Das äußere Schwerefeld eines Rotationssphäroids

Godfried Oliwa [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (4), S. 113–119

1960

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
ORdVD. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Levasseur

Nr. 4 Baden bei Wien, Ende August 1960 XLVIII. Jg.

Das äußere Schwerefeld eines Rotationssphäroids

Von *Godfried Oliwa*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

1. *Einleitung.* Die Entwicklung des Potentials W der tatsächlichen Erde im Außenraum nach zonalen Kugelfunktionen kann formal in $W = U_n + T_n$ zerlegt werden. U_n wird als Niveausphäroid n-ten Ranges bezeichnet.

Es gibt nun zwei klassische Entwicklungsmöglichkeiten der Theorie der Niveausphäroide. Die eine stammt von Helmert. Die Eigenschaft der Äquipotenz wird durch Gleichsetzung der Potentialwerte am Pol und Äquator erreicht. Die zweite Möglichkeit wurde von Darwin angewendet. In dem Ausdruck für U_n müssen, damit dieser an der Oberfläche des Sphäroids einen konstanten Wert annimmt, die Summen der mit den zonalen Kugelfunktionen verbundenen Glieder je für sich verschwinden. Die Darwinschen Entwicklungen führen auf Systeme von Gleichungen, die linear in den Stokesschen Konstanten sind; sie sind bequemer als die Helmertschen Ableitungen, die auf eine Gleichung höheren Grades führen.

2. *Das Sphäroid.* Ist $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ die Gleichung eines Rotationsellipsoides, so lautet die Gleichung der Meridianellipse in geozentrischen Koordinaten r, δ, wo r der Leitstrahl, δ die geozentrische Poldistanz und $e = \frac{a - c}{a}$ die Abplattung ist:

$$r = a\left(1 + \cos^2 \delta \, \frac{2e - e^2}{(1 - e)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Durch Reihenentwicklung folgt:

$$r = a\left(1 - e\cos^2\delta - \frac{3}{2}e^2(\cos^2\delta - \cos^4\delta) - \frac{e^3}{2}(4\cos^2\delta - 9\cos^4\delta + 5\cos^6\delta)\right).$$

Dies ist die Gleichung der Meridianellipse bis einschließlich der in e kubischen Glieder. Die Gleichung des Sphäroids gleicher Abplattung entsteht durch Einführung der Formparameter f und d. f ist von derselben Ordnung wie das Quadrat, d von der des Kubus der Abplattung. Die Gleichung der Meridiankurve des Rotations-Niveausphäroids, also bei Beschränkung auf die zonalen Kugelfunktionen, lautet:

$$r = a\left(1 - e\cos^2\delta + \left(f - \frac{3}{2}e^2\right)\left(\cos^2\delta - \cos^4\delta\right) + \right.$$
$$\left. + \left(d - \frac{e^3}{2}\right)\left(4\cos^2\delta - 9\cos^4\delta + 5\cos^6\delta\right)\right).$$

Das Potential im Außenraum ist:

$$U_n = \varkappa.\pi\left(\frac{4}{3}S_0R^{-1} - \frac{8}{15}S_2R^{-3}P_2 + \frac{16}{35}S_4R^{-5}P_4 - \frac{32}{63}S_6R^{-7}P_6\right) + \frac{\omega^2}{3}R^2(1-P_2)$$

Hierbei sind die S_{2k} ($k = 0, 1, 2, 3$) Massenfunktionen, ω die Winkelgeschwindigkeit, die P_{2k} die zonalen Kugelfunktionen und $\varkappa$ die Gravitationskonstante. Die Forderung, daß die Oberfläche des Sphäroids in allen Punkten den gleichen Wert besitzt, wird dadurch erfüllt, daß für R der Leitstrahl r eingesetzt wird. Damit ist aber der Weg klar vorgezeichnet. Die mathematischen Entwicklungen sind durchaus elementar. Es sind zunächst die Ausdrücke $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ ($n = 1, 3, 5, 7$) und $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ zu bilden.

3. *Reihenentwicklungen.* Wird der Einfachheit halber:

$\xi_1 = -e$, $\xi_2 = f - \frac{3}{2}e^2$, $\xi_3 = d - \frac{e^3}{2}$ und $\cos^2\delta = t$ gesetzt, so kann

$r = a(1 + \xi_1 t + \xi_2(t - t^2) + \xi_3(4t - 9t^2 + 5t^3))$ geschrieben werden. Wird nach Potenzen von t geordnet, so folgt $r = a(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)$, wobei $a_1 = \xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3$, $a_2 = -(\xi_2 + 9\xi_3)$, $a_3 = 5\xi_3$ ist.

Durch unbestimmten Ansatz für

$\frac{a}{r} = 1 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ ergibt sich für die c:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = -a_1 = -(\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3)$$
$$c_2 = -a_2 + a_1^2 = (\xi_2 + 9\xi_3) + (\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2)$$
$$c_3 = -a_3 + 2a_1a_2 - a_1^3 = -5\xi_3 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_1^3$$

Durch einfache Berechnung folgt für

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 + c_{1n}t + c_{2n}t^2 + c_{3n}t^3$$

die

Tabelle 1

$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=7$
c_1	$3c_1$	$5c_1$	$7c_1$
c_2	$3c_2+3c_1^2$	$5c_2+10c_1^2$	$7c_2+21c_1^2$
c_3	$3c_3+6c_1c_2+c_1^3$	$5c_3+20c_1c_2+10c_1^3$	$7c_3+42c_1c_2+35c_1^3$

Weiterhin ergibt sich leicht

$$c_1 = -(\xi_1+\xi_2+4\xi_3) \qquad = e - \left(f-\frac{3}{2}e^2\right) - \left(4d-2e^3\right)$$

$$c_2 = (\xi_1^2+2\xi_1\xi_2)+(\xi_2+9\xi_3) = e^2 - 2\left(fe-\frac{3}{2}e^3\right) + \left(f-\frac{3}{2}e^2\right) + \left(9d-\frac{9}{2}e^3\right)$$

$$c_3 = -\xi_1^3 - 2\xi_1\xi_2 - 5\xi_3 \qquad = e^3 + 2\left(fe-\frac{3}{2}e^3\right) - 5\left(d-\frac{1}{2}e^3\right)$$

Es ist also:

$$c_{11} = e - f + \frac{3}{2}e^2 - 4d + 2e^3$$

$$c_{21} = f - \frac{1}{2}e^2 + 9d - \frac{3}{2}e^3 - 2fe$$

$$c_{31} = -5d + \frac{1}{2}e^3 + 2fe\,.$$

Da S_2 eine Größe erster, S_4 eine zweiter und S_6 dritter Ordnung der Abplattung e sein wird, ergeben sich verschiedene zulässige Vernachlässigungen. In der folgenden Tabelle werden die Koeffizienten der Reihenentwicklung für die Niveausphäroide U_2 und U_4 mit aufgeführt.

Tabelle 2a

	U_6	U_4	U_2
$c_{11} =$	$e - f + \frac{3}{2}e^2 - 4d + 2e^3$	$e - f + \frac{3}{2}e^2$	e
$c_{21} =$	$f - \frac{1}{2}e^2 + 9d - \frac{3}{2}e^3 - 2fe$	$f - \frac{1}{2}e^2$	
$c_{31} =$	$-5d + \frac{1}{2}e^3 + 2fe$		
$c_{13} =$	$3\left(e - f + \frac{3}{2}e^2\right)$	$3e$	
$c_{23} =$	$3\left(f + \frac{1}{2}e^2\right)$		
$c_{33} =$	0		
$c_{15} =$	$5e$		
$c_{25} =$	0		
$c_{35} =$	0		

Die Koeffizienten der Reihenentwicklung für $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ sind:

Tabelle 2b

	U_6	U_4	U_2
$a_{12} =$	$-2\left(e - f + \frac{3}{2} e^2\right)$	$-2e$	0
$a_{22} =$	$-2(f - 2e^2)$	0	
$a_{32} =$	0		

In den folgenden Entwicklungen werden gewisse Formeln und Identitäten aus der Theorie der Kugelfunktion verwendet. Sie sind aus der Literatur bekannt und leicht zu verifizieren. Die zonalen Kugelfunktionen sind durch

$$P_0 = 1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3t - 1)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35t^2 - 30t + 3)$$

$$P_6 = \frac{1}{16}(231t^3 - 315t^2 + 105t - 5)$$ definiert, wobei $t = \cos^2 \delta$ ist.

Daraus ergeben sich folgende Identitäten:

$$t = \frac{1}{3}(2P_2 + 1)$$

$$t^2 = \frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}$$

$$t^3 = \frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}$$

Ferner sei noch an die oft benutzten Formeln

$$P_2^2 = \frac{18}{35} P_4 + \frac{2}{7} P_2 + \frac{1}{5}$$

$$P_2 P_4 = \frac{5}{11} P_6 + \frac{20}{77} P_4 + \frac{2}{7} P_2$$ erinnert.

4. Die Bedingungsgleichungen für die S_n

Werden in den Reihenentwicklungen $\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 + c_{1n} t + c_{2n} t^2 + c_{3n} t^3$ die obigen Identitäten benützt, so gilt

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3} c_{1n} + \frac{1}{5} c_{2n} + \frac{1}{7} c_{3n}\right) + \left(\frac{2}{3} c_{1n} + \frac{4}{7} c_{2n} + \frac{10}{21} c_{3n}\right) P_2 + \\ + \left(\frac{8}{35} c_{2n} + \frac{24}{77} c_{3n}\right) P_4 + \frac{16}{231} c_{3n} P_6$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{3} a_{12} + \frac{1}{5} a_{22} + \frac{1}{7} a_{32}\right) + \left(\frac{2}{3} a_{12} + \frac{4}{7} a_{22} + \frac{10}{21} c_{32}\right) P_2 + $$
$$+ \left(\frac{8}{35} a_{22} + \frac{24}{77} a_{32}\right) P_4 + \frac{16}{231} a_{32} P_6$$

Wird $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ mit P_{n-1} und $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ mit $(1 - P_2)$ multipliziert, wobei gleichzeitig die Formeln für $P_2{}^2$ und $P_2 P_4$ benützt werden, so ergeben sich

$$\left(\frac{a}{r}\right) = \left(1 + \frac{1}{3} c_{11} + \frac{1}{5} c_{21} + \frac{1}{7} c_{31}\right) + \left(\frac{2}{3} c_{11} + \frac{4}{7} c_{21} + \frac{10}{21} c_{31}\right) P_2 +$$
$$+ \left(\frac{8}{35} c_{21} + \frac{24}{77} c_{31}\right) P_4 + \frac{16}{231} c_{31} P_6$$

$$P_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3} c_{13} + \frac{4}{7} c_{23}\right) + \left(1 + \frac{11}{21} c_{13} + \frac{3}{7} c_{23}\right) P_2 +$$
$$+ \frac{4}{35}\left(3 c_{13} + \frac{34}{11} c_{23}\right) P_4 + \frac{8}{35} \cdot \frac{5}{11} c_{23} P_6$$

$$P_4 \left(\frac{a}{r}\right)^5 = \frac{4}{21} c_{15} P_2 + \left(1 + \frac{39}{77} c_{15}\right) P_4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{11} c_{15} P_6$$

$$P_6 \left(\frac{a}{r}\right)^7 = P_6$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 - P_2\right) = \left(1 + \frac{1}{3} a_{12} + \frac{1}{5} a_{22}\right) + \left(-1 + \frac{1}{7} a_{12} + \frac{1}{7} a_{22}\right) P_2 -$$
$$- \frac{12}{35}\left(a_{12} + \frac{4}{11} a_{22}\right) - \frac{8}{35} \cdot \frac{5}{11} a_{22} P_6$$

In Hinblick auf den Potentialausdruck werden die obigen Gleichungen mit

$\frac{S_0}{a}, -\frac{2}{5} \cdot \frac{S_2}{a^3}, \frac{12}{35} \cdot \frac{S_4}{a^5}, -\frac{8}{21} \cdot \frac{S_6}{a^7}$ und $\frac{\omega^2}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot a^2$ der Reihe nach multipliziert.

Werden nun die Koeffizienten von P_2, P_4 und P_6 für sich Null gesetzt, so folgt die Bedingung für den konstanten Potentialwert:

$$\frac{S_0}{a}\left(\frac{2}{3} c_{11} + \frac{4}{7} c_{21} + \frac{10}{21} c_{31}\right) - \frac{2}{5}\left(1 + \frac{11}{21} c_{13} + \frac{3}{7} c_{23}\right) \frac{S_2}{a^3} +$$
$$+ \frac{4}{35} \cdot \frac{4}{7} c_{15} \frac{S_4}{a^5} + \left(-1 + \frac{1}{7} a_{12} + \frac{1}{7} a_{22}\right) \frac{\omega^2 a^2}{4\pi} = 0$$

$$\frac{S_0}{a}\left(\frac{8}{35} c_{21} + \frac{24}{77} c_{31}\right) - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{35}\left(3 c_{13} + \frac{34}{11} c_{23}\right) \frac{S_2}{a^3} +$$
$$+ \frac{12}{35}\left(1 + \frac{39}{77} c_{15}\right) \frac{S_4}{a^5} - \frac{12}{35}\left(a_{12} + \frac{4}{11} a_{22}\right) \frac{\omega^2 a^2}{4\pi} = 0$$

$$\frac{S_0}{a}\left(\frac{16}{231} c_{31}\right) - \frac{2}{11} \cdot \frac{8}{35} c_{23} \frac{S_2}{a^3} + \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{7} c_{15} \frac{S_4}{a^5} + \frac{8}{21} \frac{S_6}{a^7} +$$
$$+ \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{11} a_{22} \frac{\omega^2 a^2}{4\pi} = 0$$

Setzt man abkürzend:

$\frac{S_2}{(S_0 a^2)} = A$, $\frac{S_4}{(S_0 a^4)} = B$, $\frac{S_6}{(S_0 a^6)} = C$ und $\frac{3\,\omega^2 a^3}{(S_0\, 4\,\pi)} = D$ so folgt weiterhin sehr leicht die Berechnung für die U_2, U_4 und U_6.

Für das Rotations-Niveausphäroid von Bruns ist $c_{11} = e$ und alle anderen $c_{ik} = 0$, ebenso alle $a_{ik} = 0$. Daher kommt nur die Gleichung für P_2 in Frage:

$$\frac{7}{3}\,e - \frac{7}{5}\,A_2 - \frac{7}{6}\,D = 0 \text{ und es gilt } A_2 = \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\,D\right)$$

Beim Helmertschen Niveausphäroid U_4 ist

$c_{11} = e - f + \frac{3}{2}\,e^2$

$c_{21} = f - \frac{1}{2}\,e^2$

$c_{13} = 3e$

$a_{12} = -\,2e$ und alle anderen c_{ik} und a_{ik} sind Null.

Es bestehen für P_2 und P_4 die Gleichungen:

$$\left(\frac{7}{3}\,c_{11} + 2\,c_{21}\right) - \frac{7}{5}\,A_4 + \frac{11}{15}\,c_{13}\,A_2 + \frac{1}{6}\left(-7 + a_{12}\right)D = 0$$

$$2c_{21} - \frac{6}{5}\,c_{13}\,A_2 + 3\,B_4 - D\,a_{12} = 0$$

Daraus folgt leicht, wenn für A_2 der Ausdruck von oben benützt wird:

$$A_4 = \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\,D - \frac{1}{7}\,f - \frac{1}{2}\,e^2 + \frac{9}{14}\,eD\right)$$

$$B_4 = \frac{1}{3}\left(7e^2 - 5eD - 2f\right)$$

Diese Ausdrücke sind mit den Darwinschen identisch. (Siehe etwa Ansel, Theorie des irdischen Schwerefeldes im Handbuch für Geophysik, Seite 665 oben, wenn der Ausdruck Seite 666 oben angewendet wird.) Für das Rotations-Niveausphäroid U_6 ergeben sich, wenn die Tabellen 2 Berücksichtigung finden, nach längerer, aber einfacher Rechnung:

$$A_6 = \frac{5}{3}\left(\left(e - \frac{1}{2}\,D - \frac{1}{2}\,e^2 + \frac{9}{14}\,eD - \frac{1}{7}\,f\right) + \frac{1}{7}\left(d - \frac{25}{14}\,e^2 D - Df - \frac{5}{7}\,fe\right)\right)$$

$$B_6 = \frac{1}{3}\left(\left(7e^2 - 5eD - 2f - 7e^3 + \frac{125}{14}\,e^2 D\right) - \frac{1}{11}\left(48d + 13\,fD - \frac{226}{7}\,ef\right)\right)$$

$$C_6 = \frac{1}{2}\left(6e^3 - 5e^2 D\right) - \frac{1}{11}\left(12ef + 10d - 5fD\right)$$

Setzt man $\frac{4\pi S_0}{3} = M$ so findet man:

$$S_2 = \frac{5}{4\pi} \cdot a^2 M A'_6,\ S_4 = \frac{1}{4\pi} \cdot a^4 M B'_6 \text{ und } S_6 = \frac{3}{4\pi} \cdot a^6\, C'_6.$$

Um die in der englischen Literatur gebräuchlichen Symbole einzuführen, sei mit Cook für das Potential gesetzt:

$U_n = \frac{\varkappa M}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n \left(\cos \delta\right)\right)$. Die $J_2 = \frac{2}{5} A_6$, $J_4 = -\frac{12}{35} B_6$ und $J_6 = -\frac{8}{21} C_6$ sind die Stokesschen Konstanten.

Für das Niveauellipsoid folgen mit $f = d = 0$ die Formeln 5.2 von Cook [1]. Es sei bemerkt, daß die Folgerungen Cooks über eine nicht-isostatische Erde nicht hinreichen, denn es wird f, eine Größe von der zweiten Ordnung der Abplattung, nicht berücksichtigt.

5. *Die theoretische Schwere auf dem Sphäroid*

Abschließend sei hier nur kurz darauf hingewiesen, daß sich die theoretische Schwere g aus den obigen Entwicklungen kraft der Beziehung $g = \left(W_r^2 + W_\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wo $W_r = \frac{\partial W}{\partial r}$, $W_\delta = \frac{\partial W}{r \partial \delta}$ ist, durch Reihenentwicklung berechnen läßt.

Zusammenfassung

Ausgehend von den klassischen Definitionen Helmerts und Darwins für Niveausphäroide werden die Beziehungen zwischen den charakteristischen Parametern und den Stokesschen Konstanten J bis zur dritten Ordnung der Abplattung abgeleitet. Als ein Spezialfall ergeben sich die Formeln von Cook, die sich auf das Niveauellipsoid beziehen. Die Entwicklungen sind bewußt elementar im Anschluß an Darwin geführt.

Summary

Starting from Helmert's and Darwin's classical theory of the equipotential surfaces, being spheroids of revolution, the Potential of a spheroidal mass will be developed in spherical harmonics up to terms of the third order of the flattening e. Terms of higher order will be neglected. The relation between the characteristical parameters and the Stokian constants is shown. A. H. Cook's formulae are special cases of it concerning to the ellipsoidal spheroids. The developments in spite of their wilfully elementary manner are carried out in pursuance of Darwin's method.

Literatur:

[1] Cook, The External Gravity Field of a Rotating Spheroid to the order of e^3. The Geophysical Journal of the R. A. S., Volume 2, Nr. 3, September 1959.