

Paper-ID: VGI\_196014



## Graphisch-mechanische Ermittlung maximaler Koordinatenstreuungen bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Rückwärtseinschnittes

Walter Smetana <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII/64, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (5), S. 160–165

1960

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_196014,  
  Title = {Graphisch-mechanische Ermittlung maximaler Koordinatenstreuungen bei  
    der analytischen Berechnung des mehrfachen Rückwärtseinschnittes},  
  Author = {Smetana, Walter},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
  Pages = {160--165},  
  Number = {5},  
  Year = {1960},  
  Volume = {48}  
}
```



*Rohrer, Johann:* Koordinatenumformung. Dienstvorschrift Nr. 13 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen; Wien 1932 (nur für den Dienstgebrauch)

*Rohrer, Johann:* Zum neuen Projektionssystem Österreichs. Österr. Z. f. Vermessungswesen 32 (1934), Nr. 5, S. 89 bis 97, u. Nr. 6, S. 116 bis 123

*Rohrer, Johann:* Richtungs- und Seitenreduktionen für die winkeltreue Gaußsche Abbildung. Dienstvorschrift Nr. 10 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen; Wien 1931

<sup>69)</sup> (*Winter, Franz:*) Dienstanweisung für die Neutriangulierung des Gebietes von Österreich; Feldarbeiten. Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien <sup>1</sup>1929, <sup>2</sup>1935 u. Teilneuaufgabe <sup>3</sup>1955 = (*Reibhorn, Viktor:*) Dienstvorschrift Nr. 4, Signalisierung, Stabilisierung und Beschreibung der trigonometrischen Punkte

<sup>70)</sup> *Hotine, M., Marussi, Antonio, und Whitten, Charles A.:* Report on Projections. International Association of Geodesy. Brüssel 1951

<sup>71)</sup> 9. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik; Brüssel 1951, Entschl. Nr. 1; Bull. géod., Neue Folge, Nr. 22, S. 471

<sup>72)</sup> *Mercator (Kremer); Gerhard:* Nova ed aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accomodata. Duisburg 1569

*Hubeny, Karl:* Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids. Sonderh. 13 d. Österr. Z. f. Vermessungswesen; Wien 1953

## **Graphisch-mechanische Ermittlung maximaler Koordinatenstreuungen bei der analytischen Berechnung des mehrfachen Rückwärtseinschnittes**

Von *Walter Smetana*, Wien

(*Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen*)

### *1. Einleitung*

In der Praxis wird es mitunter vorkommen, sogenannte Einschaltpunkte (EP) [1] nach der Methode des mehrfachen Rückwärtseinschneidens zu bestimmen und als wahrscheinlichste Punktlage den Schwerpunkt eines mit den größten Gewichten erhaltenen bezüglichen Schnittpunktsystems gelten zu lassen. Wie diese Arbeit am zweckmäßigsten und wirtschaftlichsten unter Zuhilfenahme des vom Verfasser entworfenen Punktlagefehler-Felddiagramms für das Rückwärtseinschneiden [2] durchgeführt wird, möge einem späteren Beitrag vorbehalten sein. Die folgende Abhandlung, die aus der Praxis entstanden und für den Praktiker geschrieben ist, gibt Antwort auf die Frage: Mit welchen maximalen Koordinatenstreuungen muß bei der analytischen Berechnung eines EP aus verschiedenen Rückwärtseinschnitt-Kombinationen gerechnet werden, wenn dem EP verschiedene, kombinationsmäßig bedingte mittlere Punktlagefehler zukommen. Die maximalen Koordinatenstreuungen sollen hierbei als Funktion der mittleren Punktlagefehler auf graphisch-mechanischem Wege, nämlich unter Zuhilfenahme eines einfachen Diagrammes und eines gewöhnlichen logarithmischen Rechenschiebers ermittelt werden.

Es mag wohl zunächst überflüssig erscheinen, sich mit dieser Frage zu beschäftigen. In der Praxis zeigte es sich jedoch, daß ihre Lösung von entscheidender Bedeutung bei der Beurteilung fehlerhafter Koordinaten der Ausgangspunkte wird — eine Frage, die meines Wissens in der Fachliteratur noch nicht praktisch berührt worden ist.

## 2. Theoretische Grundlagen

Die von *Jordan* [3] abgeleiteten Formeln zur Bestimmung der Koordinatenfehler mit Hilfe reziproker Entfernungen bilden den Ausgangspunkt der weiteren Entwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{1}{2\Delta} \left[ - (r_3 \cos \nu_3 - r_2 \cos \nu_2) d\alpha + (r_2 \cos \nu_2 - r_1 \cos \nu_1) d\beta \right] \\ dy &= \frac{1}{2\Delta} \left[ - (r_3 \sin \nu_3 - r_2 \sin \nu_2) d\alpha + (r_2 \sin \nu_2 - r_1 \sin \nu_1) d\beta \right] \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Hierin bedeuten  $r_1 = \frac{1}{S_1}$ ,  $r_2 = \frac{1}{S_2}$  und  $r_3 = \frac{1}{S_3}$ .  $\Delta$  ist die Fläche des Reziprok-dreieckes.  $d\alpha$  und  $d\beta$  sind die Fehler der gemessenen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  und  $\nu_3$  bezeichnen die Richtungswinkel der Strahlen  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$ .

Führt man die für den praktischen Gebrauch notwendige Transformation der Formeln (1) durch [3], setzt  $t = \frac{\rho^{cc}}{S_{cm}}$  an Stelle von  $r = \frac{1}{S}$  und ersetzt weiters die Differentiale  $dx$ ,  $dy$ ,  $d\alpha$  und  $d\beta$  durch die kleinen, aber endlichen Fehlergrößen  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\beta$ , so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \delta x &\approx \frac{1}{2\Delta t} \left[ (-t_3 \cos \nu_3 + t_2 \cos \nu_2) \Delta\alpha + (t_2 \cos \nu_2 - t_1 \cos \nu_1) \Delta\beta \right] \\ \delta y &\approx \frac{1}{2\Delta t} \left[ (-t_3 \sin \nu_3 + t_2 \sin \nu_2) \Delta\alpha + (t_2 \sin \nu_2 - t_1 \sin \nu_1) \Delta\beta \right] \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

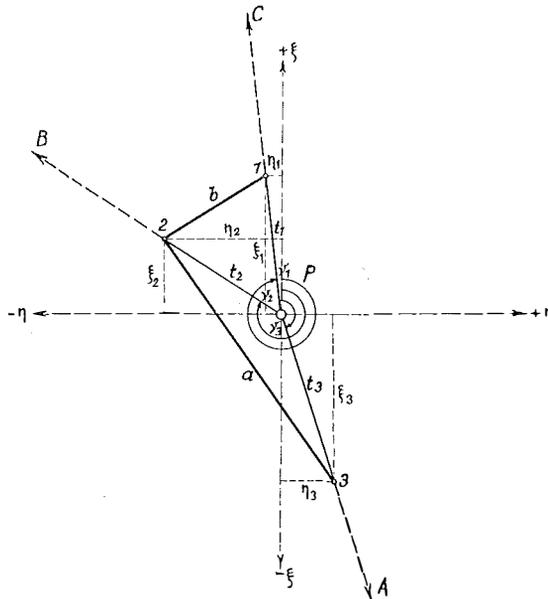


Abb. 1

Gemäß Abb. 1 bedeuten der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} t_3 \cos \nu_3 = \xi_3 & t_2 \cos \nu_2 = \xi_2 & t_1 \cos \nu_1 = \xi_1 \\ t_3 \sin \nu_3 = \eta_3 & t_2 \sin \nu_2 = \eta_2 & t_1 \sin \nu_1 = \eta_1 \end{array}$$

Dies sind die Koordinaten der Eckpunkte des transformierten Reziprokdreieckes in bezug auf den Neupunkt  $P$  als Ursprung.

Man erhält den größtmöglichen Fehler für  $\delta x$  und  $\delta y$ , wenn man in Anbetracht der sowohl positiv als auch negativ auftretenden Fehler  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\beta$  die bezüglichen Summenfaktoren von  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\beta$  in den Fehlerformeln (2) mit ihren Absolutbeträgen einsetzt und  $|\Delta\alpha| = |\Delta\beta| = 3|m_{\alpha}^{cc}|$  annimmt.

Da der mittlere Punktlagefehler [2]  $M_{cm} = \frac{m_{\alpha}^{cc}}{h_a} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$  und daher  $3m_{\alpha}^{cc} = \frac{3M_{cm}h_a}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}}$ , worin  $\frac{b}{a} = \frac{1}{n}$ ,  $h_a$  die zu  $a$  gehörige Höhe darstellen, liefern die

Formeln (2) unter Berücksichtigung von  $2\Delta_t = ah_a$  und  $\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = K_n$  folgende Höchstwerte:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_{cm} &\approx \frac{3|M_{cm}|}{aK_n} \left[ |(\xi_2 - \xi_3)| + |(\xi_2 - \xi_1)| \right] \\ \delta y_{cm} &\approx \frac{3|M_{cm}|}{aK_n} \left[ |(\eta_2 - \eta_3)| + |(\eta_2 - \eta_1)| \right] \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Hierin bedeuten

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_3 = \Delta\xi_{32} &= a \cos \nu_a & \xi_2 - \xi_1 = \Delta\xi_{12} &= b \cos \nu_b \\ \eta_2 - \eta_3 = \Delta\eta_{32} &= a \sin \nu_a & \eta_2 - \eta_1 = \Delta\eta_{12} &= b \sin \nu_b \end{aligned}$$

Liegen die aus zwei Rückwärtseinschnitt-Kombinationen errechneten Koordinaten eines Neupunktes mit ihren mittleren Fehlern  $M_1$  und  $M_2$  vor, so dürfen diese Koordinaten demnach maximale Streuungen aufweisen von:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_{12} &= |\delta x_1| + |\delta x_2| \approx \frac{3|M_1|}{a_1K_{n1}} \left( |a_1 \cos \nu_{a1}| + |b_1 \cos \nu_{b1}| \right) + \\ &+ \frac{3|M_2|}{a_2K_{n2}} \left( |a_2 \cos \nu_{a2}| + |b_2 \cos \nu_{b2}| \right) \\ \delta y_{12} &= |\delta y_1| + |\delta y_2| \approx \frac{3|M_1|}{a_1K_{n1}} \left( |a_1 \sin \nu_{a1}| + |b_1 \sin \nu_{b1}| \right) + \\ &+ \frac{3|M_2|}{a_2K_{n2}} \left( |a_2 \sin \nu_{a2}| + |b_2 \sin \nu_{b2}| \right) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Die Ausdrücke  $|a \cos \nu_a| + |b \cos \nu_b|$  und  $|a \sin \nu_a| + |b \sin \nu_b|$  werden, wie im Abschnitt 4. erläutert wird, aus einem Diagramm ermittelt und mit dem mittels Rechenschiebers errechneten Wert  $\frac{3|M|}{aK_n}$  multipliziert.

### 3. Aufbau des Diagramms

Das Diagramm umfaßt gemäß der Beilage ein Zentimeter-Koordinatennetz für  $\Delta\xi$  und  $\Delta\eta$  mit der Bezifferung 1, 2, ... 10 cm sowie konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung mit den Radien 1, 2, ... 10 cm. Um das Schätzen der Koordinaten und Strecken  $a$  und  $b$  auf 1 mm zu erleichtern, sind sowohl die Koordinatenlinien als auch die Kreise von 5 zu 5 mm dargestellt.

#### 4. Gebrauch des Diagramms

Wie in Abb. 2 ersichtlich ist, wird das Diagramm so über ein gezeichnetes Reziprokdreieck orientiert gelegt, daß sich der Ursprung des Koordinatennetzes mit dem Punkt 2 des Dreieckes deckt. Die Ausdrücke  $a \cos \nu_a$  und  $b \cos \nu_b$  bzw.  $a \sin \nu_a$  und  $b \sin \nu_b$  werden ohne Berücksichtigung ihrer Vorzeichen als  $|\Delta \xi|$  bzw.  $|\Delta \eta|$  im Diagramm auf Zentimeter abgelesen und die Millimeter geschätzt. Ebenso ermittelt man mit Hilfe der Kreise die Seitenlängen  $a$  und  $b$  des Dreieckes, wobei  $a \geq b$  ist.

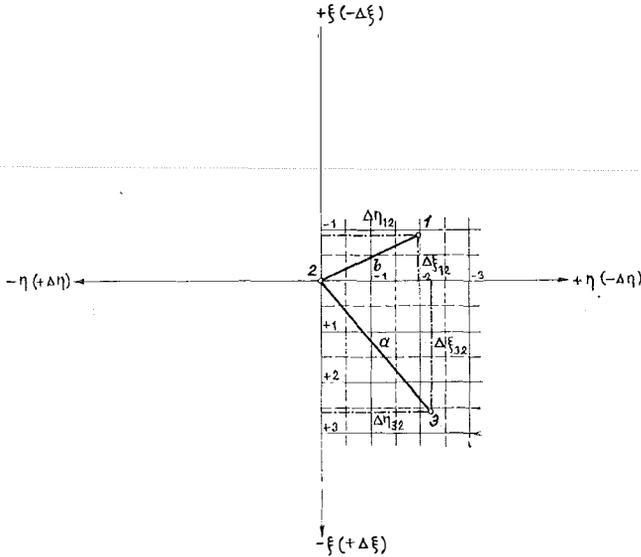


Abb. 2

#### 5. Berechnung der Formelgruppe (4) mittels des Diagrammes und des Rechenschiebers

Die Berechnung wird allgemein und mit besonderen Zahlen an Hand eines Beispielles aus der Praxis zweckmäßig folgendermaßen durchgeführt.

Nachdem die mittleren Punktlagefehler zweier Rückwärtseinschnitt-Kombinationen aus dem entsprechenden Felddiagramm ermittelt worden und demnach auch die Größen  $K_n$  bekannt sind, wird mit dem Rechenschieber der Ausdruck  $\frac{3 |M|}{K_n}$  berechnet. Hierauf bestimmt man aus dem Diagramm die Größen  $|\Delta \xi_{32}| + |\Delta \xi_{12}|$  bzw.  $|\Delta \eta_{32}| + |\Delta \eta_{12}|$ , multipliziert sie mit  $\frac{3 |M|}{K_n}$  und dividiert durch die im Diagramm abgelesene Seitenlänge  $a$ . Die Addition der für die beiden Rückwärtseinschnitt-Kombinationen auf diese Weise ermittelten Werte  $\delta x_1$  und  $\delta x_2$  bzw.  $\delta y_1$  und  $\delta y_2$  liefert die zu erwartenden maximalen Koordinatenstreuungen.

#### 6. Beispiel

In Abb. 3 sind zur Bestimmung des EP 6 zwei Rückwärtseinschnitt-Kombinationen mit dem theoretischen mittleren Punktlagefehler  $M \approx 1$  cm dargestellt. Die beiden bezüglichen Reziprokdreiecke heißen 1, 2 und 3 bzw. 1', 2' und 3'. Das

Verhältnis der beiden Seiten  $a$  und  $b$  wurde für beide Kombinationen mit  $n = 3$

geschätzt; daher  $K_n = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1,053$ . Damit werden

$$\delta x_{12} \approx \frac{3}{1,053} \cdot \frac{5,7}{5,9} + \frac{3}{1,053} \cdot \frac{6,0}{5,9} \approx 6 \text{ cm}$$

$$\delta y_{12} \approx \frac{3}{1,053} \cdot \frac{5,3}{5,9} + \frac{3}{1,053} \cdot \frac{5,4}{5,9} \approx 5 \text{ cm}$$

Die Zahlen 5,7 und 6,0 bzw. 5,3 und 5,4 werden aus dem Diagramm ermittelt und die Größe 5,9 unmittelbar im Diagramm abgelesen bzw. geschätzt.

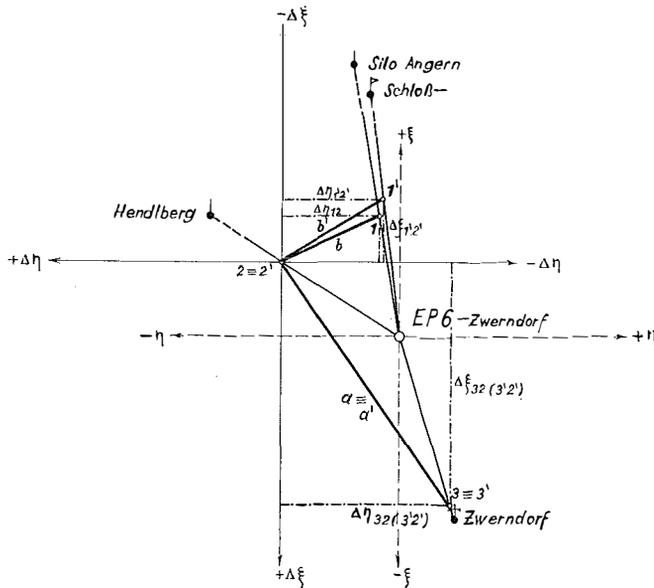


Abb. 3

Die sich tatsächlich rechnerisch ergebenden Koordinatenstörungen der beiden Rückwärtseinschnitt-Kombinationen sind jedoch  $\delta x_{12} = 10 \text{ cm}$  und  $\delta y_{12} = 7 \text{ cm}$ . Die errechneten Höchstwerte werden demnach um etwa 50 v. H. überschritten, ein Zeichen dafür — wie auch eine diesbezügliche Untersuchung bestätigt hat —, daß sich die Koordinaten eines Ausgangspunktes nicht auf den angezielten Punkt beziehen, also keine Identität dieses gegebenen Ausgangspunktes vorliegt.

### 7. Genauigkeitsbetrachtung

An Hand von Differentialformeln läßt sich zeigen, daß der maximale Fehler der mit dem Diagramm und Rechenschieber errechneten Koordinatenstörungen höchstens rund 1 cm betragen kann. Differenziert man nämlich zum Beispiel  $\delta x = \frac{3 M}{K_n} \cdot \frac{\Delta \xi_{32} + \Delta \xi_{12}}{a}$  nach den mit den Fehlern  $\Delta a$  bzw.  $\delta \Delta \xi$  behafteten Größen  $a$  und  $\Delta \xi$ , so erhält man

$$d\delta x = \frac{3 M}{K_n} \cdot \frac{a d[\Delta \xi] - [\Delta \xi] da}{a^2}$$

Der größtmögliche Fehler ist demnach

$$\Delta \delta x \approx \frac{3 |M|}{K_n} \cdot \frac{a |\delta [\Delta \xi]| + |[\Delta \xi] \Delta a|}{a^2} \dots (5)$$

Da  $|\Delta a| = |\delta \Delta \xi| = |\delta \Delta \eta| \approx 1 \text{ mm}$ ,  $|\delta [\Delta \xi]| = 2 |\Delta a| \approx 2 \text{ mm}$  als Schätzungsfehler im Diagramm angenommen werden können, ist

$$\Delta \delta x \approx \frac{3 |M|}{K_n} \cdot \frac{a \cdot 0,2 + |[\Delta \xi]| \cdot 0,1}{a^2} \dots (6)$$

Da die kleinere Seite  $b$  des Reziprokdreieckes mindestens so groß sein muß wie die Höhe des betreffenden Dreieckes, folgen aus der Formel für den mittleren

Punktlagefehler  $M = \frac{3}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{3}{h} \cdot K_n$ , wenn der Reihe nach für  $n = 1, 2, 3$  gesetzt wird,  $h_1 = 4,23 : M$ ,  $h_2 = 3,36 : M$ ,  $h_3 = 3,16 : M$ .

Demnach muß für  $n = 1$   $a \geq 4,2 : M$ , für  $n = 2$   $a \geq 6,7 : M$  und für  $n = 3$   $a \geq 9,5 : M$  sein. Die  $[\Delta \xi]$  ist von der Lage des Koordinatensystems abhängig, und ihre maximalen Werte betragen, wie aus einer Maximumbedingung zu errechnen ist, für  $n = 1, 2$  und  $3$  bzw.  $[\Delta \xi] \approx 6,0, 7,5$  und  $9,9 \text{ cm}$ . Dies in Formel (6) eingesetzt, ergibt für  $M = 1, 2, 3$  und  $4$  bei

$$\left. \begin{array}{l} n = 1 \dots \Delta \delta x \approx 0,2 \text{ } 0,7, \text{ } 1,5 \text{ bzw. } 3,6 \text{ cm} \\ n = 2 \dots \Delta \delta x \approx 0,1, \text{ } 0,5, \text{ } 1,1 \text{ bzw. } 2,0 \text{ cm} \\ n = 3 \dots \Delta \delta x \approx 0,1, \text{ } 0,4, \text{ } 0,8 \text{ bzw. } 1,5 \text{ cm} \end{array} \right\} \dots (7)$$

Soll der maximale Berechnungsfehler der Koordinatenstreuungen  $\Delta \delta x_{12} \leq 1 \text{ cm}$  werden, darf man Rückwärtseinschnitt-Kombinationen mit den Punktlagefehlern  $M \geq 3 \text{ cm}$  für  $n = 1$  bis  $3$  zur Berechnung der maximalen Koordinatenstreuungen unter Zuhilfenahme des Diagrammes nicht mehr verwenden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Ermittlung der Koordinatenstreuungen nach Formel (4) mit Hilfe des beschriebenen Diagrammes in Verbindung mit dem Rechenschieber auf Zentimeter genau erfolgen kann, vorausgesetzt, daß die mit dem Punktlagefehler-Felddiagramm bestimmten Punktlagefehler der betreffenden Schnittkombination möglichst unter  $3 \text{ cm}$  liegen. Eine Kombination von  $M_1 = 1$  und  $2$  für  $n = 1$  bis  $3$  mit  $M_2 = 3 \text{ cm}$  für  $n = 3$  wäre jedenfalls noch möglich, ebenso die Kombination von  $M_1 = 1$  und  $2$  für  $n = 3$  mit  $M_2 = 3$  für  $n = 2$ .

Die nach (7) errechneten Zahlenwerte stellen außerdem Höchstwerte von Berechnungsfehlern dar, die in der Praxis selten erreicht werden dürften.

[1] Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen: Dienstvorschrift Nr. 16 Einschaltpunkt- und Polygonnetz. Wien 1958.

[2] Smetana, Walter: Punktlagefehler-Felddiagramm für das Rückwärtseinschneiden. ÖZfV 47 (1959), Nr. 1, S. 8–12.

[3] Jordan, Wilhelm, und Eggert, Otto: Handbuch der Vermessungskunde, Band II/1, Stuttgart 1931, S. 450–453.