Paper-ID: VGI_196016

Über die Bestimmung der Gestalt der Erde

Arne Bjerhammar [1]

[1] *Technische Hochschule Stockholm*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (6), S. 177–180

1960

BibTEX:

```
@ARTICLE{Bjerhammar_VGI_196016,
Title = {{\"U}ber die Bestimmung der Gestalt der Erde},
Author = {Bjerhammar, Arne},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {177--180},
Number = {6},
Year = {1960},
Volume = {48}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. eh. K. Ledersteger und
ORdVD. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Levasseur

Nr. 6 Baden bei Wien, Ende Dezember 1960 XLVIII. Jg.

Über die Bestimmung der Gestalt der Erde

Von *Arne Bjerhammar*, Stockholm

In einer früheren Abhandlung hat der Verfasser eine Methode zur *expliziten* Bestimmung der Erdgestalt aus gravimetrischen Daten entwickelt. In der vorliegenden Arbeit wird eine ähnliche Resolventenlösung beschrieben, die unmittelbar von der klassischen Formel von *Green* ausgeht:

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[W \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS. \qquad \ldots (1)$$

In dieser bedeuten W_0 das tatsächliche Potential im festen Punkte P_0, W das tatsächliche Potential im beweglichen Punkte P, r den Abstand zwischen P_0 und P, n die Flächennormale und S die Oberfläche.

Die entsprechende Formel für die theoretische Erde lautet:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS, \qquad \ldots (2)$$

worin U_0 das theoretische Potential im fraglichen Punkt P_0 und U das theoretische Potential im laufenden Punkt P ist.

Das Potential der theoretischen Erde ist für die Oberflächenpunkte zu berechnen. Daher müssen wir die geopotentiellen Unterschiede in „theoretischen Höhen" ausdrücken. Dafür gilt die Beziehung:

$$\int_0^P g\,dh = \int_0^z \gamma\,dz \approx \int_0^z \left(\gamma_0 + z \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dz = \gamma_0 z + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{z^2}{2}, \qquad \ldots (3)$$

in welcher P den beweglichen Punkt, O einen Punkt auf der Bezugsfläche, dh die gemessenen Höhenunterschiede, dz die theoretischen Höhenunterschiede, z die theoretische Höhe von P über der Bezugsfläche, g die wahre, γ die theoretische Schwere und γ_0 die theoretische Schwere auf der Bezugsfläche bedeuten.

Schließlich wird die Höhe über der Bezugsfläche nach der Formel

$$Z = z + \frac{T}{\gamma_z} \qquad \dots (4)$$

berechnet. Darin bedeuten Z die tatsächliche Höhe über der Bezugsfläche, $T = W - U$ die Potentialstörung und γ_z die theoretische Schwere in der Höhe z.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhalten wir

$$T_0 = W_0 - U_0 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \right) \right] dS, \qquad \dots (5)$$

worin $(\partial W / \partial n)$ die tatsächliche Schwere in der Richtung der Flächennormalen und $(\partial U / \partial n)$ die theoretische Schwere in dieser Richtung ist. Diese Ableitungen erhalten wir durch die Projektion der Schwere auf die Flächennormale nach den Formeln

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -g \cos (g, n), \qquad \dots (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\gamma \cos (\gamma, n). \qquad \dots (7)$$

So bekommen wir

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Big(g \cos (g, n) - \gamma \cos (\gamma, n) \Big) \right] dS \qquad \dots (8)$$

mit

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left(z + \frac{T}{\gamma_z} \right).$$

Der Winkel zwischen den Richtungen der theoretischen und der wahren Schwere ist sehr klein. Deshalb schreiben wir

$$\cos (g, n) = \cos (\gamma, n) = \cos \alpha$$

und finden:

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\cos \alpha}{r} \left(\triangle g - \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{T}{\gamma_z} \right) \right] dS \qquad \dots (9)$$

mit

$$\triangle g = g - \gamma_0 - \frac{\partial \gamma}{\partial z} z.$$

Sodann führen wir den Parameter

$$T = \iint\limits_{S_j} k \triangle g \, dS_j \qquad \dots (10)$$

ein und erhalten aus den Gleichungen (9) und (10)

$$\iint\limits_{S_j} k_0 \triangle g \, dS_j = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_j} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\cos \alpha}{r} \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] \iint\limits_{S_i} k \triangle g \, dS_i + \frac{\triangle g \cos \alpha}{r} \right\} dS_j. \qquad \dots (11)$$

Nach Änderung der Reihenfolge der Integration folgt

$$\iint\limits_{S_j} \left\{ 2\pi k_0 - \iint\limits_{S_i} k \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\cos\alpha}{r}\frac{1}{\gamma_z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} \right] dS_i - \frac{\cos\alpha}{r} \right\} \Delta g \, dS_j = 0. \quad \ldots (12)$$

Daraus ergibt sich die Integralgleichung

$$2\pi k_0 - \iint\limits_{S_i} k \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\cos\alpha}{r}\frac{1}{\gamma_z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} \right] dS_i = \frac{\cos\alpha}{r}. \quad \ldots (13)$$

Im singulären Falle muß diese Gleichung entsprechend berichtigt werden.

Für die Kugel vom Halbmesser R erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n) = -\frac{1}{2Rr};$$

$$\cos\alpha = 1; \quad \frac{1}{\gamma_z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{2}{R}$$

und finden bei Abspaltung der beiden ersten Kugelfunktionen

$$2\pi k_0 - \frac{1}{R}\iint\limits_{S_j} \frac{3k}{2r} dS_j = \frac{1}{r} - \cos\omega - 1. \quad \ldots (14)$$

Nun kann eine Entwicklung nach den Kugelfunktionen $Y_{nm}(\beta, \varphi)$ vorgenommen werden. Wir führen die Parameter

$$k = \Sigma\Sigma\, a_{nm}\, Y_{nm}(\beta, \varphi); \quad \frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\, b_{nm}\, Y_{nm}(\beta, \varphi) \quad \ldots (15)$$

ein, worin

$$Y_{nm}(\beta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n{}^m(\cos\beta) e^{im\varphi}$$

ist und $P_n{}^m(x)$ das zugeordnete *Legendre*sche Polynom bezeichnet.

Aus Gleichung (14) erhalten wir die Beziehung zwischen unseren neuen Parametern

$$2\pi a_{nm} - \frac{3}{2}\frac{4\pi}{2n+1} a_{nm} = b_{nm} \quad \ldots (16)$$

oder

$$a_{nm} = \frac{1}{4\pi}\frac{2n+1}{n-1} b_{nm}. \quad \ldots (17)$$

Somit bekommen wir

$$k = \sum\sum \frac{1}{4\pi}\frac{2n+1}{n-1} b_{nm}\, Y_{nm}(\beta, \varphi) \quad \ldots (18)$$

mit

$$b_{nm} = \iint\limits_{S_2} \frac{1}{r}\, \bar{Y}_{nm}(\beta_2, \varphi_2)\, dS_2. \quad \ldots (19)$$

Mit der Lösung

$$k = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\omega), \qquad \ldots (20)$$

in welcher $P_n(\omega)$ das Legendresche Polynom bedeutet, erhalten wir die bekannte *Stokes*sche Funktion

$$k = \frac{1}{4\pi}\left\{\operatorname{cosec}\frac{\omega}{2} - 6\sin\frac{\omega}{2} + 1 - \cos\omega\left[5 + 3\,ln\left(\sin^2\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (21)$$

Bei der praktischen Anwendung kann die Lösung von *Stokes* als erste Näherung verwendet werden. Die allgemeine Lösung wird nach Auflösung des Systems mit dem rechten Glied der Gleichung (13) erhalten, das auf Grund der Näherungslösung verbessert worden ist.

Alle Lösungen werden ohne Kenntnis der Schwereanomalien erhalten.

Die endgültigen Höhenkorrektionen werden nach der Formel

$$\frac{T}{\gamma_z} = \frac{1}{\gamma_z} \iint_S k \triangle g\, dS$$

berechnet. Über die Lotabweichung siehe Bjerhammar, Trans. R. I. T., Nr. 149.

Schrifttum:

Arnold Kurt: Die Bestimmung der Geoidundulationen nach dem Greenschen Satz, Z. f. V., 1956, Heft 10.

Bjerhammar, Arne: A General Method for an Explicit Determination of the Shape of the Earth from Gravimetric Data, Trans. of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Nr. 149, 1959

de Graaff-Hunter, James: The Figure of the Earth from Gravity Observations and the Precision Obtainable, Phil. Trans. of the Royal Society, London, Vol. 134, 1935, S. 377–431.

Hirvonen, Reino A.: On the Precision of the Gravimetric Determination of the Geoid, Trans. of the American Union, Vol. 37, No. 1, 1956.

Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Paßpunkten

Von *Franz Halwax*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

In dieser Veröffentlichung sollen die Ergebnisse einer kleinmaßstäblichen Aerotriangulierung mit astronomisch bestimmten Paßpunkten kurz zusammengestellt werden. Die Bearbeitung wurde über Initiative und im Auftrag von Herrn Präsidenten Dr. eh. Ing. K. Neumaier im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen durchgeführt.

1. Aufgabenstellung

Das in Abb. 1 dargestellte Gebiet im Ausmaß von rund 2300 km² wurde mit einer Reihenbildkammer RC5 mit Objektiv f = 11,5 cm, Aviogon, in einer Flughöhe von absolut 4600 m beflogen. Dies entspricht, da es sich um geringe Geländehöhen handelt, einem mittleren Bildmaßstab $M_b \sim 1:40\,000$. Der Ostteil (östlich