
  Title = {Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Pa{\ss}punkten},  
  Author = {Halwax, Franz},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {180--191},  
  Number = {6},  
  Year = {1960},  
  Volume = {48}  
}
```



Mit der Lösung

$$k = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\omega), \quad \dots (20)$$

in welcher  $P_n(\omega)$  das Legendresche Polynom bedeutet, erhalten wir die bekannte *Stokes'sche Funktion*

$$k = \frac{1}{4\pi} \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\omega}{2} - 6 \sin \frac{\omega}{2} + 1 - \cos \omega \left[ 5 + 3 \ln \left( \sin^2 \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\omega}{2} \right) \right] \right\}. \quad (21)$$

Bei der praktischen Anwendung kann die Lösung von *Stokes* als erste Näherung verwendet werden. Die allgemeine Lösung wird nach Auflösung des Systems mit dem rechten Glied der Gleichung (13) erhalten, das auf Grund der Näherungslösung verbessert worden ist.

*Alle Lösungen werden ohne Kenntnis der Schwereanomalien erhalten.*

Die endgültigen Höhenkorrekturen werden nach der Formel

$$\frac{T}{\gamma_z} = \frac{1}{\gamma_z} \iint_S k \Delta g dS$$

berechnet. Über die Lotabweichung siehe Bjerhammar, Trans. R. I. T., Nr. 149.

#### Schrifttum:

*Arnold Kurt:* Die Bestimmung der Geoidundulationen nach dem Greenschen Satz, Z. f. V., 1956, Heft 10.

*Bjerhammar, Arne:* A General Method for an Explicit Determination of the Shape of the Earth from Gravimetric Data, Trans. of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Nr. 149, 1959

*de Graaff-Hunter, James:* The Figure of the Earth from Gravity Observations and the Precision Obtainable, Phil. Trans. of the Royal Society, London, Vol. 134, 1935, S. 377–431.

*Hirvonen, Reino A.:* On the Precision of the Gravimetric Determination of the Geoid, Trans. of the American Union, Vol. 37, No. 1, 1956.

## Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Paßpunkten

Von Franz Halwax, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

In dieser Veröffentlichung sollen die Ergebnisse einer kleinmaßstäblichen Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Paßpunkten kurz zusammengestellt werden. Die Bearbeitung wurde über Initiative und im Auftrag von Herrn Präsidenten Dr. eh. Ing. K. Neumaier im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen durchgeführt.

### 1. Aufgabenstellung

Das in Abb. 1 dargestellte Gebiet im Ausmaß von rund 2300 km<sup>2</sup> wurde mit einer Reihenbildkammer RC5 mit Objektiv  $f = 11,5$  cm, Aviogon, in einer Flughöhe von absolut 4600 m befliegen. Dies entspricht, da es sich um geringe Geländehöhen handelt, einem mittleren Bildmaßstab  $M_b \sim 1 : 40\,000$ . Der Ostteil (östlich

Aerotriangulierung Teil Nord

Maßstab 1:300.000

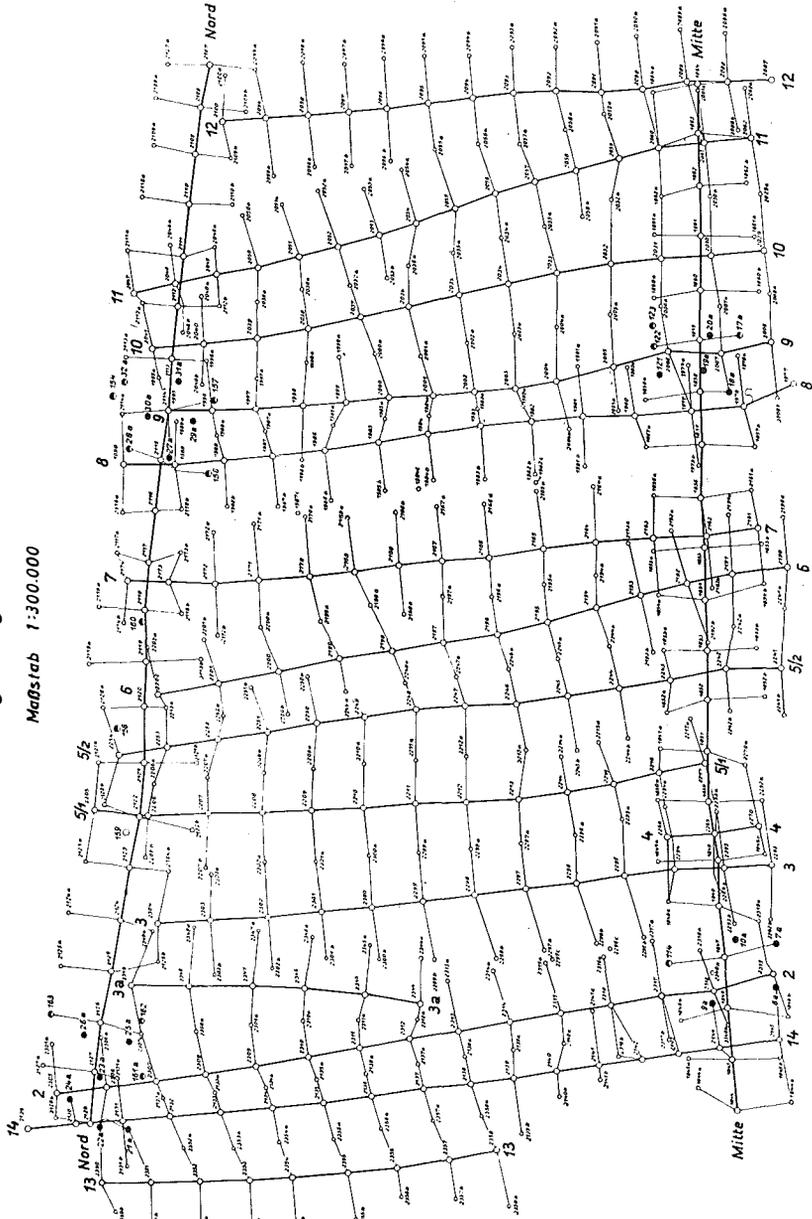


Abb. 1: Flugstreifenübersicht

von Streifen 9 der Flugstreifenübersicht) weist große Höhenunterschiede auf, während das von den vier Paßpunktneestern eingeschlossene Gebiet ungefähr eine schiefe Ebene darstellt.

Gegeben waren vier Paßpunktneester. In Abb. 1 sind die Paßpunkte voll (●), die zusätzlichen, barometrisch bestimmten Höhenpunkte zur Hälfte (◐) ausgefüllt. In jedem Paßpunktneest wurde ein lokales System ebener rechtwinkliger Koordinaten eingeführt, dessen x-Achse jeweils nach geographisch Nord wies. Die Nordrichtung war dabei astronomisch, der Maßstab des Systems mit einer 2-m-Basislatte von Wild festgelegt worden. In jedem Paßpunktneest wurden von einem Punkt die geographischen Koordinaten  $\varphi$ ,  $\lambda$  und das Azimut  $\alpha$  mit einem mittleren Fehler  $m_\varphi = m_\lambda = \pm 2''$  und  $m_\alpha = \pm 3''$  bestimmt. Die durchschnittlichen mittleren Punkt-lage- und Höhenfehler innerhalb der Paßpunktneester waren  $m_L = m_H = \pm 30$  cm, die durchschnittlichen mittleren absoluten Höhenfehler in den Paßpunktneestern II und V infolge Pegelbeobachtungen  $m_H = \pm 40$  cm, in den Paßpunktneestern III und VI auf Grund barometrischer Höhenmessungen  $m_H = \pm 2$  m. Weiters waren die Koordinaten aller Punkte des Streifens „Mitte“ aus einer vorangegangenen Bearbeitung festgelegt.

Gesucht waren Lagekoordinaten zur Herstellung eines Bildplanes 1:25000 mit einer Nachbargenauigkeit von  $m_L = \pm 4$  m sowie Höhen und deren Genauigkeit. Ferner wurden ein Gitterplan nach geographischen Koordinaten mit einer Maschenweite von einer Bogenminute und Blattschnittkoordinaten für schachbrettartige Blätter im ungefähren Format  $50 \times 50$  cm verlangt.

## 2. Aerotriangulierung

Die Rahmenstreifen Mitte, Nord, 2 und 9 wurden im Hin- und Rückgang, alle anderen Streifen nur im Hingang in einem Auswertegerät Wild A7 im Maßstab 1:15000 trianguliert.

## 3. Schaffung eines einheitlichen, ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems mit der X-Achse in $\lambda_0$

Die Schaffung eines einheitlichen Koordinatensystems erfordert die Berechnung der Meridiankonvergenz  $\gamma$  jedes Paßpunktneestes gegenüber einem für alle vier Paßpunktneester gewählten Bezugsmeridian  $\lambda_0$  nach

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi + \dots \quad \dots \quad (1)$$

mit dem Ergebnis:

7 a (PP Nest II)	$\gamma_{II} = -498^{cc} (= -2'41'')$
19 a (PP Nest III)	$\gamma_{III} = +326^{cc} (= +1'45'')$
23 a (PP Nest V)	$\gamma_V = -736^{cc} (= -3'59'')$
27 a (PP Nest VI)	$\gamma_{VI} = +241^{cc} (= +1'18'')$

Die Drehung der örtlichen Systeme um ihre Winkel  $\gamma$  ergab die Parallelstellung im einheitlichen System.

In der in Betracht kommenden geographischen Breite entsprechen der Genauigkeit  $m_\varphi = m_\lambda = \pm 2''$  rund 60 m. Die Auswertung und Ausgleichung der

Rahmenstreifen auf Grund von Maßstab und Richtung im Anfangs- und Endmodell lassen eine genauere Lage der Streifen erwarten, als es unter Verwendung der umgerechneten geographischen Koordinaten der Blockecken möglich wäre. Außerdem ist die absolute Lage des Gesamtblockes durch den Streifen „Mitte“ aus der vorangegangenen Arbeit bereits festgelegt und daher eine bestmögliche Einpassung auf die vier astronomisch bestimmten Punkte nicht mehr notwendig.

Trotzdem wurde nach Durchführung der Ausgleichung aus zwei Gründen die Umrechnung der geographischen Koordinaten in ebene Koordinaten vorgesehen. Erstens deshalb, weil für den Südteil ebenfalls die Umrechnung durchgeführt worden ist, und zweitens der Bearbeiter an der für ihn seltenen Aufgabenstellung interessiert war. Als Abbildung wurde ein konformer Gauß-Krüger-Meridianstreifen gewählt.

#### 4. Die Vorbereitung der Streifenausgleichung

Auswertung und Ausgleichung wurden im Meridianstreifensystem durchgeführt, teilweise aber auch im Maschinensystem, und zwar dort, wo die Streifenrichtung von der Nordrichtung abwich. Um den Folgen einer Fehleranhäufung wegen der Auf- und Abrundungen von vornherein zu begegnen, wurden die Rechnung und Ausgleichung auf Dezimeter durchgeführt.

Für die Ausgleichung wurden der Maßstab und die astronomisch gewonnene Streifenrichtung im Anfangs- und Endmodell verwendet.

Nachstehende Korrekturen wurden quer zur Streifenrichtung (Maschinen-y-Richtung) angebracht.

Die erste y-Korrektur  $\Delta y_1^P$  erfolgte wegen des Maßstabfehlers  $dm_x$ , wobei zwischen den Maßstäben  $dm_A$  und  $dm_E$  der Anfangs- und Endmodelle graphisch linear interpoliert wurde.

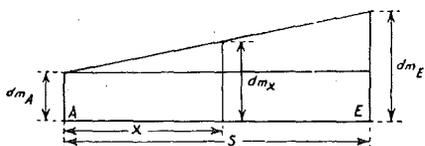


Abb. 2

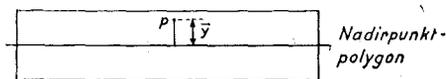


Abb. 3

$$\left. \begin{aligned} dm_x &= dm_A + \frac{dm_E - dm_A}{s} \cdot x, \\ \Delta y_1^P &= \bar{y}_P \cdot dm_x \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Die zweite y-Korrektur  $\Delta y_2^P$  erfolgte wegen der seitlichen Abweichung von der Streifenrichtung.

Die seitliche Abweichung, vorgegeben durch die Winkel  $O_A$  und  $O_E$  im Anfangs- und Endmodell, wurde durch einen Kreisbogen dargestellt angenommen, für den die Werte  $\Delta y_2^P$  an den End- und Viertelstellen berechnet wurden.

Die Kreisbogensehne schließt mit den Anfangs- und Endtangente den kleinen Winkels  $\alpha$  ein:

$$\alpha = \frac{O_E - O_A}{2} \dots (3)$$

Dann folgt aus Abb. 4:

$$\begin{aligned}
 \Delta y_E &\doteq s \cdot \operatorname{tg} \alpha \\
 \Delta y_{\frac{s}{4}} &\doteq \frac{s}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{16} \cdot \Delta y_E \\
 \Delta y_{\frac{s}{2}} &\doteq \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \cdot \Delta y_E \\
 \Delta y_{\frac{3s}{4}} &\doteq \frac{3}{4} s \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{3}{4} \alpha \right) = \frac{9}{16} \cdot \Delta y_E
 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

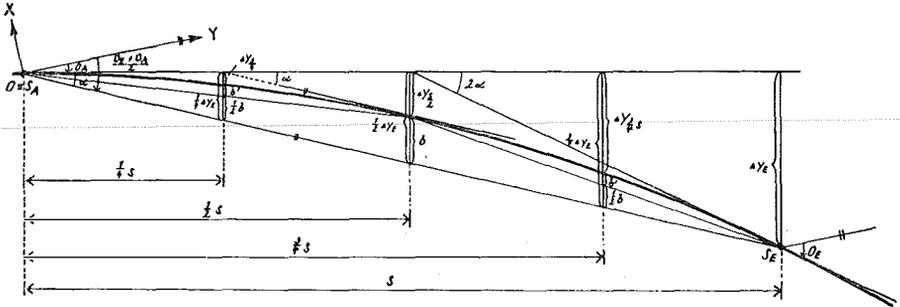


Abb. 4

In der Streifenrichtung wurden folgende Korrekturen vorgesehen:

Die erste  $x$ -Korrektur  $\Delta x_1^P$  wegen des Maßstabfehlers, wieder unter Annahme eines linearen Maßstabverlaufes nach (2).

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1^P &= x \frac{dm_A}{2} + \frac{x}{2} \left( dm_A + x \frac{dm_E - dm_A}{s} \right) = x dm_A + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dm_E - dm_A}{s} = \\
 &= x dm_A + x^2 \cdot k_1 \quad \dots (5)
 \end{aligned}$$

Die zweite  $x$ -Korrektur  $\Delta x_2^P$  aus der seitlichen Abweichung von der Streifenrichtung.

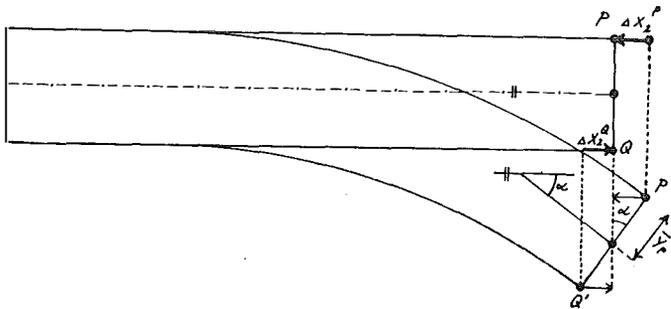


Abb. 5

$$\Delta x_2^P = \bar{y}_P \sin \alpha \doteq \bar{y}_P \operatorname{tg} \alpha = \bar{y}_P \cdot D_1 \quad \dots (6)$$

$D_1$  stellt den Differentialquotienten zur Kurve der seitlichen Abweichung dar. Um  $D_1$  einfach zu ermitteln, wurden die Änderungen der seitlichen Abweichung für

ein konstantes  $x$ -Intervall aufgetragen. Aus dieser „Änderungskurve“ konnte für jedes  $x$  das zugehörige  $D_1$  abgegriffen werden.

*Anmerkung:* Da das Hauptgebiet, wie erwähnt, ungefähr eine schiefe Ebene ist, wurde eine Lagekorrektur in der bzw. quer zur Streifenrichtung wegen der Höhenunterschiede im Zusammenhang mit der Aufbiegung, bzw. Verwindung nicht durchgeführt.

Anschließend wurde die Höhenausgleichung vorgenommen.

Die erste Höhenkorrektur  $\Delta H_1$  erfolgte wegen der Streifenaufbiegung.

Gegeben waren die Tangente der Aufbiegungskurve im Anfangs- und Endmodell und die Tatsache der schiefen Ebene für das Gebiet westlich von Streifen 9. Für den Streifen Nord standen noch zwei Höhenpunkte, für die Streifen 13 und 14 der Meeresspiegel zur Verfügung. Im einzelnen wurde bei der Ausgleichung folgendermaßen vorgegangen.

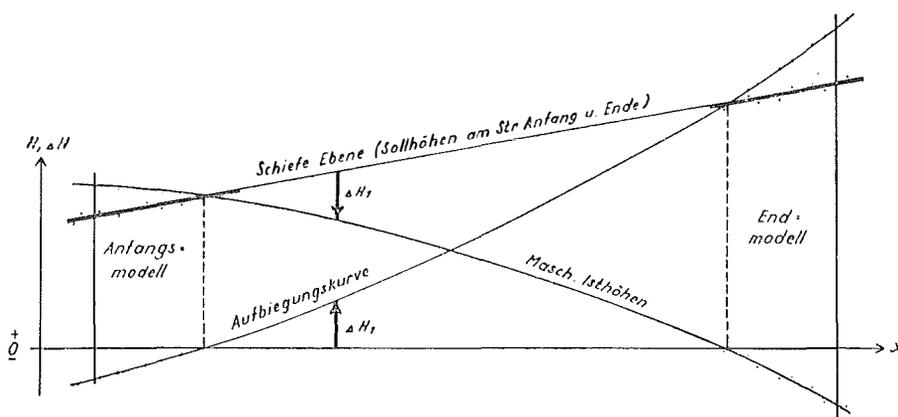


Abb. 6

a) Durch die aufgetragenen Maschinen-Isthöhen wurde graphisch eine Ist-Höhenkurve  $H_i = f(x)$  gelegt. . . . (7)

b) Durch die aufgetragenen Sollhöhen am Streifenanfang und -ende wurde die Sollhöhengerade

$$H_s = ax + b \quad \text{mit} \quad a = \frac{H_{SE} - H_{SA}}{x_E - x_A} \quad \text{und} \quad b = H_{SA} \quad . . . (8)$$

gezeichnet.

c) Die Differenz zwischen den Kurven a) und b) wurde als Aufbiegungskurve

$$\Delta H_1 = H_s - H_i \quad . . . (9)$$

gezeichnet.

d) Die Höhenpunkte aus Streifen Nord wurden berücksichtigt und ergaben eine geringfügige Abänderung der Aufbiegungskurve.

Um mit dem Verlauf der Aufbiegungskurve auch östlich vom Streifen 9 den wirklichen Verhältnissen möglichst gut zu entsprechen, wurde vor der Extrapolation ein mittlerer Aufbiegungskurvenverlauf bestimmt. Aus einer früheren Arbeit unter nahezu gleichen Verhältnissen bezüglich Bildmaßstab, Streifenlänge, Brennweite usw. wurde aus mehreren Streifen eine Mittelkurve der Aufbiegungen abgeleitet. Diese

Mittelkurve zeigte eine gute Übereinstimmung für die Streifen Mitte und Nord westlich von Streifen 9. Es ist klar, daß östlich vom Streifen 9 nur eine geringere Genauigkeit erzielt werden konnte. Auf die oben angegebene Art wurden jedoch die bestmöglichen Werte erhalten.

Die zweite Höhenkorrektur  $\Delta H_2$  geschah wegen Streifenverwindung.

a) Für Streifen Nord und Mitte wurde die Verwindung aus der Aufbiegung der Nord-Südstreifen entnommen.

b) Da die Verwindungskurve bei den unter a) genannten Streifen kontrolliert linear verläuft, konnte sie bei den restlichen Streifen durch einfache lineare Interpolation aus den Streifenenden festgelegt werden.

Die angegebene Ausgleichsmethode wurde an Hand eines aerotriangulierten Streifens mit ungefähr gleichen technischen Daten, wie Streifenlänge, Brennweite und Bildmaßstab, erprobt. Die Prüfung ergab bei einer Streifenlänge  $s = 33,3$  km:

a) für die Vergrößerung der Streifenlänge  $\Delta s$ , gerechnet nach (5) aus  $dm_A$  und  $dm_E$ , nur eine Abweichung  $d\Delta s = 0,04$  m gegenüber der Solllänge.

b) für die seitliche Abweichung am Streifenende  $\Delta y_E$ , gerechnet nach (4) aus  $O_A$  und  $O_E$ , einen Fehler  $d\Delta y_E = 2,0$  m gegenüber dem Sollwert aus früheren Ergebnissen.

Ferner wurden die Werte  $\Delta s$  und  $\Delta y$  an den Viertelstellen geprüft. Auch hier zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung. Maximal dürfte mit  $d\Delta s$  und  $d\Delta y$  von etwa 5 m zu rechnen sein. Das zeigt auch Abb. 8, wo bereits aus der Aerotriangulierung bestimmte Punkte verwendet wurden.

### 5. Die Durchführung der Streifenausgleichung

Für die im Hin- und Rückgang beobachteten Rahmenstreifen Mitte, 2, 9 und Nord wurden — bei Verwendung des selben Schwerpunktes je Paßpunktrest für die jeweils zwei in Frage kommenden Streifen — berechnet:

- $\Delta s$  aus (5)
- $\Delta y_E$  aus (4)

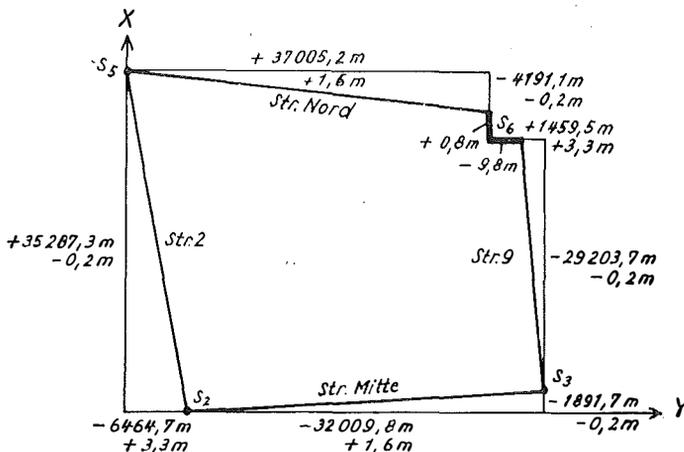


Abb. 7

und damit

c) die Koordinatendifferenzen  $\Delta X$  und  $\Delta Y$  im Uhrzeigersinn im Meridianstreifensystem. Das Ergebnis enthalten Abb. 7 und Tabelle 1. Der Rahmenschluß wurde nach  $S_6$  gelegt.

Streifen	$\Delta Y$	$\Delta X$
9	+ 1 459,5	- 29 203,7
Mitte	- 32 009,8	- 1 891,7
2	- 6 464,7	+ 35 287,3
Nord	+ 37 005,2	- 4 191,1
Schlußfehler	- 9,8	+ 0,8

Tabelle 1

Zum Vergleich der Rahmenschlußfehler für das 134 km lange Rahmenpolygon sei noch angeführt, daß die Ausgleichung des Südteiles die Rahmenschlußfehler  $\Delta Y = + 10$  m und  $\Delta X = - 15$  m ergeben hatte.

Zur Beseitigung der geringen Rahmenschlußfehler von  $\Delta Y = - 9,8$  und  $\Delta X = + 0,8$  m wurden die in Abb. 7 angeführten Verbesserungen angebracht. Dabei wurden die Ergebnisse des Nachbargebietes für  $S_2$  und  $S_3$  berücksichtigt.

Nach der Ausgleichung ergaben sich folgende Schwerpunktkoordinaten:

Schwerpunkt	$Y + 35\,000,0$	$X$
$S_2$	15 256,4	47 678,0
$S_3$	47 264,6	49 569,9
$S_5$	8 795,0	82 965,1
$S_6$	45 801,8	78 773,8

Tabelle 2

Die Füllstreifen wurden voneinander unabhängig wie die Rahmenstreifen wegen  $dm_A$ ,  $dm_E$  und  $O_A$ ,  $O_E$  verbessert, wobei die in den Rahmenstreifen bereits koordinierten Punkte angehalten wurden. Abb. 8 gibt eine Übersicht über die danach verbleibenden Lageabweichungen  $d\Delta s$  und  $d\Delta y_E$ . Sie ergaben sich aus:

$$d\Delta s = s' - s'' \quad . . . (10)$$

wobei  $s' = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$  aus den Schwerpunktkoordinaten des Anfangs- und Endmodelles berechnet wurde und nach (5)

$$s'' = s + \Delta s = s + s \frac{dm_A + dm_E}{2} \quad . . . (11)$$

$$d\Delta y_E = y' - y'' = y' - (y + \Delta y_E) = y' - \left( y + s \cdot \operatorname{tg} \frac{O_E - O_A}{2} \right) \quad . . . (12)$$

In Abb. 8 blieben die Anfangsmodelle aus Streifen „Mitte“ unverändert. Die Streifenende stellen die durch  $s''$  und  $y''$  gekennzeichneten Istlagen der Endmodell-schwerpunkte dar; die Fehlerkomponenten  $d\Delta s$  und  $d\Delta y_E$  zeigen zu den Sollagen hin. Das Ergebnis bestätigt erneut die Richtigkeit der Rahmenfestlegung und die Genauigkeit der Aerotriangulierung.

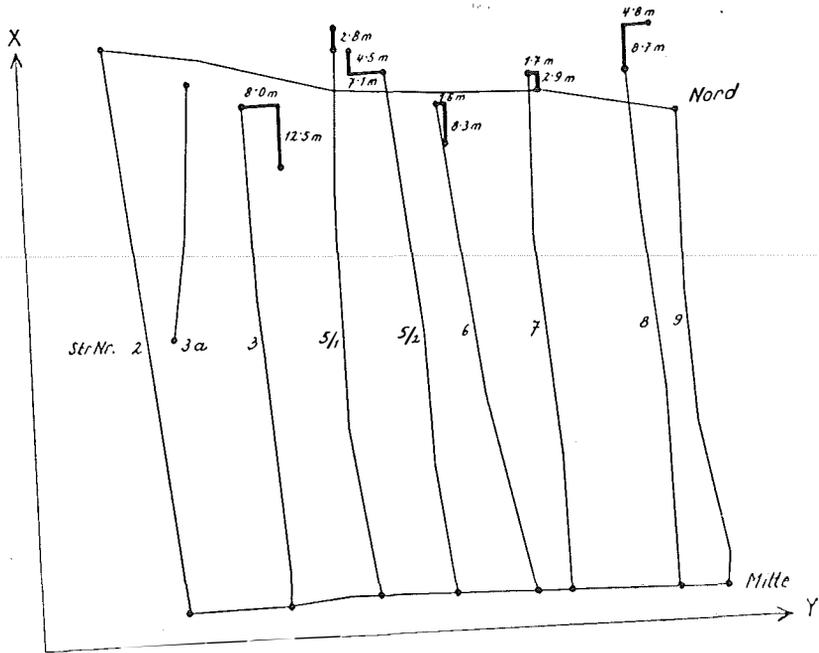


Abb. 8

Aus den Restfehlern  $d\Delta s$  und  $d\Delta y_E$  wurden verbesserte  $\Delta s$  und  $\Delta y_E$  ermittelt. Die verbesserten  $\Delta y$  und  $\Delta x$  Werte wurden nach (4) und (5) erhalten.

*Anmerkung:* Die Höhenberechnung erfolgte wie bei den Rahmenstreifen. Nach der Ausgleichung der Einzelstreifen auf Grund der Höhen der Anfangs- und Endmodelle wurden zur Feststellung und Berücksichtigung der Zusammenhänge benachbarter Streifen Profile gezeichnet.

Es zeigte sich ebenfalls wieder derart gute Übereinstimmung, daß nur wenige zusätzliche empirische Korrekturkurven notwendig waren, die systematisch verlaufen und aus denen sich nur kleine Verbesserungen ergaben.

#### 6. Die erreichte Genauigkeit

Die absolute Genauigkeit innerhalb des Meridianstreifensystems ist gegeben durch die Rahmenschlußfehler und durch die Schlußfehler der Füllstreifen innerhalb des Rahmens. Sie beträgt ungefähr

$$m_L = \pm 5,0 \text{ m. Größte Spannung innerhalb des Gesamtblockes} = 10 \text{ m.}$$

$$m_H = \pm 7,5 \text{ m. „ „ „ „ „ „ = 15 \text{ m.}$$

Die Nachbargenauigkeit ist gegeben durch die Differenzen in Lage und Höhe in allen Punkten, die aus mehreren Streifen ermittelt wurden. Von 197 im Westteil mehrfach erhaltenen Punkten wurden jeweils die zwei Extremwerte zur Differenzbildung verwendet. 11 Punkte kamen in 4, 44 in 3, 142 in 2 Streifen vor. Um auf einfache Art einen Näherungswert für den Punktlagefehler zu erhalten, wurde statt

$$\Delta L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \text{ der größere Wert von } \frac{\Delta X}{2} \text{ und } \frac{\Delta Y}{2} \text{ als } \frac{\Delta L}{2}$$

gewählt. Zur Veranschaulichung der Wirkung der Profillegung zeigt die nachfolgende Tabelle die Häufigkeit der halben Differenzen vor und nach Anbringung der zusätzlichen Korrekturen.

<i>Punktlage- und Höhenfehler vor und nach der Profillegung (Westteil)</i>									
$\left  \frac{\Delta}{2} \right $ in Meter	Lagefehler $\frac{\Delta L}{2}$				Höhenfehler $\frac{\Delta H}{2}$				
	vor		nach		vor		nach		
	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%	
$0 \leq \left  \frac{\Delta}{2} \right  \leq 0,5$	86	43,7	128	65,0	128	65,1	158	80,3	
$0,5 < \left  \frac{\Delta}{2} \right  \leq 1,0$	68	34,5	58	29,4	46	23,3	31	15,7	
$1,0 < \left  \frac{\Delta}{2} \right  \leq 1,5$	39	19,8	10	5,1	14	7,1	7	3,5	
$1,5 < \left  \frac{\Delta}{2} \right  \leq 2,0$	4	2,0	0	0,0	6	3,0	1	0,5	
$2,0 < \left  \frac{\Delta}{2} \right $	0	0,0	1	0,5	3	1,5	0	0,0	

Tabelle 3

Die daraus für den Westteil und in analoger Art für den Ostteil ermittelten durchschnittlichen und nach

$$m = 1,2533 d \quad \dots (13)$$

berechneten mittleren Fehler betragen in Meter:

	<i>Westteil</i>			<i>Ostteil</i>			
	$d_{ger.}$	$m_{theor.}$	$m_{ger.}$	$d_{ger.}$	$m_{theor.}$	$m_{ger.}$	
aus $\frac{\Delta L}{2}$	1,3	$\pm 1,6$	$\pm 1,6$	1,6	$\pm 2,0$	$\pm 2,1$	vor
	0,9	$\pm 1,1$	$\pm 1,1$	1,0	$\pm 1,1$	$\pm 1,3$	nach
aus $\frac{\Delta H}{2}$	1,0	$\pm 1,3$	$\pm 1,4$	0,8	$\pm 1,0$	$\pm 1,1$	vor
	0,7	$\pm 0,9$	$\pm 0,9$	0,7	$\pm 0,8$	$\pm 1,0$	nach

Tabelle 4

Der Vergleich der Fehler vor und nach der Profillegung zeigt eine Verbesserung um etwa 30%.

## 7. Lagevergleich

Des Interesses halber wurden für die astronomisch bestimmten Punkte die ebenen rechtwinkligen Koordinaten im konformen Gauß-Krüger-Meridianstreifen mit dem bei der Berechnung der Meridiankonvergenzen verwendeten Mittelmeridian  $\lambda_0$  in bezug auf den beim Südteil benutzten Ursprung  $\varphi_0$  berechnet [1].

$$\left. \begin{aligned} l &= \lambda - \lambda_0 \\ X &= B + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{N}{\rho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \dots \\ Y &= l \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \cos \varphi + \frac{l^3}{6} \cdot \frac{N}{\rho^3} \cos^3 \varphi (1 - t^2) + \dots \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Probe durch Rückrechnung:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi &= \frac{Y^2 \cdot \rho}{2 M_1 \cdot N_1} t_1 \dots \\ l &= \frac{Y \cdot \rho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{Y^3 \cdot \rho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2) + \dots \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$B = f(\varphi)$  bzw.  $\varphi_1 = F(X)$  sind aus einer Meridianbogentafel durch Interpolation zu entnehmen.

Gegenüberstellung der Werte aus der Aerotriangulierung mit vorgegebenem Anschluß und der astronomischen Bestimmung:

Pkt.	Y astr.	Y aerotr.	$\Delta Y_m$	$\Delta \lambda''$	X astr.	X aerotr.	$\Delta X_m$	$\Delta \varphi''$
7a	16 903	17 013	+ 110		45 462	45 807	+ 345	
19a	46 805	47 138	+ 333		48 961	49 407	+ 446	+ 14,3
23a	8 830	9 198	+ 368	+ 12,3	82 514	82 950	+ 436	
27a	43 589	43 783	+ 194		78 471	78 806	+ 335	
Mittel			+ 251	+ 8,4			+ 390	+ 13,0

Tabelle 5

Lagerung des Rahmens ohne Rücksicht auf den vorgegebenen Anschluß auf Grund einer genäherten Lotabweichungsausgleichung ohne Verdrehung:

Pkt.	Y astr.	Y aerotr.	$\Delta Y_m$	$\Delta \lambda''$	X astr.	X aerotr.	$\Delta X_m$	$\Delta \varphi''$
7a	16 903	16 762	- 141	- 4,7	45 462	45 417	- 45	- 1,5
19a	46 805	46 887	+ 82	+ 2,8	48 961	49 017	+ 56	+ 1,8
23a	8 830	8 947	+ 117	+ 3,9	82 514	82 560	+ 46	+ 1,5
27a	43 589	43 532	- 57	- 1,9	78 471	78 416	- 55	- 1,8

Tabelle 6

Diese Tabelle zeigt die Überlegenheit der Aerotriangulierung über die astronomische Bestimmung.

### 8. Die Berechnung der Blatteckenwerte

Nach Punkt 3. wären durch Interpolation aus den astronomisch bestimmten Punkten, für die außer den geographischen Koordinaten ebene Koordinaten aus der Rahmenausgleichung vorlagen, die ebenen Koordinaten der mit  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$  festgelegten Blatteckpunkte zu berechnen gewesen. Bei unserer Bearbeitung wurden trotzdem die Formeln (14) zur Berechnung verwendet und auf Differenzen geprüft.

### 9. Zusammenfassung

Für die im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen erstmalig durchgeführte Ausgleichung von aerotriangulierten Streifen mit astronomisch bestimmten Paßpunkten wurde ein einfacher Vorgang vorgesehen. Von den Angaben war die astronomische Ortsbestimmung für die Streifenausgleichung wohl zu ungenau. Die Ausgleichung der Rahmenstreifen ergab einen Rahmenschlußfehler von 9,8 m im  $Y$  und 0,8 m im  $X$ . Die Ausgleichung aller Füllstreifen wurde voneinander unabhängig und mit Punkten durchgeführt, deren Koordinaten aus den Rahmenstreifen erhalten worden waren. Für die Ausgleichung jedes Streifens wurden nur der Maßstab und die Streifenrichtung im Anfangs- und Endmodell verwendet und ein kreisförmiger Verlauf für die Verbesserungskurven angenommen. Als ungefähre absolute Genauigkeit kann ein Punktlagefehler von  $\pm 5$  m und ein Höhenfehler von  $\pm 7,5$  m angegeben werden. Die mittlere relative Genauigkeit beträgt rund  $\pm 1$  m.

\* \* \*

Abschließend möchte ich Herrn Präsidenten *Dr. eh. Ing. K. Neumaier* für die Ratschläge und Unterstützung der Veröffentlichung, den Herren *Dipl.-Ing. Dr. techn. J. Kovarik* und *Dipl.-Ing. P. Waldhäusl* für die Redigierung und allen Mitarbeitern meinen Dank aussprechen.

### Literatur

[1] *Jordan-Eggert-Kneißl*, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Stuttgart 1959, Band IV (2. Hälfte), S. 1121.

## Über die Berechnung bestimmter Integrale durch Schleppiteration

Von *Ludwig Starkl*, Wels

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Studie wird die allgemeine Planimetergleichung für Umfahrungsplanimeter mit Integrierrolle auf ruhender Unterlage in vektoranalytischer Darstellung entwickelt und anschließend auf eine als Schleppplanimeter bezeichnete, verbesserte Form des Prytzschen Stangenplanimeters spezialisiert. Es wird nachgewiesen, daß mit dem Schlepp-Planimeter und auch mit dem Stangenplanimeter entgegen der mehrfach abgeleiteten [7, 8, 11, 15, 16, 18, 20, 34], aber bisher als unbefriedigend bezeichneten [36] Theorie desselben eine theoretisch strenge Lösung bestimmter Integrale (Flächeninhaltsbestimmung) durch Iteration möglich ist. Abschließend wird ein möglichst vollständiger, zeitlich geordneter Überblick über die bisherige einschlägige Literatur gegeben.